한국수학사학회지 제21권 제2호(2007년 5월), 73-88

초등기하에서 도형의 대칭에 관한 연구*

단국대학교 수학교육과 **한길준**
gilhan@dankook.ac.kr

단국대학교 대학원 **신봉숙**
youngjykr@hanmail.net

대칭은 수학뿐만 아니라 생활에서 널리 이용되는 개념으로 5-나 단계에서 도형의 대칭을 다루고 있다. 본 연구는 도형의 대칭 지도를 위해 대칭과 대칭지도에 관한 역사적 배경, 수학적 배경, 교육과정에서의 위계를 살펴보고, 아동에게 대칭에서 발생하는 주요 오류와 그 원인을 규명하여 이를 극복하기 위한 아이디어를 얻고자 한다.

주제어 : 도형의 대칭, 강체운동, 평행이동, 회전이동, 반사이동

0. 머리말

우리는 아동에게 왜 기하나 공간감각을 가르쳐야 하는가? 기하는 공간을 파악하는 것이며 아동은 공간에서 보다 더 잘 살고, 호흡하고 활동하기 위해서 공간을 알고, 탐구하고 정복해야 한다([17]). 따라서 기하교육은 기하학적 관계성에 초점을 둔 많은 경험을 통해 자기 주위의 상황과 물체에 대한 직감, 즉 공간감각을 발달시켜야 한다([18]). 초등기하에서 대칭은 공간에서 물체의 방향과 조망, 합동, 심미성 등에 초점을 둔 공간감각을 기르기 위한 좋은 소재이다.

대칭은 여러 분야에서 오랜 세월동안 인류의 역사와 함께 중요한 역할을 해 왔다. 고대 토기의 문양에서부터 Escher의 테셀레이션 작품에 이르기까지 미술이나 건축, 생활용품 등에 대칭이 널리 이용되고 있다. 또한 과학에서 아르키메데스의 지렛대 원리와 분자의 대칭적 구조, 의학계에서 인체의 대칭과 건강과의 관계 등에도 적용된다.

대칭(對稱, symmetry)은 그리스어 sun(함께)과 metron(측정하다)에서 각각 유래된 sym과 metry가 결합된 용어이다. Rosen([19])에 의하면 대칭이란 기하학적인 도형이나 물리적인 현상, 여러 종류의 공식 등에서 어떤 종류의 변환을 겪더라도 변하지 않

* 이 연구는 2005학년도 단국대학교 대학 연구비의 지원으로 연구되었음

을 때를 말하며, 그 도형이나 수식이 작용된 변환에 대하여 대칭성(對稱性, symmetry)을 갖는다고 한다. 이때 변환 전체는 군(群)을 이루고, 그 군에 의하여 대상의 대칭성이 나타나게 된다. 대칭이동(對稱移動, symmetric transformation)이란 유클리드기하학에 대한 도형의 합동변환의 하나로, 주어진 도형을 점, 선, 면에 대하여 대칭적으로 옮겼을 때를 말하며 대칭변환이라고도 한다. 한편, 본 연구에서 넓은 의미로 대칭은 위에서 구분한 협의의 대칭, 대칭성, 대칭이동을 모두 포함한 의미로도 사용한다.

초등학교 제 7차 교육과정에서는 공간감각의 발달을 위해 도형의 변환에 대한 내용이 추가되었다. 특히 2-가, 3-가 단계에서는 강체운동을 통한 기초적인 공간 감각을 익히고, 3-나 단계에서 거울에 의한 반사, 5-나 단계에서는 회전과 반사를 이용한 선대칭과 선대칭이동, 점대칭과 점대칭이동, 3-나와 5-가 단계에서 테셀레이션을 지도하도록 교육과정이 구성되어있다. 그러나 2, 3단계의 아동에게 회전과 반사의 이해는 어려운 개념일 뿐만 아니라, 다음 단계의 대칭과 대칭이동의 학습에 직접적인 영향을 미친다. 5단계의 아동에게 점대칭이동과 선대칭 이동한 도형 그리기는 이해와 작도에 어려움이 많다. 또한 선대칭이동에서 학습한 개념이 점대칭에서 혼돈을 유발할 우려도 있다.

본 연구는 초등기하에서 대칭의 이해를 돕기 위해 수학사적 배경, 수학교육사적 배경, 수학적 개념을 먼저 살펴보고, 대칭의 개념과 위계를 밝히고자 한다. 그리하여 본격적으로 5-나 단계 '도형의 대칭' 단원의 학습에서 겪는 오류의 유형과 선수학습과의 관계를 규명하고, 이를 극복할 수 있는 아이디어를 얻고자 한다.

1. 대칭의 역사적 배경

생활에서 대칭은 인류의 역사와 함께 했지만 수학사와 수학교육사에서 등장과 발전 과정은 오늘날 대칭 지도의 시대적 요청과 지도 방향을 밝히는데 많은 것을 시사한다. 수학사적 배경으로는 문헌에서 밝혀진 고대 이집트에서 수학자들의 대칭에 대한 관념에서부터 오늘날 정의되고 있는 대칭 개념의 세련화 과정을 알아본다. 또한 수학교육사적 배경에서는 엄밀한 기하학의 지도에서 기하학적 변환 지도로의 변화와 강조되고 있는 과정에 대해 살펴본다.

가. 대칭의 수학사적 배경

기원전 6세기경 그리스의 탈레스는 이집트의 경험적·실용적 지식을 바탕으로 최초의 기하학을 확립하였고, 기하학적인 정리를 대칭으로 공식화하였다. 예를 들면 "원(圓)은 지름에 의해서 이등분 된다", "이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다", "두 직

선이 교차할 때 그 맞꼭지각의 크기는 같다" 등의 정리(定理)를 그가 발견한 것이다. 유클리드는 합동의 증명을 위해 공리 4에서 "겹쳐지는 것은 서로 같다"와 같은 '포갬의 원리(superposition)'를 부분적으로 사용하였다. 이 합동공리는 "도형은 그 모양과 크기를 변하지 않고 한 위치에서 다른 위치로 옮길 수 있다"를 공리에 서술하거나 증명을 하지는 않았지만 이를 가정하고 도형 사이의 상호관계를 조사한 것이다([7]). 이는 유클리드 원론이 외형적으로 도형에 대한 강체운동이나 대칭이동과 같은 도형의 이동에 대한 증명을 직접 다루지는 않았지만([14]), 묵시적으로 다루었다고 할 수 있다.

한편, Klein(1849~1925)은 1872년 에랑겐 대학교의 취임강연에서 <새로운 기하학적 연구의 비교 고찰>의 내용과 그때 제시한 연구계획을 합친 Erlangen Program을 고안하였다([7]). 에랑겐 프로그램은 기하학의 특성을 보여 주는 편리한 수단으로 군의 개념이 어떻게 응용될 수 있는가에 대해 기술하였다([12]). 그는 "기하학은 주어진 변환군에 대하여 불변인 도형의 성질을 연구하는 학문이고 여러 가지 변환군이 주어지면 이것에 대응하여 여러 가지 기하학이 생긴다"라고 하였다. 그의 프로그램은 합동변환군과 아핀변환군, 사영변환군에 대한 내용을 다루고 있다. 또한 클라인은 "유클리드 평면에서 합동변환군에 의해 변하지 않는 도형의 성질을 유클리드적 성질이라 하고, 이런 유클리드적 성질을 다루는 기하학을 평면 유클리드 거리 기하학(plane Euclidean metric geometry)이라 한다."라고 정의하였다([7]). 평면 유클리드 기하학은 넓이와 길이를 포함하여 평면 위에서 평행이동과 회전으로 이루어지는 변환군 아래에서 불변인 도형의 성질을 연구하는 학문이라고 할 수 있다. 결국 이와 같은 변환군은 이른바 합동변환으로, 도형은 어떤 평면 안에서 이동시켜도 변하지 않는다는 유클리드의 묵시적인 공리에 해당한다([12]). 또한, 클라인의 에랑겐 프로그램에 나타나지 않는 기하학을 포함시키기 위해 클라인의 정의를 확장하고 일반화하려는 노력이 Veblen과 Cartan 등에 의하여 부분적으로 이루어졌다([7]).

Pieri(1860-1904)는 1899년에 유클리드 기하학에 대한 연구에서 유클리드 기하학을 '점'이라 부르는 무정의 용어와 '운동'이라 부르는 무정의 개념의 집합으로 간주했다. 피에리의 공준 체계는 운동 자체보다는 그 운동의 결과에 관심이 있었고, 유클리드 기하학을 강체운동 전체의 집합에 대해 변하지 않는 점들로 이루어진 형태의 성질과 관계의 연구로 고려하였다. 변환군의 불변이론으로 기하학을 구성하는 일반적인 개념을 통하여 19세기 말과 20세기 초의 중요한 연구에 대한 방향 제시를 한 것이다([14]).

나. 대칭 지도의 역사적 배경

어린 아동에게 기하를 가르치고자 하는 생각은 오랜 옛날부터 오늘날에까지 기하발달의 긴 역사에서 고려되어 왔다. 대칭 지도의 역사발생은 기하의 지도와 특히, 강체

운동이나 공간감각의 지도 역사와 밀접한 관련이 있다.

이러한 시도에서 중요한 전환점은 Klein의 에랑겐 프로그램에서 군 개념을 이용한 기하지도의 강조와 함께 직사각형의 대칭을 다루는 '클라인의 4원군'을 예로 들 수 있다([3]). 그러나 본격적으로 연구가 이루어진 것은 1960년대라고 볼 수 있다([11]). 특히 미국에서 초등학교에 기하적 변환을 도입하려는 시도 중에 하나는 일리노이대학 학교수학위원회(UICSM)에 의해서 1969년에 기하의 이동에 관한 책을 발간한 것이다([13]).

1960년대 영국에서는 학교 수학에서 기하교육은 유치원 때부터 시작하여야 하며, 기하교육의 목적은 평면과 공간에 대한 학생들의 직관을 개발하는 것이어야 한다는 주장이 일어났다. 또한 Vigilante도 기하에 기본적인 기하 모양의 명칭과 속성, 공간과의 관계, 그 모양의 유용성을 포함할 것을 제안하였다([9]). 따라서 1966년 이전의 초등학교 수학과 교육과정은 주로 연산이 중심이 되었고, 기하는 대부분 유클리드 기하, 수 측정과 같은 전통적인 개념을 학습하는 활동만을 언급했다. 아동의 공간능력을 개선시킬 수 있는 기하에 대한 시사점이 고려되지 않은 채 아동의 심리적, 직관적 필요에 부합하는 시각적·공간적 측면보다는 기하의 논리-연역적 성질을 더 강조한 것이다.

김은주([4])에 의하면, Piaget는 기하개념의 발달단계를 연구하였는데, 아동이 처음에는 위상적 아이디어를 가지고 있고, 사영기하, 마지막으로 유클리드기하 순으로 이해하게 된다고 주장하였다. 그의 INRC군은 클라인의 4원군과 동형이며, 초등학교 단계인 구체적 조작기의 사고에는 전체성을 갖는 '구체적 조작체계'를 육성하는데 군성체 형성을 강조하였다. 또 Shah는 변환의 개념이 들어 있는 공간 연구는 지각적 수준에서 대칭축 찾기, 회전 및 평행이동에 의한 동형의 대등 관계와 같은 구체물의 변환과 회화적 변환활동을 포함하는 몇 개의 기하개념을 7-11 세 아동에게 가르쳤고, 7-11 세 아동들이 지각적 수준에서 변환 개념을 학습할 수 있다는 결론을 얻었다. Williford는 2, 3 학년 학생들의 변환 개념을 학습하는 능력에 대한 연구에서 연구 대상자들이 조작적 절차를 수행해서 변환의 상을 만들어 내는 것을 학습했지만, 정신적으로 변환을 수행하지는 못한다는 것을 발견하였다([9]). 이는 우리나라 저학년 아동에게 강체운동의 지도의 조기도입에 대해 국내의 면밀한 연구의 필요성을 시사한다.

Kidder는 9, 11, 13세 아동에게 형식적 조작기에 도달하지 못한 아동들은 변환과제를 수행하는데 있어 영향을 미치는 요인들을 구분할 수 없으며, 표상적 수준에서 변환을 수행하는 능력은 형식적 조작기를 개발하는 것으로 보인다는 것을 발견하였다. 그리하여 Kidder는 표상적 수준에서 유클리드 변환을 수행하는 아동의 능력을 향상시키는 훈련 프로그램을 고안하였다([4]).

NCTM([18])은 공간 감각에 대한 용어를 공식화하여 사용하였으며 도형의 변화를 공간 감각의 중요한 측면으로 보고, 초등학교에서는 비형식적인 방법에 따라 일상생활에서 접하는 대상에 대한 조사, 실험, 탐구를 통하여 도형을 다양한 위치에서 시각

화하고, 그려보고, 비교하는 활동을 강조하였다.

한편, 1960년대부터 미국 교육과정에서는 어떤 틈이나 포개짐이 없이 평면이나 공간을 도형으로 완벽하게 덮는 테셀레이션을 도입하였다. 테셀레이션은 다양한 수준에서 대칭과 변환, 합동, 도형의 각의 크기 등의 기하학을 쉽고 재미있게 지도할 수 있는 소재이며, 테셀레이션을 만드는 활동과정에서 자연스럽게 기하에 관한 수학적 개념, 수학적 사고력과 창의력을 키울 수 있다([5]). 우리나라 제 7차 교육과정에서도 무늬 꾸미기, 무늬 만들기 등의 용어로 테셀레이션을 다루고 있으나 규칙성과 함수영역으로 분류되어있다.

2. 기하에서 대칭

Farmer([15])는 대칭이란 모양을 변하지 않도록 이동하는 강체운동(rigid motion)이라 정의하였다. 또한 평면에서의 강체운동이란 평면 안의 모든 점들 사이의 상대적 거리와 위치가 같아지며, 도형의 모양이 처음의 그 모습 그대로 남게 하는 입체이동이라 정의하였다. 즉, 강체운동은 평면의 모든 점이 같은 거리와 같은 방향으로 이동하여, 확대나 축소, 꼬임이 없이 크기나 모양을 보존하는 것이다. 강체운동에는 평행이동(translation), 회전(rotation), 반사(reflection)가 있고, 이들을 결합하여 생성된 미끄러짐 반사(glide reflection), 제자리(do-nothing, identity)가 있다. 또 강체운동에서 5가지 이동을 원소로 하는 집합은 합동변환군을 이룬다.

대칭의 근간이 되는 강체운동과 그들의 합성, 대칭이동에 대해 살펴본다.

가. 평행이동(T)

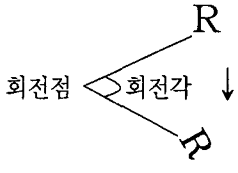
평면에서 평행이동(translation)은 고정점 없이 직선을 따라 특수한 방향으로 특별한 거리만큼 평면의 모든 점을 움직이는 이동으로 평행이동 한 후의 도형은 원래의 도형과 상·하, 좌·우 방향이 변하지 않는다.

2-가 단계에서 평행이동은 '옮기기'라는 표현으로 유리창을 열고 닫는 활동으로 도입되었고, 3-가 단계에서는 모눈종이 위에 도형을 그려서 상하좌우로 옮기는 활동을 하도록 하였다. 8-가 단계에서는 $y=ax+b$ 형태의 일차함수의 그래프가 $y=ax$의 그래프를 y축 방향으로 b만큼 평행이동한 것이고, 10-나 단계에서는 좌표평면에서 평행이동으로 방정식 $f(x, y)=0$으로 나타난 도형을 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동한 방정식 $f(x-a, y-b)=0$ 으로 소개하고 있다.

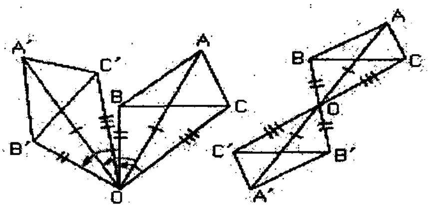
나. 회전(R)

회전(rotation)은 한 점을 고정하고 모든 것들을 그 점 주위로 같은 정도로 회전시

키는 이동이다. 회전의 유일한 고정점을 회전점이라 하고, 회전된 양을 회전각이라 한다. 회전이동 후에도 원점에서 회전 점까지의 거리와 이동점에서 회전 점까지의 거리는 같다.



[그림 1] 회전



[그림 2] 회전이동과 점대칭이동

좌표평면 위의 점 P(x, y)를 원점을 중심으로 θ만큼 회전하여 옮겨진 점을 P′(x', y')이라 하면 이것은 일차변환이고 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이다.
회전에서 θ=180°일 때 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이므로 $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ 이다.
따라서 $f(x,\ y)=0$으로 나타난 도형을 원점을 회전 점으로 180° 회전한 도형의 방정식은 $f(-x,\ -y)=0$이 된다. [그림 2]에서 회전 점 O 둘레의 180°의 회전을 점 O의 점대칭이동이라고 한다.

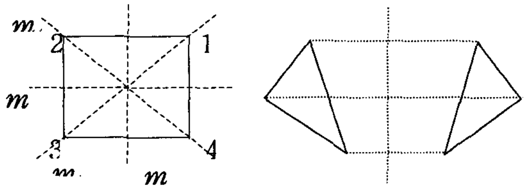
2-가 단계에서 회전은 '돌리기'라는 명칭으로 시계바늘 돌리기, 3-가 단계에서 모눈판의 도형 돌리기, 5-나 단계에서 점대칭도형과 점대칭의 위치에 있는 도형을 지도하도록 되어있다.

한편, 회전대칭(rotation symmetry)은 중심에 대한 회전에서 그 도형의 불변성을 말한다. 모든 정다각형은 회전대칭을 가지며, 회전의 중심은 그 다각형의 중심이다. 예컨대 정삼각형은 120°× n 회전하면 모양이 겹쳐진다. 따라서 n개의 변을 가진 정다각형은 n 중 겹침 회전대칭을 갖는다. 이를 이용하여 정다각형을 분류하기도 한다. 또, 하나의 도형을 동일평면상에 있는 일직선을 축으로 하여 회전시켜 도형을 이동시키는 것도 회전이라고 할 때도 있다. 이 때 회전시켜서 생긴 입체를 회전체라고 하며, 회전의 축이 되는 일직선을 회전축이라 한다.

다. 반사(MR)

반사(mirror reflection)는 평면 위의 한 직선을 축으로 하여 뒤집기에 의해 새로운 위치로 이동하는 것을 말하며 대칭축에 따라 그 평면에 수직으로 거울을 놓았을 때, 본래 도형의 거울의 상이 반사한 후의 상과 일치한다. 이때, 원점에서 대칭축까지의 거리와 이동점에서 대칭축까지의 거리는 같다.

[그림 3] 반사



[그림 4] 선대칭(클라인의 4원군)과 선대칭이동

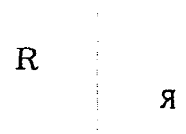
좌표평면 위의 점 P(x, y)를 주어진 직선 l: $ax+by=0$ 에 대하여 반사 대칭인 점 P′(x′, y′)이라 하면 이것은 일차변환이고, 이를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

한편, 반사는 '뒤집기'라는 명칭으로 2-가 단계에서 사람이나 인형 뒤집기 활동, 3-가 단계에서는 모눈판에서 도형 뒤집기 활동을 통해 지도하고 있다. 반사대칭과 반사대칭이동은 3-나 단계에서 거울에 비치는 상 관찰과 5-나 단계에서 선대칭도형과 선대칭의 위치에 있는 도형을 지도하도록 되어 있다. 또, 10-나 단계의 '3. 도형의 이동' 단원에서 x 축에 대한 대칭은 $f(x, y)=0 \rightarrow f(x, -y)=0$ 이고, 또 y 축에 대한 대칭은 $f(x, y)=0 \rightarrow f(-x, y)=0$ 이다. 한편 직선 $y=x$ 에 대한 대칭은 대칭축의 방정식에서 $f(x, y)=0 \rightarrow f(y, x)=0$ 으로 소개하고 있다.

라. 미끄러짐 반사(GR)

미끄러짐 반사(glide reflection)는 고정점이 없이 반사와 평행이동을 합성한 이동으로 둘 중 어느 이동을 먼저 실행해도 상관없으며, 반사와 달리 대칭축을 그릴 수 없다. 제 7차 교육과정에서는 2-가, 3-가 단계에서 평행이동과 반사의 합성, 반사와 회전의 합성으로 심화학습에서 다루고 있으나 아동의 발달단계에 비해 너무 어렵다.



[그림 5] 미끄러짐 반사

마. 제자리(I)

제자리(do-nothing, identity)는 모든 점을 시작 상태와 같은 점으로 이동하는 것으로 모든 점이 고정되어 있다.

바. 이동의 합성

강체운동의 집합 $\{T, R, MR, GR, I\}$는 이동의 합성에 대한 군이 되며, 이는 합동변환군이 된다([15]). 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

<표 1> 강체운동의 합성

·	제자리(I)	평행이동(T)	회전(R)	반사(MR)	미끄러짐 반사(GR)
I	I	T	R	MR	GR
T	T	T	R	GR or MR	MR or GR
R	R	R	R	GR or MR	MR or GR
MR	MR	GR or MR	GR or MR	T or R	T or R
GR	GR	GR or MR	MR or GR	T or R	T

평면에서 도형의 크기를 바꾸지 않는 이동은 모두 몇 개의 반사의 되풀이로 얻어진다. 예를 들어 평행이동은 두 평행선을 축으로 하는 반사의 되풀이이며, 회전은 그 중심을 지나는 두 직선을 축으로 하는 반사의 되풀이이다. 아동에게 심화학습으로의 지도는 강체운동에 대한 가역적 사고와 단일이동의 합성을 발견하도록 하는 것이다.

평행이동 · 회전 · 반사의 대칭은 띠패턴(strip-patterns)과 벽지패턴(wall-patterns)에서 찾아볼 수 있다([15]). 띠패턴은 평행이동 · 회전 · 반사 대칭을 왼쪽이나 오른쪽 방향으로 이동하기 위하여 띠를 그린 것이고, 벽지패턴은 평행이동 · 회전 · 반사의 대칭을 두 가지 다른 방향으로 대칭을 갖는 것이다. 벽지패턴은 17개의 다양한 대칭 유형들이 있고, 각 형태들은 역사를 통해 다양한 숙련공과 예술가들에 의해서 만들어져 왔다. Polya는 1924년에 <Uber dis Analogic der kristall symmetrie in der Ebene>을 통해 각 대칭성의 유형을 제시하였고, 이러한 예들은 네덜란드 예술가 M.C. Escher의 작품에 대한 영감으로 작용했다([15]). 띠패턴이나 벽지패턴의 테셀레이션은 강체운동을 통한 무늬의 규칙적인 배열이며, 공간감각의 형성 특히 대칭성을 지도하기 위한 좋은 소재이다.

3. 대칭 지도의 실제

우리나라와 외국의 강체운동과 대칭 지도를 위한 과정을 살펴보고, 서로 비교하여 우리나라 교육과정에서 나타나는 어려움을 알아본다. 또, 선수학습의 부진요인을 알아보고, 5-나 단계의 대칭 학습에서 나타나는 오류와의 관련성을 살펴보고자 한다. 그리하여 대칭 지도에서 발생하는 오류와 학생들이 갖는 어려움이 무엇인지, 또 그 원인이 무엇인지를 분석한다.

가. 대칭지도를 위한 교육과정

제 7차 교육과정에서 다루는 1-가 단계의 '여러 가지 모양' 단원, 1-나 단계의 '여러 가지 모양' 단원에서 입체도형이나 평면도형을 규칙적으로 배열하거나 규칙에 맞게 무늬찍기 활동, 색칠하기 활동은 띠패턴에 속한다. 그리고 2-가 단계 '도형과 도형 움직이기' 단원에서 테셀레이션을 보고 기본이 되는 무늬를 찾는 것, 3-나 단계의 '도형' 단원과 5-가 단계 '무늬 만들기' 단원에서는 제시된 기본 무늬로 테셀레이션을 하도록 구성되어있다. 교육과정 상의 테셀레이션은 벽지패턴 17가지 중에서 평행이동, 반사, 4중 회전으로 무늬 꾸미기를 주요 활동으로 대칭을 지도하고 있다. 그러나 강체운동을 지도하기이전의 띠패턴이나 벽지패턴의 지도는 공간감각의 형성이나 대칭의 지도라기보다는 단순히 규칙성을 찾기 위한 전개로 흐를 우려가 있다.

또한 강체운동은 2-가 단계의 구체적 활동과 3-가 단계에서 모눈종이를 이용하여 도형의 옮기기, 뒤집기, 돌리기에 대해 지도하도록 되어 있다. 그리고 3-나 단계에서 거울을 이용한 반사대칭을 다루고, 5-나 단계에서 구체적으로 선대칭, 선대칭이동과 점대칭, 점대칭이동을 지도하도록 되어 있다. 이는 대칭 개념의 발달을 Bruner의 나선형 교육과정의 지도 원리를 따르되, Brousseau의 수학적 지식의 발달 순서대로 원시 수학적 개념에서 범수학적 개념으로, 최종적으로 수학적 개념을 확립하기 위한 구성이라 할 수 있다. 이에 비해 외국에서의 대칭 지도는 어떻게 이루어지는지 알아보기 위해 이중권([8])의 세계 여러 나라의 교육과정에서 강체운동이나 대칭과 관련된 부분을 살펴보았다.

독일에서는 Grundschule과정(초등학교 6~10세 과정)의 2학년(7-8세)에서 선대칭 도형을 발견하고 만들기를 지도하며, 3학년(8-9세)에서 사각형 종이의 그림을 포함한 대칭도형의 심화학습을 다루고 있다. 15세까지 공통기본교육을 제공하는 The Hauptschule 과정(5-9학년)의 5학년(10-11세)에서 정사각형 종이를 이용한 좌표 대칭과 평행이동을 지도하고, 6학년(11-12세)에서 정사각형 종이와 일반적인 입체를 이용하여 회전(중심, 각)과 관련된 그리기와 모델링을 지도한다. 기술적인 경향의 Realschule 중등학교 과정에서 6학년(11-12세) 선대칭과 평행이동, 평행이동의 동치류로서의 벡터를 지도하고 학생들에게 대학을 준비하게 하는 Gymnasium 과정의 6단계(11-12세)에서 점대칭, 공간에서의 대칭을 지도하고, 7단계(12-13세)에서 선대칭, 점대칭을 지도한다.

이탈리아에서는 기하와 측정의 영역에서 첫 번째 단계(6-8세)에는 대칭성 인식하기, 두 번째 단계(8-11세)에서는 대칭성을 인식하고, 대칭성을 이용하여 삼각형과 사각형을 분류하기, 구체적인 물질과 그림을 이용하여 좌표축 대칭, 평행이동, 회전을 학습한다.

미국의 교과서를 살펴보면, 2학년부터 강체운동과 선대칭을 다루며, 3학년에서 테셀레이션이 추가되고, 4학년에서 선대칭, 5학년에서 선대칭과 회전대칭을 추가하여 지도한다. 6학년에서는 테셀레이션을 구체적으로 지도하는 것이 추가되었다. 이는 2학년부

터 6 학년까지 강체운동의 지도가 계속되고, 심화나 생활과 관련해서 테셀레이션을 지도하도록 하여 기하에서 변환의 지도를 반복하면서 점진적으로 심화되도록 구성한 것이다.

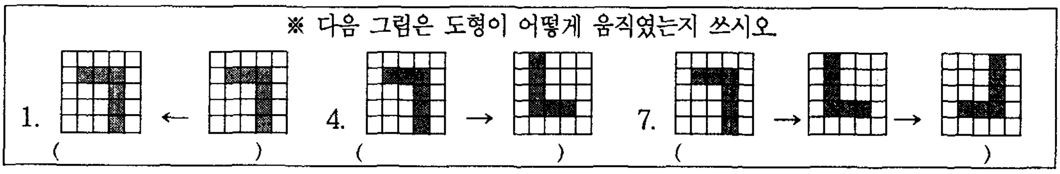
우리나라는 처음부터 강체운동과 테셀레이션의 지도 후에 대칭을 지도한다. 그러나 위에서 살펴본 독일, 이탈리아와 같은 나라에서는 대칭의 발견이나 인식을 공간감각 형성의 일환으로 지도 후에 구체적인 강체운동으로 나아간다. 또 포르투갈은 상·하, 좌·우를 지도한 후 강체운동을 지도함으로써 먼저 충분히 방향감각을 학습하도록 되어있다.

우리나라의 강체운동과 대칭에 관한 학습이 조기에 너무 어렵게 도입되어 아동의 발달단계에 비해 지나치게 어렵다는 결론은 김영선([2]), 김용태 외([3]), 김은주([4])의 연구와도 맥을 같이 한다. 3 학년 아동은 모눈종이에 강체운동 후의 도형을 그리는 것은 더욱 후속학습에 오류를 유발할 가능성이 많다. 강체운동을 먼저 지도하고 대칭을 지도하는 것은 엄밀하게 학문중심의 개념적 위계를 중시한 구성이지만 대칭에서 발견되는 공간감각을 의식하고 강체운동을 지도하는 것보다 어렵고, 아동의 흥미를 떨어뜨릴 우려가 더 많다.

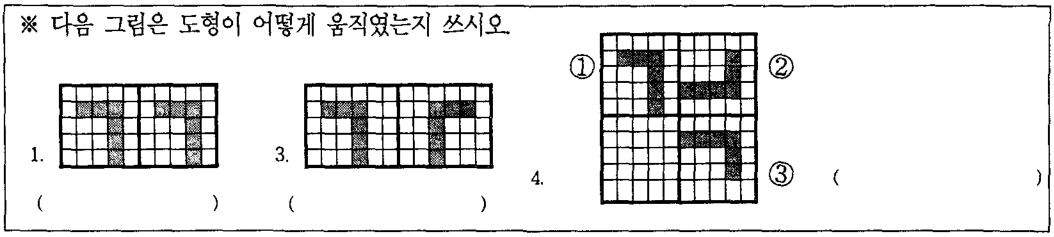
나. 도형의 대칭 지도

대칭 지도에 대한 선수학습 상태와 오류의 원인을 규명하기 위해 경기도 시흥시 S 초등학교 5 학년 1 학급에서 특수아를 제외한 31 명을 대상으로 연구하였다. 연구 대상자가 소속하는 학교는 국가수준 학업성취도 평가에서 중·하 수준이며, 연구대상 학급은 필수 학습요소 진단평가에서 60점 미만인 아동 5 명이 포함되어있다. 또, 연구대상자에는 여름방학 동안 사교육에서 도형의 대칭에 관해 속진학습을 한 아동 7 명이 포함되어있다.

아동들은 5-나 단계의 ‘도형의 대칭’ 단원을 학습하기 전에 여름방학 개학 직후 몇 가지 테스트를 받았다. 테스트의 내용은 선수학습이 잘 되었는가와 대칭을 지도하는 데 선수학습의 부진요인이 어떻게 작용하는지 알아보기 위해 3 학년 수준의 교과서에 제시된 강체운동과 그들의 합성문제를 해결하도록 하였다. 시험지 유형은 A형과 B형으로 나누어져있으며, A형은 3학년 교과서에서 다룬 단절된 모눈종이 위에서의 강체운동이고, B형은 연속된 모눈종이에서의 강체운동이다. 문항의 일부와 테스트 결과를 소개하면 다음과 같다.



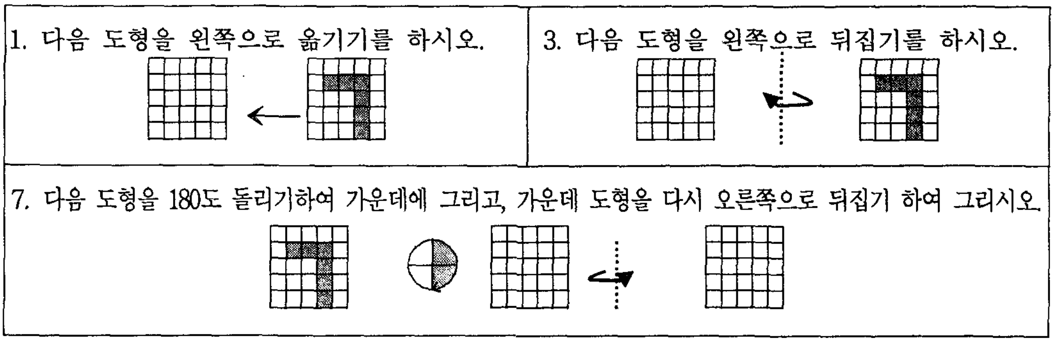
[그림 6] 도형의 이동 방법 알아보기(문항지 A형)



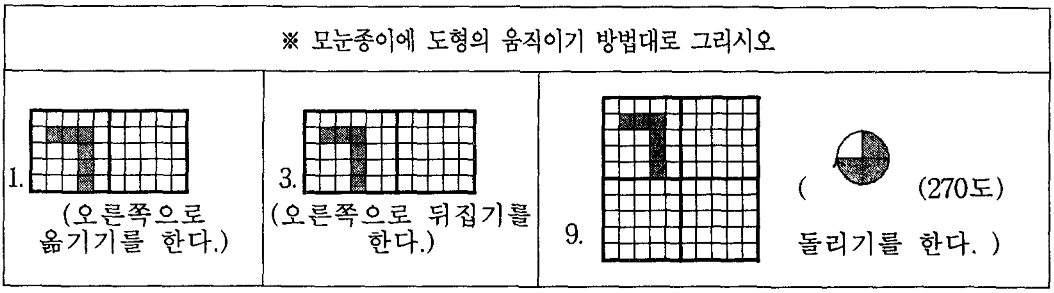
[그림 7] 도형의 이동 방법 알아보기(문항지 B형)

<표 2> 도형의 이동 방법 알아보기 결과

구분		오른쪽으로 옮기기	아래로 뒤집기	오른쪽으로 뒤집기	180° 돌리기	270° 돌리기	돌리기 2회(R)	뒤집기와 돌리기(GR)
A형	정답자수 (오답율)	30 (3.3%)	30 (3.3%)	29 (6.6%)	29 (6.6%)	29 (6.6%)	27 (12.9%)	18명 (41.9%)
B형	정답자수 (오답율)	28 (9.6%)	25 (19.3%)	27 (12.9%)	23 (32.2%)	26 (16.1%)	24 (22.5%)	15명 (51.6%)



[그림 8] 강체운동한 도형 그리기(문항지 A형)



[그림 9] 강체운동한 그리기(문항지 B형)

<표 3> 강체운동한 도형 그리기 결과

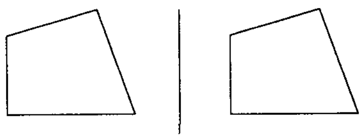
구분		오른쪽으로 옮기기	아래로 옮기기	위로 뒤집기	아래로 뒤집기	왼쪽으로 뒤집기	오른쪽으로 뒤집기
A형	정답자수 (오답율)	29 (6.6%)	29 (6.6%)	27 (12.9%)	23 (32.3%)	23 (32.3%)	22 (29.0%)
B형	정답자수 (오답율)	28 (9.6%)	28 (9.6%)	23 (32.3%)	20 (35.4%)	21 (32.2%)	21 (32.2%)
구분		90° 돌리기	180° 돌리기	270° 돌리기	360° 돌리기	뒤집기와 돌리기(GR)	
A형	정답자수 (오답율)	18 (41.9%)	14 (54.8%)	20 (35.5%)	26 (16.1%)	11명 (64.5%)	
B형	정답자수 (오답율)	16 (48.3%)	12 (61.2%)	16 (48.3%)	26 (16.1%)	8명 (74.1%)	

대부분의 아동들은 문항지 A 형과 B 형에서 모두 도형의 이동결과를 보고 강체운동의 종류를 찾아내는 것이 잘 학습되었다. 그러나 직접 강체운동 후 도형의 모양을 그리는 것에는 오류가 많았다. 특히 낯익은 A 형보다 낯 설은 B 형에 오류가 더 많았고, 최상위권 2 명만이 문항지 B 형이 더 그리기가 쉽다고 하였다. 그렇지만 아동의 문항지 A 형을 테스트하는 과정에서 모눈자체의 이동으로 도형의 이동보다는 도형의 모눈종이에서의 위치에 더 관심을 가지고 도형을 표시하였다. 또한 <표 2>의 뒤집기와 돌리기의 합성은 많은 아동이 어려움을 겪는 문제였다. <표 3>에서 아동들은 뒤집기 중에서 위로 뒤집기보다는 아래로 뒤집기가 더 오류가 많았고, 돌리기에서도 180° 돌리기가 가장 오류가 많았다. 이는 돌리기보다 뒤집기가 조금 더 잘 학습되었고, 5 단계 학습에서 선대칭보다는 점대칭의 학습에 더 어려움으로 작용한다는 것을 알 수 있다.

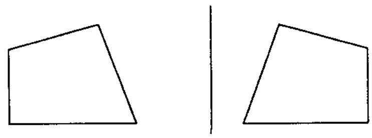
본 연구자는 테스트 후에 전체 아동을 대상으로 3 학년 수준의 세 가지 이동에 대한 보충지도를 실시하고, 특히 뒤집기와 돌리기에 오류가 많은 아동 12 명에 대해서는 뒤집기와 돌리기에 대한 지도를 3 시간 동안 하였다. 보충 지도는 OHP 시트에 비교적 단순하면서 대칭인 그림(A, 직사각형, 사과)과 비대칭인 것(F, 사다리꼴, 복숭아)을 복사하여 뒤집기와 돌리기 활동을 시켰고, 이동 후의 도형을 보고 어떠한 이동 과정을 거쳤는지 알아보는 지도를 집중적으로 하였다. 뒤집기 보충지도에서 자료를 제거한 후 내면화가 되었는지 알아보는 형성평가(연속된 모눈종이)에서 뒤집기를 한 도형 그리기에서는 2 명만이 오류가 있었고, 뒤집기의 결과를 알아보는 그림 찾기에서는 1 명만이 오류를 범하였다. 이 자료를 돌리기에서도 활용하였는데, 돌리기의 활동은 이해하였지만 도형 그리기에서는 뒤집기보다 더 많은 시간이 걸렸다. 아동은 자료가 제거된 후의 돌리기는 여전히 어려움이 남아서 4 명의 아동이 180° 돌리기한 비대칭인 도형그리기에서 계속 오류를 범하였다. 도형의 대칭 단원을 지도하기 전에 위의 문항지 B형과 거의 비슷한 테스트에서는 180° 회전에서 2 명만이 오류를 범하였다.

5-나 단계 '도형의 대칭' 단원에서 아동이 쉽게 유발하는 오류를 살펴보기 위해 단원 학습 후에 수학 익힘 책의 단원평가 위주로 하였다. 아동은 생활에서 경험에 의해 생성된 선대칭도형 완성하기, 대칭축 찾기, 간단한 선대칭의 위치에 있는 도형 그리기

는 28 명(90.3%)이 성공하였다. 선대칭도형에서 대칭축이 첨가되어 대응점을 이은 선분과 대칭축이 수직 이등분되는 성질을 잘 알고, 이를 이용하여 선대칭이 되는 도형을 27 명(87.1%)이 잘 나타내었다. 그러나 선대칭의 위치에 있는 다소 복잡한 도형을 그릴 때에는 2 명이 직관적으로 주어진 도형을 인식한 상태로 [그림 10]과 같이 선대칭도형이 아닌 평행 이동한 도형을 그리거나, [그림 11]과 같이 4 명이 선대칭의 모양은 맞지만 두 대응점이 대칭축으로부터 같은 거리에 있지 않도록 그렸다. 이는 선대칭도형의 성질인 대응점을 이은 선분이 대칭축과 수직 이등분되는 관계를 간과한 것이다.



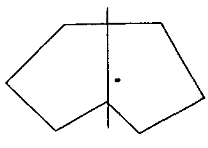
[그림 10] 잘못된 선대칭이동



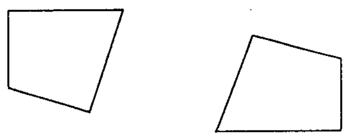
[그림 11] 잘못된 선대칭이동

한편, 점대칭도형에서 대칭의 중심이 첨가된 사실과 이 도형은 대응점을 이은 선분이 대칭의 중심에 의해 이등분된다는 성질을 이해해야 한다. 아동은 이러한 성질을 알고는 있지만 점대칭도형의 완성, 대칭의 중심 찾기, 점대칭의 위치에 있는 도형 그리기에는 각각 3 명, 2 명, 5 명이 오류를 범함으로써 오류가 선대칭보다 훨씬 더 많이 발생하였다. 특히, 점대칭도형의 완성이나 대칭의 중심 찾기보다는 점대칭의 위치에 있는 도형그리기에서 8 명이 잘못 그린 것으로 이 부분에 더 많은 어려움을 느끼고 있었다.

점대칭도형에서 대칭의 중심 찾기는 대응점을 이은 선분들의 교점으로 잘 학습되었으나 점대칭도형 완성하기에서는 [그림 12]와 같이 선대칭도형의 학습내용이 고착되어 점대칭도형을 완성할 때 작용하여 주어진 도형의 나머지를 선대칭도형으로 그리면서 대칭의 중심을 지나는 대칭축을 그리는 아동이 3 명이었다. 점대칭의 위치에 있는 도형 그리기는 5명의 아동이 도형을 전혀 그리지 못하였고, 4명의 아동이 선대칭의 위치에 있는 도형을 그렸다. 또, [그림 13]과 같이 대응점을 이은 선분들이 대칭의 중심에 의해 모두 이등분되도록 그리지 않고, 어느 특정한 한 대응점의 위치만을 정하여 주어진 도형의 모양과 합동이 되도록 그리는 아동이 6 명이었다. 이는 점대칭의 위치에 있는 도형의 성질을 잘 이해하고 있지 못하기 때문이다.



[그림 12] 잘못된 점대칭



[그림 13] 잘못된 점대칭이동

본 연구에서 선대칭과 점대칭의 학습오류를 줄이기 위해 선대칭의 지도에서부터 정확한 개념을 숙지시키고, 정확하게 도형을 그리는 체계적인 지도가 이루어져야 한다는 것을 깨달았다. 그래서 선대칭도형의 지도에서부터 대응점과 대칭축과의 관계를 충분히 고려하여 대칭인 도형을 그리도록 하고, 반드시 확인하도록 하였다. 확인방법은 투명한 OHP필름에 유성 펜으로 주어진 도형을 그리고 대칭축을 중심으로 뒤집기를 해 보고, 그 다음에 대응점을 이은 선분이 대칭축과 수직으로 만나는지, 대응점에서 대칭축까지의 거리가 같은지를 확인하도록 한다. 이는 기하 판에서 고무줄을 거는 조작으로 선대칭도형 완성하기를 충분히 연습한 다음에 그 사실을 모눈종이에 옮기게 하는 것이다.

점대칭의 지도도 선대칭도형의 지도에서와 같은 방법으로 이루어져야 한다. 점대칭도형 완성하기나 점대칭의 위치에 있는 도형 그리기에서 점A의 대응점 A′을 찾을 때 반직선 OA에서 선분 OA의 길이와 선분 OA′의 길이가 같아지는 점A′을 찾도록 하고, 이때, 기하 판에서는 대응점을 이은 선분의 기울기를 생각하며 대응점을 찾아야 한다.

4. 맺음말

우리는 자신의 신체나 주변의 사물 등에서 점대칭도형보다는 선대칭도형을 쉽게 접할 수 있다. 또한 '대칭'이란 용어가 일상생활에서 '좌우대칭, 상하대칭' 등으로 널리 사용됨으로써 점대칭도형보다는 선대칭도형에 익숙해져 있다. 그리하여 5학년 아동은 도형의 대칭을 학습하기 이전에 직관적으로 선대칭도형을 더 잘 인식하고 있으며, 이미 완성된 점대칭도형을 이해하지 못하거나 선대칭도형처럼 대칭이 되도록 완성하려는 경향이 있었다.

아동의 오류를 최소화하기 위한 도형의 대칭 지도는 2, 3학년의 강체운동부터 5학년 도형의 합동에 이르기까지 선수학습 요소들을 정확히 지도해야한다. 2학년 실생활에서 '옮기기, 뒤집기, 돌리기'의 도입은 Brousseau의 수학적 개념의 발달단계의 원시수학적 개념에 해당되지만 인형을 뒤집는 활동이 단순히 생활에서 물건을 뒤집는 활동으로 도입되어 아동의 활동을 강조한 나머지 강체운동의 의미가 변질될 우려가 있다. 3학년에서 모눈판에서 도형의 이동은 범수학적 개념지도 단계에 해당되지만, 모눈종이 자체가 연속되지 않았기 때문에 모눈종이 위에서 강체운동이 아니라 모눈종이가 먼저 이동하고 그 이동한 모눈종이의 위치에 도형을 놓는 것으로 도형을 그렸다. 이는 모눈판에서 도형의 강체운동이 분리된 모눈판 자체의 이동으로 5학년 대칭에서 선대칭과 점대칭의 성질을 이해하는데 어려움을 주기 때문이다. 이는 학습된 개념이 5학년 도형의 대칭에서 정확한 수학적 개념을 형성하는데 인식론적 장애로 작용하는

것으로 본다. 그래서 본 연구자는 문항지 B형과 같이 더 연속된 모눈판이나 점판에서 강체운동을 지도할 것을 권고한다.

교사는 도형의 대칭을 지도하기 위해 선수학습 요소인 강체운동과 도형의 합동에 대한 위계성을 이해하고 아동에게 개념간의 연결을 지도해야한다. 아동은 강체운동이나 대칭이 합동변환임에도 합동에 대한 이해의 부족과 이동후의 도형이 처음 도형과 합동이 되어야한다는 사실을 간과하는 경향이 있다. 강체운동에서는 처음 도형과 이동 후의 도형에서 변하는 것과 변하지 않는 것을 명확히 지도해야 한다. 또한 도형의 합동에서 학습한 합동인 도형 만들기, 합동인 도형의 성질, 합동인 도형 그리기 등이 강체운동과 연계되어 강체운동 전후의 도형의 모양이 합동과 어떻게 관련이 있는지를 밝히도록 해야 한다.

우리나라 새로운 교육과정 개정 시안은 강체운동을 3학년에서 도입하여 학습량 감축과 난이도를 조절하였으며, 3 학년 거울반사는 5학년 도형의 대칭과 통합되어 지도하도록 구성되어있다([10]). 이는 제 7차 교육과정보다는 강체운동과 대칭 지도의 수학적 개념에 대한 전개가 나선형 교육과정 지도원리에 맞추어져있지만 교과서에서 구체적으로 어떻게 내용을 구성하느냐가 관건이 될 것이다. 또한 아동의 발달단계에 적합하고 수학적 개념간의 연결이 잘 될 수 있는 지도방안이 계속적으로 연구되기를 기대한다.

참 고 문 헌

1. 김민경, 테셀레이션을 이용한 초등수학의 도형과 규칙성의 연계 지도, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> 제 1호, 1-11(2001).
2. 김영선, 공간감각 학습과정에서 초등학생이 보이는 오류 유형 및 원인 분석, 전주교육대학교 교육대학원 석사학위 논문(2005).
3. 김용태, 신봉숙, 초등학교에서의 군 개념 지도에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> 제 1호, 43-56(2003).
4. 김은주, 초등학교 5학년 아동의 대칭성을 이용한 군성체 형성에 관한 연구, 광주교육대학교 교육대학원 석사학위 논문(2005).
5. 김재형, 기하학의 대칭군에 관한 연구, 홍익대학교 교육대학원 석사학위 논문(2004).
6. 유클리드, 이무현 역, 기하학원론, 교우사, 2002.
7. 이종우, 기하학의 역사적 배경과 발달, 경문사, 1999.
8. 이중권, 세계 여러 나라의 수학교육과정, 경문사, 2002.
9. 정혜련, 도형 움직이기의 학습-지도에 관한 연구, 청주교육대학교 교육대학원 석사학위 논문(2004).

10. 최승현, 수학과 교육과정 개정 시안 연구, 대한수학교육학회 수학교육학논총 제 29 집, p. 39-61(2006).
11. 한기완, 공간감각의 개념 분석 및 교수-학습 방안 탐색, 한국수학교육학회 시리즈 C <초등수학수학교육> 제5권 제 1 호, p. 55-69(2001).
12. 칼 B 보이어, 유타 C. 메르츠바흐, 양영오, 조윤동 역, 수학의 역사 상·하, 경문사, 2000.
13. Billstein R., Libeskind S., Lott J. W., *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*, Pearson Education, Inc, 2004.
14. Eves H. 허민, 오혜영 역, 수학의 기초와 기본 개념, 경문사, 2002.
15. Farmer D. W., *Groups and Symmetry: a guide to discovering mathematics*, American Mathematical Society, 2001.
16. Foresman S., Wesley A., *Mathematics 1~6*, Pearson Educations, Inc, 2005.
17. Freudenthal H., *Mathematics as an Educational task*, Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Co, 1973.
18. NCTM. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, the NCTM, Inc, 1989.
19. Rosen J., *Symmetry Discovered : concepts and applications in nature and science*, Dover Publications, Inc, 1998.

On symmetry of figures in elementary geometry

Dept. of Math. Education, Dankook University **Gil Jun Han**
Graduate School of Math. Education, Dankook University **Bong Sook Shin**

In this paper, we study the symmetry of figures in elementary geometry. First, we investigate the historical and mathematical background of symmetry of figures and we explore the suitable teaching and learning methods for symmetry in elementary geometry. Also we study the major problem of geometry education that occurring in elementary school.

Key words: symmetry, figure, rigid motion, translation, rotation, reflection.

2000 Mathematics Subject Classification: 01A05, 01A72

논문 접수 : 2007년 2월 심사 완료 : 2007년 4월