

안경테 다리의 탄성변형에 관한 모델

김대수

서울산업대학교 안경광학과

(2006년 11월 13일 받음, 2006년 12월 17일 수정본 받음)

두께 및 폭이 균일하지 않고 경사진 한 끝이 고정된 단면이 직사각형인 안경테 다리의 자유단에 수직 힘이 작용하는 경우 탄성체 내 모든 점에서 변위 및 접선 기울기의 연속, 구부림 모멘트의 연속, 전단력의 연속 등 법칙에 근거하여 이러한 불균일 안경테 다리의 변위를 이론적으로 구하는 방정식(모델)을 수립하였다. 베타 티탄테 다리의 변형에 대한 실제 측정값과 유도한 이론식에 의한 예측 계산 값을 통계적으로 비교한 결과 상관계수 0.992 및 카이검정 결과 $p=0.999$ 로 서로 잘 부합되는 것을 알 수 있었다. 따라서 유도한 모델에 의해 다리의 탄성을 및 두께 폭과 같은 형상 변화에 따른 다리의 변형과 작용하는 힘(압력)의 크기 및 변화가 예측 가능하다. 안경테 다리의 두께 변화에 따른 다리 변형을 모사(simulation)하였다.

주제어: 모멘트, 탄성률, 2차모멘트, 전단력

I. 서론

안경 착용자들이 안경테에 관련하여 경험하는 불편한 점들로서는 “땀이 날 때 안경이 잘 흘러내린다”, “오래 착용하면 코의 측면에 자국이 남는다”, “안경테에 의한 측두부 및 귀바퀴 압박감이 심하다”, “안경테에 변형이 잘 일어난다” 등등을 나열할 수 있을 것이다. 안경테에 관한 문제점을 해결하기 위해 시행 착오식 개선을 시도하는 경우, 즉 안경테의 어떤 부분을 개선하면 그것은 다른 부분에 또 다른 문제점을 야기시킬 것이다. 예를 들면 다리를 조이거나 마찰계수가 큰 코 pad를 사용하면 잘 흘러내리지는 않겠지만 측두부 및 코의 압박감은 오히려 증가할 것이다.

따라서 착용감이 편안한 안경테를 디자인하기 위

해서는 렌즈가 장착된 안경테가 착용 중 각 부위별로 어떻게 힘(압력)이 분산되어야 하는가를 해석하고 그 결과에 따라 안경테를 설계해야 할 것이다. 착용에 영향을 미치는 여러 요소 중에서 안경을 직접적으로 지탱시켜 주는 탄성력을 제공하는 것은 다리이다.

다시 말해서 착용감은 일차적으로 다리의 탄성에 의해 결정된다고 할 수 있을 것이다. 즉 탄성체 다리에 힘이 작용하면 변형이 발생하고, 변형을 시키면 다리에는 복원력이 발생하게 된다. 따라서 다리에 작용하는 힘과 변형의 관계를 예측할 수 있는 함수를 찾아낸다면 시행착오 없이 다리의 설계가 용이해리라 본다. 이러한 다리의 탄성은 소재의 영률(Young's modulus), 단면 형상, 길이, 두께 등 요소에 의해 결정될 것이다. 2000년도에 발표한 논문^[1]에서는 균일한 굵기의 다리에 힘이 작용하는 경우에

대하여 여러 요소와 다리의 변형을 예측할 수 있는 방정식이 소개되었다.

실제로는 안경테 제조회사들의 제품은 탄성력 조절 및 외관 등 이유로 다리의 두께 및 폭이 균일하지 않고 tapered 된 경우가 대부분이다. 따라서 본 논문에서는 두께 및 폭이 균일하지 않고 tapered 되어 있는 한 끝이 clamped 고정된 단면이 직사각형인 안경테 다리의 자유단에 수직 힘이 작용하는 경우에 대하여, 변위를 이론적으로 구하는 방정식(모델)을 수립하였다. 이론의 근거는 탄성체 내 모든 점에서 변위 및 접선 기울기, bending 모멘트, 전단력 등은 연속이라는 법칙에 있으며 따라서 매질의 조건이 다른 탄성체 내 경계면에 이 법칙을 적용하여 수립한 방정식의 상수를 결정하여 다리의 변위를 설명하는 방정식들을 완성할 수 있었다. 이 변위 예측 모델에 영율, 두께, 폭, 단면 형상 등의 요소를 대입하면 다리의 변위 profile을 예측할 수 있기 때문에 실제 다리를 제조하는데 도움이 되리라 여겨진다.

한 가지 아쉬운 것은 본 연구의 모델은 단일 재질로 구성된 다리를 다루고 있지만 실제로는 금속에 플라스틱이 덧씌워진 복합소재가 많이 사용되고 있다는 점이다. 앞으로 이러한 복합 소재 다리에 대해 이론을 확장할 계획이다.

II. 이론 전개

한쪽 끝이 반쪽경첩(half joint; hinge)에 의해 고정되어 있는 안경테 다리에 힘이 작용하면 안경테 다리는 탄성으로 인해 구부림(bending)이 발생한다. 편의상 안경테다리를 막대라고 부르기로 한다. Fig. 1에서와 같이 막대의 다른 끝에 힘이 작용하는 경우를 살펴본다. 경첩으로부터 임의의 위치를 x , 이 위치에서 발생하는 구부림 모멘트(bending moment)를 M , 미소 절편을 dx , 작용하는 힘을 F 라고 정의하면 막대의 임의의 위치 x 에서의 수직변위 $y(x)$ 는 식 (1~5)로부터 도출된다. 이에 대한 자세한 유도과정은 앞서 발표한 논문^[1]에 기술되어 있다.

$$E(x)I(x) \frac{d^2y}{dx^2} = -M(x) \quad (1)$$

$$Q = -\frac{dM(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(E(x)I(x) \frac{d^2y}{dx^2} \right) \quad (2)$$

여기서 $E(x)$ 는 막대의 탄성율(Young율), $I(x)$ 는 막대단면의 중심축에 대한 2차 모멘트로서 단면형상이 두께 d , 폭 w 의 직사각형이면 $I(x)$ 는 식 (3), 직경이 D 인 원형이면 식 (4)와 같은 값을 가진다^[2]. Q 는 막대의 임의의 위치에서 구부림에 의해 야기되는 전단력(shearing force)을 가리킨다.

$$I(x) = \frac{1}{12} d^3w \quad (3)$$

$$I(x) = \frac{\pi D^4}{64} \quad (4)$$

막대의 임의의 위치 x 에서 미소 절편 dx 에 작용하는 전단력의 순힘(net force) Q 는 식 (2)로부터 구해지며 평형상태에서는 0이므로 (5)가 성립한다^[3,4]

$$-\frac{dQ}{dx} = -\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I(x) \frac{d^2y}{dx^2} \right) = 0 \quad (5)$$

이제 막대의 구부림에 따른 수직변형을 나타내는 미분방정식 식 (5)에 제반 경계조건을 적용하며 $y(x)$ 를 구한다.

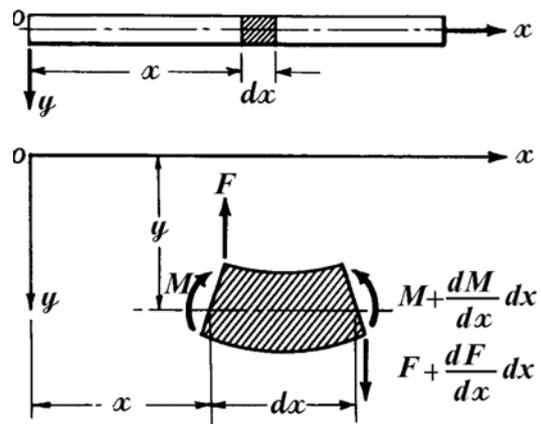


Fig. 1. Bending moment and shear forces in the temple bar.

이미 발표한 논문^[1]에서는 단면 형상이 일정한 안경테 다리에 힘이 작용하는 경우 식 (5)에 적절한 경계조건을 부여하여 그 해를 구하여 구부림 변형을 해석하였다. 아울러 두께는 균일하지만 단면 형상이 길이 방향에 따라 변하는 경우의 다리 변형에 대한

방정식도 유도하였다. 실제로는 다리의 구부림 변형은 두께에 의해 크게 영향을 받기 때문에 본 논문에서는 두께가 균일하지 않은 다리에 대한 구부림 변형을 다루고자 한다.

1. 단면적 및 폭이 균일한 다리의 변형

Fig. 2에서와 같이 폭 및 두께가 균일한 다리의 자유단에 힘 F 가 작용하여 구부림 변형이 발생하는 경우 다리의 위치 x 에 따른 수직변위 y 에 대한 일반 해는 이미 발표한 바와 같이 식 (5)로부터 (6)과 같은 선형 3차 방정식으로 구해진다^[1].

$$y(x) = \frac{1}{6EI} (3Lx^2 - x^3) \quad (6)$$

여기서 다리의 폭 및 두께가 균일하므로 E 및 I 는 상수로 취급하며 L 은 다리의 길이를 가리킨다.

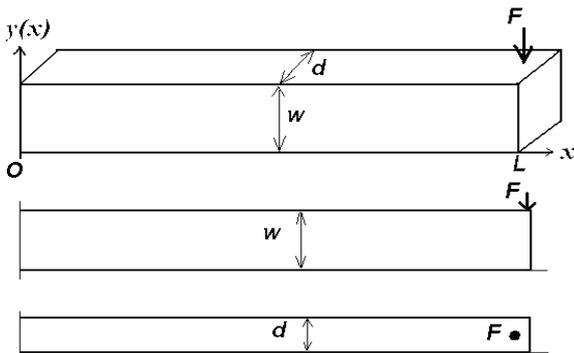


Fig. 2. Cantilever temple beam with concentrated load at the free end. Top: Perspective view Middle: Side view Bottom: Top view.

2. 두께가 길이 방향으로 불연속적인 2개의 영역, 폭이 불연속적인 2개의 값과 연속적으로 감소하는 중간 영역으로 이루어진 다리의 변형^[3,4]

두께 및 폭이 길이 방향으로 Fig. 3과 같이 축 0에서 가까운 부분($0 \sim L_1$)은 균일하고 가운데 부분($L_1 \sim L_2$)은 두께는 일정하지만 폭이 직선형으로 감소하고 끝부분($L_2 \sim L$)은 다시 두께 및 폭이 균일한 다리의 자유단(free end)에 힘 F 가 작용하여 bending

이 발생한다고 가정한다. 편의상 다리를 3개의 영역; 즉 ($L_1 \sim L_2$)을 I, ($L_1 \sim L_2$)를 II, ($L_2 \sim L$)을 III으로 정의한다. 식 (5)로부터 영역 I 및 III에서의 일반해는 (7) 및 (8)로 기술할 수 있다.

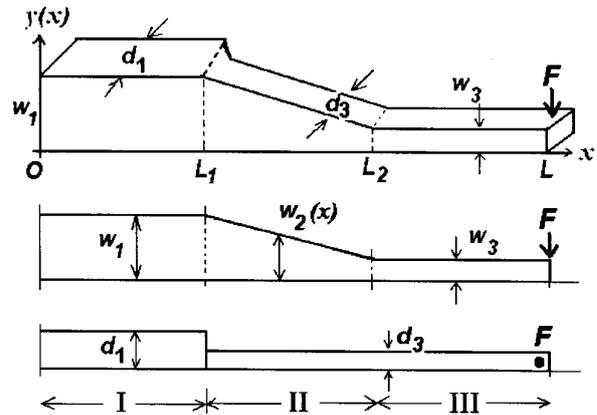


Fig. 3. Cantilever temple having 2 discrete and varying moments of inertia in-between with the concentrated load at the free end.

Top: Perspective view Middle: Side view
Bottom: Top view

$$I : 0 \leq x \leq L_1;$$

$$y_{1(x)} = \frac{1}{E_1 I_1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \quad (7)$$

$$III : L_2 \leq x \leq L ;$$

$$y_{3(x)} = \frac{1}{E_3 I_3} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) \quad (8)$$

여기서 E_1, E_2, E_3 는 상수로서 각 영역의 탄성율, I_1 및 I_3 는 상수로서 I 및 III 영역의 2차 모멘트를 가리킨다. 영역 II ($L_1 \leq x \leq L_2$)에서는 I_2 의 값이 상수가 아니므로 $y_2(x)$ 는 식 (9)로부터 구한다.

$$-\frac{d}{dx} \left(I_2(x) E_2 - \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} \right) = 0 \quad (9)$$

여기서 E_2 는 상수로서 각 영역의 탄성율을 가리킨다. I 값은 (3)과 같이 다리의 폭 w 에 비례하므로 $I_2(x)$ 는 (10)로 표현이 가능하다^[1, 2].

$$I_2(x) = m - nx \quad (10)$$

$$x=L_1; I_2(x) = I_1 = 1/12 d_1^3 w_1^{[1]}$$

$$x=L_2; I_2(x) = I_3 \text{을 식 (10)에 대입하면 상수 } m$$

및 n 이 (11), (12)로 구해진다.

$$m = \frac{-I_3(L_2 - L_1 - 1) + 1/12 d^3 w_1}{(L - L_1)} \quad (11)$$

$$n = \frac{-1/12 d^3 w_1 - I_3}{L_2 - L_1} \quad (12)$$

식 (7)~(10)의 상수 $a_0, a_1, a_2, \dots, c_0, c_1, c_2, \dots, m, n$ 및 함수, $y_2(x)$ 는 식 (13)~(17)의 경계 조건을 적용하여 아래와 같이 구한다^[5-7].

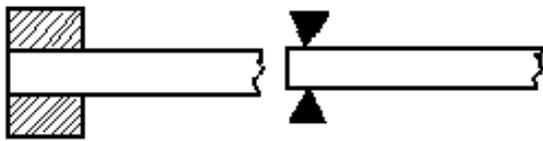


Fig. 4 The shape of edge. Left: Clamped. Right : Supported edge

2.1 $x=0$ 에서 경계조건

힌지(hinge; half joint)에서 다리의 끝은 Fig 4의 왼쪽과 같이 clamped되어 있기 때문에 변형이 발생하는 경우에 변위 및 접선 기울기가 식 (13) 및 (14)와 같이 항상 0이다.

$$x=0 ; \quad y_1=0 \quad (13)$$

$$x=0 ; \quad \frac{dy_1}{dx} = 0 \quad (14)$$

$x=0$ 에서 전단력 Q 는 다리의 다른 끝에 작용 하는 힘 F 와 평형을 이루어야 하므로 식 (15)가 성립한다.

$$Q = \frac{dM(x)}{dx} = -F \quad (15)$$

2.2 $x = L_1$ 에서 경계조건

Fig. 3의 $x=L_1$ 에서 변위 $y(x)$ 및 접선 기울기는 연속이어야 하므로 식(16)과 (17)이 성립한다.

$$x = L_1 ; \quad y_1(L_1) = y_2(L_1) \quad (16)$$

$$x = L_1 ; \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} \quad (17)$$

$x=L_1$ 에서 bending moment의 값도 연속이어야

하므로 (18)과 같은 조건이 성립한다.

$$x=L_1 ; \quad E_1 I_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = E_2 I_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} \quad (18)$$

$x=L_1$ 경계면의 좌우 전단력은 서로 크기는 같고 힘의 방향이 반대이므로 식 (19)와 같은 조건이 만족되어야 한다.

$$x = L_1 ; \quad E_1 I_1 \frac{d^3 y_1}{dx^3} + E_2 \frac{d}{dx} \left(I_2(x) \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right) = 0 \quad (19)$$

2.3 $x = L_2$ 에서 경계조건

$x = L_2$ 에서 경계조건은 근본적으로 $x=L_1$ 에서 조건과 동일하므로 식 (20)~(23)이 성립한다.

$$x = L_2 ; \quad y_2(L_2) = y_3(L_2) \quad (20)$$

$$x=L_2 ; \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{dy_3}{dx} \quad (21)$$

$$x=L_2 ; \quad E_2 I_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = E_3 I_3 \frac{d^2 y_3}{dx^2} \quad (22)$$

$$E_2 \frac{d}{dx} \left(I_2(x) \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right) + E_3 I_3 \frac{d^3 y_3}{dx^3} = 0 \quad (23)$$

2.4 $x = L$ 에서 경계조건

다리의 자유단, $x = L$ 에서는 다리에 수직으로 힘 F 가 작용하기 때문에 축 $x=0$ 에 대해 회전모멘트 (FL)가 발생한다. 따라서 식 (24)와 같은 경계조건이 설정된다.

$$x=L ; \quad E_3 I_3 \frac{d^2 y_3}{dx^2} = FL \quad (24)$$

이제 식 (13)~(24)로 표현되는 조건을 다리의 변위를 나타내는 식 (7)~(9)에 적용하여 각 영역의 변위를 나타내는 방정식의 계수(상수)의 값을 결정한다.

2.5 $x = L_1$ 에서 경계조건 적용

$x=0$ 에서 (13)을 (7)에 대입 하면 $a_0=0$ 이 구해진다. 식 (7)의 1차 미분한 식 (25)에 경계조건 (14)를 대입하면 $a_1=0$ 이 얻어진다.

$$-\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{E_1 I_1} (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2) \quad (25)$$

이제 영역 I의 다리 변위방정식은 (26)로 간결해진다.

$$y_1(x) = \frac{1}{E_1 I_1} (a_2 x^2 + a_3 x^3) \quad (26)$$

(26)을 (2)에 대입하여 $x=0$ 에서 전단력 식을 구하고 이 힘은 다리의 자유단에 가한 F 와 평형을 이루어야 하므로 (27)이 성립한다.

$$E_1 I_1 \frac{d^3 y_1}{dx^3} = 6 a_3 = -F \quad (27)$$

$a_3 = -1/6 F$ 로 결정되고, 이제 a_2 값만 결정되면 영역 I의 변위식은 완성될 것이다.

2.6 전단력의 연속

$x = L_1$ 에서 (19)에 (26)을 적용한 후 (27)의 값을 대입하면 식 (28)이 얻어진다.

$$E_2 \frac{d}{dx} \left(I_2(x) \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right) = E_1 I_1 \frac{d^3 y_1}{dx^3} = F \quad (28)$$

식 (28)에 (10)을 대입하고 정리하면 y_2 를 구할 있는 식 (29)가 도출된다.

$$-\frac{d}{dx} \left((m-nx) \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right) = \frac{F}{E_2} \quad (29)$$

식 (29)를 연속적으로 적분하면 식 (30)~(32)이 구해진다.

$$-\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{Fx + b_1}{E_2(m-nx)} \quad (30)$$

$$-\frac{dy_2}{dx} = -\left(\frac{F}{nE_2} \right) x - \left(\frac{Fm + nb_1}{n^2 E_2} \right) \ln(m-nx) + b_2 \quad (31)$$

$$y_2(x) = -\frac{F}{2nE_2} x^2 + \left(\frac{Fm + nb_1}{n^2 E_2} \right) \left(x + \left(\frac{-m}{n} - x \right) \ln(m-nx) \right) + b_2 x + b_3 \quad (32)$$

여기서 b_1, b_2, b_3 는 적분상수를 가리킨다.

2.7 변위 및 접선기울기의 연속

경계조건 (16)을 (26), (32)에 적용하면 (33)이 유도된다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_1^2}{E_1 I_1} \right) a_2 + \left(\frac{L_1^3}{E_1 I_1} \right) a_3 &= p_1 + p_2 b_1 + L_1 b_2 + b_3 \\ p_1 &= -\left(\frac{F}{2nE_2} \right) L_1^2 \\ &+ \left(\frac{Fm}{n^2 E_2} \right) \left(L_1 + \left(\frac{-m}{n} - L_1 \right) \ln(m-nL_1) \right) \\ p_2 &= \left(\frac{1}{nE_2} \right) \left(L_1 + \left(\frac{-m}{n} - L_1 \right) \ln(m-nL_1) \right) \end{aligned} \quad (33)$$

경계조건 (17)을 (25), (26)에 적용하여 (34)를 얻는다($a_1=0$).

$$\begin{aligned} \left(\frac{2L_1}{E_1 I_1} \right) a_2 + \left(\frac{3L_1^2}{E_1 I_1} \right) a_3 &= p_3 + p_4 b_1 + b_2 \\ p_3 &= -\left(\frac{F}{nE_2} \right) L_1 - \frac{Fm}{n^2 E_2} \ln(m-nL_1) \\ p_4 &= -\frac{1}{nE_2} \ln(m-nL_1) \end{aligned} \quad (34)$$

2.8 bending 모멘트의 연속

경계조건 (18)을 (26), (30)에 적용하면 (35)가 구해진다.

$$\begin{aligned} 2a_2 + 6L_1 a_3 - p_6 b_1 - p_5 &= 0 \\ p_5 &= \frac{1}{12} \frac{d^3 w_1 L_1 F}{(m-nL_1)} \\ p_6 &= \frac{1}{12} \frac{d^3 w_1}{(m-nL_1)} \end{aligned} \quad (35)$$

이제 $x = L_2$ 에서 경계조건을 적용하여 방정식 (7), (8), (30)의 상수를 결정한다.

2.9 $x = L_2$ 에서 변위 및 접선기울기의 연속

경계조건 (16)을 II, III 영역의 변위 식 (8), (30)에 적용하면 (36)식이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 p_7 + p_8 b_1 + b_2 L_2 + b_3 &= \frac{1}{E_3 I_3} (c_0 + c_1 L_2 + c_2 L_2^2 + c_3 L_2^3) \\
 p_7 &= -\frac{FL_2^2}{2nE_2} + \frac{Fm}{E_2 n^2} \left(L_2 + \left(\frac{-m}{n} - L_2 \right) \ln(m - nL_2) \right) \\
 p_8 &= \frac{1}{E_2 n} \left(L_2 + \left(\frac{-m}{n} - L_2 \right) \ln(m - nL_2) \right) \quad (36)
 \end{aligned}$$

II, III 영역 변위의 1차 미분 식 (31), (37)에 경계 조건 (17)을 적용하면 (38)이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_3}{dx} &= \frac{1}{E_3 I_3} (c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2) \quad (37) \\
 p_9 + p_{10} b_1 + b_2 &= \frac{1}{E_3 I_3} (2c_1 L_2 + 3c_2 L_2^2) \\
 p_9 &= -\frac{FL_2}{nE_2} - \frac{Fm}{E_2 n^2} \ln(m - nL_2) \\
 p_{10} &= -\frac{1}{nE_2} \ln(m - nL_2) \quad (38)
 \end{aligned}$$

2.10 $x = L_2$ 에서 bending 모멘트의 연속

II, III 영역 변위의 2차 미분식(30) 및 (39)에 경계조건 (18)을 적용하면 (40)이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 y_3}{dx^2} &= \frac{1}{E_3 I_3} (2c_2 + 6c_3 x) \quad (39) \\
 p_{11} + p_{12} b_1 &= 2c_2 + 6L_2 c_3 \\
 p_{11} &= \frac{I_3 F L_2}{(m - nL_2)} \\
 p_{12} &= \frac{I_3}{m - nL_2} \quad (40)
 \end{aligned}$$

2.11 $x = L_2$ 에서 전단력의 평형

II 영역의 전단력을 나타내는 식 (29) 및 III 영역 전단력 (41)에 평형조건을 적용하면 식 (42)이 도출된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3 y_3}{dx^3} &= \frac{1}{E_3 I_3} (6c_3) \quad (41) \\
 6c_3 + F &= 0 \quad (42)
 \end{aligned}$$

2.12 $x = L$ 에서 모멘트

자유단에서 모멘트는 다리에 가한 힘 F 에 기인하므로 경계조건 (24)를 (39)에 적용하면 (43)이 얻어진다.

$$2c_2 + 6Lc_3 = FL \quad (43)$$

다리 변위를 나타내는 식을 다시 정리하면 (42~51)과 같으며 연립방정식의 해로부터 변수 a_i, b_i 및 c_i ($i = 0, 1, 2, 3$)를 구한다.

$$6c_3 + F = 0 \quad (42)$$

$$2c_2 + 6Lc_3 = FL \quad (44)$$

$$p_{11} + p_{12} b_1 = 2c_2 + 6L_2 c_3 \quad (45)$$

$$a_3 - \frac{1}{6} F = 0 \quad (46)$$

$$2a_2 + 6L_1 a_3 - p_6 b_1 - p_5 = 0 \quad (47)$$

$$\left(\frac{2L_1}{E_1 I_1} \right) a_2 + \left(\frac{3L_1^2}{E_1 I_1} \right) a_3 = p_3 + p_4 b_1 + b_2 \quad (48)$$

$$\left(\frac{L_1^2}{E_1 I_1} \right) a_2 + \left(\frac{L_1^3}{E_1 I_1} \right) a_3 = p_1 + p_2 b_1 + L_1 b_2 + b_3 \quad (49)$$

$$p_9 + p_{10} b_1 + b_2 = \frac{1}{E_3 I_3} (2c_1 L_2 + 3c_2 L_2^2) \quad (50)$$

$$p_7 + p_8 b_1 + b_2 L_2 + b_3 = \frac{1}{E_3 I_3} (c_0 + c_1 L_2 + c_2 L_2^2 + c_3 L_2^3) \quad (51)$$

제일 먼저 (42)의 해를 바로 다음 식 (43)에 대입하여 c_2 를 구하고 이 값을 다음 식에 대입 하면 b_1 이 결정되는 방식으로 계산하면 순차적으로 계수의 값이 (52)식과 (58)식에 걸쳐서 결정된다.

$$a_3 = 1/6F, \quad c_3 = -1/6F, \quad c_2 = FL, \quad (52)$$

$$b_1 = \frac{2FL - FL_2 - p_{11}}{p_{12}} = p_{13} \quad (53)$$

$$a_2 = (p_5 + p_6 p_{13} + FL_1)/2 = p_{14} \quad (54)$$

$$b_2 = \frac{2L_1 p_{14}}{E_1 I_1} - \frac{L_1^2 F}{2E_1 I_1} - p_3 - p_4 p_{13} = p_{15} \quad (55)$$

$$b_3 = \frac{L_1^2 p_{14}}{E_1 I_1} - \frac{L_1^3 F}{6E_1 I_1} - p_1 - p_2 p_{13} - p_{15} L_1 = p_{16} \quad (56)$$

$$c_1 = (E_3 I_3)(p_9 + p_{10} p_{13} + p_{15}) - 2L_2 L F + \frac{1}{2} L_2^2 F = p_{17} \quad (57)$$

$$c_o = (E_3 I_3)(p_7 + p_8 p_{13} + L_2 p_{15} + p_{16}) - p_{17} L_2 - L L_2^2 F + \frac{1}{6} L_2^3 F \quad (58)$$

3. 두께 및 폭이 불연속적인 3개의 영역으로 이루어진 다리의 변형

두께 및 폭이 길이 방향으로 Fig. 5와 같이 축 O 에서 바깥으로 불연속적으로 감소하는 3개 부분으로 구성된 다리의 자유단(free end)에 힘 F 가 작용하여 bending이 발생한다고 가정한다. 이 경우에 대하여 영역 I, II, III의 다리 변형은 식 (5)로부터 식 (59~61)로 일반화 할 수 있다.

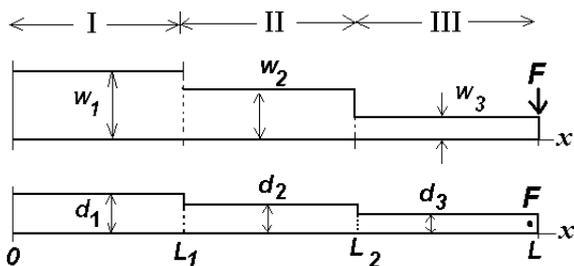


Fig. 5. Cantilever temple having 3 discrete moments of inertia with the concentrated load at the free end. Above: Side view Below: Top view

$$0 \leq x < L_1 ;$$

I

$$y_1(x) = \frac{1}{E_1 I_1} (a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \quad (59)$$

$$II: L_1 \leq x < L_2 ;$$

$$y_2(x) = \frac{1}{E_2 I_2} (b_o + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) \quad (60)$$

$$III: L_2 \leq x \leq L ;$$

$$y_3(x) = \frac{1}{E_3 I_3} (c_o + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) \quad (61)$$

앞에서와 유사한 방법으로 경계조건을 적용하여 상수 a_i, b_i, c_i ($i=0, 1, 2, 3$)를 결정한다.

3.1 $x=0$ 에서 경계조건 적용

앞서와 마찬가지로 $x=0$ 에서 다리는 clamp 고정되어 있으므로 변위 및 접선기울기 모두 0이다. 식 (59)에 식 (13)과 (14)를 적용하면 (62)이 얻어진다.

$$a_o = 0 ; a_1 = 0 \quad (62)$$

또한 이 위치에서 전단력은 다리의 자유단에 가한 힘 F 와 평형을 이루므로 경계조건 (15)를 (59)에 적용하면 (63)이 성립한다.

$$E_1 I_1 \frac{d^3 y_1(x)}{dx^3} = 6 a_3 = -F \quad (63)$$

(63)로부터 (64)가 계산된다.

$$a_3 = -\frac{1}{6} F \quad (64)$$

3.2 $x = L_1$ 에서 경계조건 적용

변위 및 접선기울기의 연속조건 $y_1 = y_2$ (16), $y_1' = y_2'$ (17) 및 이미 값이 구해진 상수 값을 (59~60)에 적용하면 식(65~67)이 구해진다.

$$\frac{1}{E_2 I_2} (b_o + L_2 b_1 + L_2^2 b_2 + L_2^3 b_3) = \frac{1}{E_3 I_3} (c_o + L_2 c_1 + L_2^2 c_2 + L_2^3 c_3) \quad (65)$$

$$\frac{1}{E_1 I_1} (L_1^2 a_2 - \frac{1}{6} L_1^3 F) = \frac{1}{E_2 I_2} (b_o + L_1 b_1 + L_1^2 b_2 + L_1^3 b_3) \quad (66)$$

$$\frac{1}{E_1 I_1} (2L_1 a_2 - \frac{1}{2} L_1^2 F) = \frac{1}{E_2 I_2} (b_1 + 2L_1 b_2 + 3L_1^2 b_3) \quad (67)$$

전단력의 평형 조건 (19)를 (59), (60)에 적용하면 (68)이 얻어진다.

$$E_1 I_1 y_1''' + E_2 I_2 y_2''' = 0 \quad (19)$$

$$a_3 + b_3 = 0 \quad (68)$$

또한 구부림(bending) 모멘트도 연속이므로 $E_1 I_1 y_1'' = E_2 I_2 y_2''$ (18)을 적용하면 식 (69)가 구해진다.

$$2a_2 + 6a_3 L_1 = 2b_2 + 6L_1 b_3 \quad (69)$$

3.3 $x = L_2$ 에서 경계조건 적용

$x = L_1$ 에서와 마찬가지로 방법을 적용하면 식 (70~73)이 구해진다.

$$(70)$$

$$\frac{1}{E_2 I_2} (b_1 + 2L_2 b_2 + 3L_2^2 b_3) = \frac{1}{E_3 I_3} (c_1 + 2L_2 c_2 + 3L_2^2 c_3) \quad (71)$$

$$2b_2 + 6L_2 b_3 = 2c_2 + 6L_2 c_3 \quad (72)$$

$$b_3 + c_3 = 0 \quad (73)$$

3.4 $x = L$ 에서 경계조건 적용

다리의 자유단에 가한 힘 F 에 의한 모멘트는 다리의 bending에 의해 야기되는 모멘트와 같아야 하므로 경계조건 (24)를 (61)에 적용하면 식 (74)가 얻어진다.

$$2c_2 + 6Lc_3 = FL \quad (74)$$

제일 먼저 (68)에 a_3 값(75)을 대입하면 b_3 값이 결정되며 이를 (73)에 대입하여 c_3 를 결정하고 (74)에 적용하여 c_2 를 구하고 (72)에서 b_2 가 결정되며 구한 값들을 (69), (67), (66), (71), (70)에 순차적으로 대입하여 나머지 상수 a_2, b_0, b_1, c_0, c_1 값을 결정한다.

$$a_3 = -1/6 F ; b_3 = 1/6 F ; c_3 = 1/6 F \quad (75)$$

$$c_2 = FL ; b_2 = (L - L_2) F \quad (76)$$

$$a_2 = (L + L_1 - L_2) \quad (77)$$

$$b_1 = F \left(\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 1 \right) (2LL_1 - 2L_1 L_2 + 1/2 L_1^2) + \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} L_1^2 F \quad (78)$$

$$b_0 = \frac{E_2 I_2 F}{E_1 I_1} ((L + L_1 - L_2) L_1^2 - 1/6 L_1^3) - L_1 b_1 - L_1^2 (L - L_2) F - 1/6 L_1^3 F \quad (79)$$

$$c_1 = \frac{E_3 I_3}{E_2 I_2} (b_1 + 2F(L - L_2)L_2 + 1/2 L_2^2 F) - 2FLL_2 + 1/2 FL_2^2 \quad (80)$$

$$c_0 = \frac{E_3 I_3}{E_2 I_2} (b_0 + L_2 b_1 + (L - L_2)F + 1/6 L_2^3 F) - L_2 c_1 - LFL_2^3 + 1/6 FL_2^3 \quad (81)$$

이제 두께 및 폭이 서로 다른 3가지로 구성된 다리의 자유단에 힘 F 를 가했을 때 길이 방향의 임의 위치 x 에서 y 방향의 bending 변위를 예측할 수 있는 식 (59~61)이 그 계수의 값이 (75~81)로 완성되었다.

이러한 다리의 종합적인 탄성계수 k 는 Hooke법칙으로부터 식 (82)로 표현할 수 있다[2].

$$k = \frac{F}{y_3(L)} = \frac{E_3 I_3}{c_0 + c_1 L + L^3 - 1/6 L^3} \quad (82)$$

III. 결과 및 고찰

Fig. 3에 묘사된 것과 같은 안경테 다리에 그 자유단에 힘이 작용하는 경우 재료의 탄성 때문에 발생하는 변형을 계산 및 예측하기 위하여 수립한 일련의 방정식의 타당성을 검증하기 위해 길이 12.5cm, 두께 1.235mm, 1.01mm, 폭 4.525mm, 1.47mm, Young을 $1.5 \times 10^{11} Pa$ 인 S사의 β 티타늄 안경테의 tapered 다리 자유단에 50g의 추를 달고 변형을 디지털 카메라로 측정, photoshop으로 계산한 다음 그 결과를 Fig. 6에 나타내었다.

다리의 변형을 계산할 수 있는 식 (7), (8), (32)에 실제 다리와 동일한 길이, 두께 및 폭에 관한 자료를 입력하고 Mathematica 프로그램^[8]으로 계산한 후 그 결과를 Fig. 6에 측정치와 비교하였다.

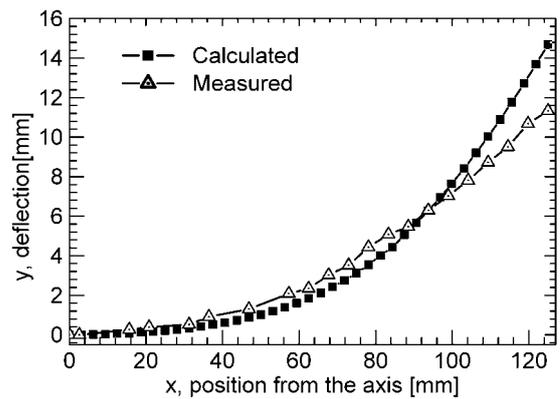


Fig. 6. Comparison between the measurement and the calculation in temple's deflection under the constant load of 0.5 N.

계산치와 실측치 사이의 상관계수(correlation coefficient), R^2 은 0.992; 두 데이터에 대한 카이

검정(chi-test)결과는 $p=0.999$ 로서 계산치와 실측치는 거의 일치한다고 할 수 있다. 따라서 앞에서 유도한 다리의 변형에 대한 방정식을 사용하여 다리의 두께 및 폭의 변화에 따른 변형 및 profile을 예측하여도 무리는 없을 것으로 본다.

Tapered 다리의 변형과 Fig. 2에서와 같이 두께 및 폭이 균일한 다리의 변형을 비교하기 위하여 식 (3), (6)에 두께 1.235mm, 폭 4.525mm, 길이 12.5cm, 영율 $1.5 \times 10^{11} Pa$ 을 입력하여 균일한 다리의 변형결과(B)를 구한 다음 Fig. 6에서 구한 자료(A)와 함께 Fig. 7에 plot 하였다. A와 B를 비교해보면 다리의 축 부근에서는 변형에 큰 차이를 보이지 않다가 가장자리 즉 tip 부근으로 갈수록 차이가 크게 벌어지는 것을 알 수 있다. Tip에서 tapered 다리의 변형은 균일한 다리 변형의 2.6에 달하는 것을 그림에서 알 수 있다. 다리 tip의 벌어짐은 안경 착용 시 측두부를 누르는 압력에 관계가 있다. 즉 Hooke 법칙, $F=kx$ 로부터 재료의 물성 및 tip에 작용하는 힘이 일정한 경우에 대하여 다리의 탄성 k 는 변형에 반비례하게 된다. 두께 및 폭이 균일한데 비해 가늘어 질수록 다리는 소프트하게 되어 벌어짐이 증가하는 것은 당연히 예측이 가능하지만 정량적으로 계산이 가능하므로 이 이론적 모델은 다리의 디자인에 참고가 될 수 있을 것으로 본다.

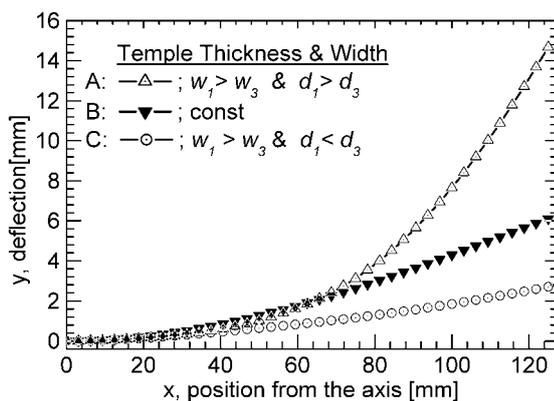


Fig. 7. Deflections of the temples under the constant load of 0.5 N varying thicknesses and widths.

Fig. 7의 C는 폭은 A와 동일하지만 다리의 바깥부분(영역 II, III)의 두께를 2배(2.47mm)로 변경하

였을 때 예상되는 다리의 변형 그래프이다. A에 비해 축 부근 변형은 크게 차이가 없지만 가장자리로 갈수록 변형차가 크게 벌어져 tip에서는 1/6로 감소하는 것을 알 수 있다.

안경테의 다리를 디자인하는 경우 먼저 측두부에 작용하는 힘 및 다리의 최대 변형을 설정한 다음 유도한 수식 프로그램을 이용하여 제반 변수를 결정하여야 보다 편안한 안경테를 구상할 수 있을 것으로 본다. 본 논문은 이에 기초가 되는 다리의 변형 예측에만 한정되어 있다. 실제로 다리를 피팅하는 경우에는 tip 사이의 간격이 정해지므로 따라서 다리의 변형이 정해지게 된다. Fig. 6의 다리 tip 최대 변위를 일정하게 두고 각각의 다리가 변형될 때 어떤 모양을 취하는가를 Fig.8에 나타내었다. 두께가 균일하거나(B) 가장자리가 더 두꺼운 다리(C)는 그 모양에 큰 차이가 보이지 않는다. 가장자리의 두께가 얇은 다리(A)는 B, C에 비해 축에서부터 가운데 부근까지는 별로 변하지 않다가 끝 부근에서 갑자기 변형이 증가하는 것을 알 수 있다. 이러한 다리의 profile은 얼굴 및 두개골의 형상에 따른 다리의 디자인 및 피팅에 참고가 될 것으로 보인다. 지금까지 고찰은 주로 tapered 다리(Fig. 3)에 대한 것으로서 두께 및 폭이 불연속적인 3개의 영역으로 이루어진 다리 (Fig. 5)의 변형은 전자와 유사할 것으로 예상되어 이론 방정식 수립에 국한 하였다.

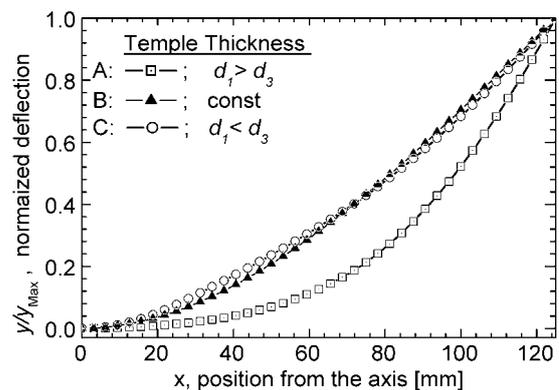


Fig. 8. Comparison of the normalized bending profiles among the temples under constant load of 0.5 N varying thickness and width.

IV. 결 론

두께 및 폭이 균일하지 않고 tapered된 한 끝이 clamped 상태의 안경테 다리의 자유단에 수직 힘이 작용하는 경우 재료 내 모든 점에서 변위 및 접선 기울기의 연속, bending 모멘트의 연속, 전단력의 연속 등의 원리에 근거하여 다리의 변위를 구하는 방정식을 유도하였다. 이러한 불균일 두께 및 폭의 베타 티탄테의 다리에 대한 측정치와 이론에 의한 계산치를 통계적으로 비교한 결과 상관계수 0.992, 카이검사 $p=0.999$ 로 서로 잘 부합되는 것을 알 수 있었다. 따라서 유도한 모델에 의해 다리의 탄성을 및 두께 폭과 같은 형상 변화에 따른 다리의 변형과 작용하는 힘(압력)의 크기 및 변화가 예측 가능하다. 유도한 모델을 사용하여 균일한 두께를 포함한 두께 변화에 따른 다리의 변위를 모사(simulation) 비교하였다.

참고문헌

- [1] 김대수, “안경테 및 의료용구에 관한 연구”, 한국안광학회지, 5(2):129-138(2000).
- [2] 김대수, “안경재료학”, 1판, 북스힐, 서울, pp. 13-20(2004).
- [3] Meirovitch L, “Analytical Methods in Vibrations”, Macmillan Pub. Co, NY, pp. 161-164(1967).
- [4] Kelly S, “Mechanical Vibrations”, McGraw-Hill, NY, pp.1-2(1997).
- [5] Symon K, “Mechanics”, 2nd Ed., Addison-Wesley, pp. 233-245(1965).
- [6] Kinsler L, “Fundamentals of acoustics”, 3rd Ed., John Wiley & Sons, pp. 70-76(1982).
- [7] Seto W. “Mechanical vibration”, McGraw-Hill, pp. 128-138(1997).
- [8] Stephen W, “Mathematica(Mathematics Software)” Part 3, Advanced Mathematics, Wolfram Media, Cambridge, (1996).

Model on the Elastic Deflection of Temple of the Spectacle Frame

Dae-Soo Kim

Department of Visual Optics, Seoul National University of Technology

(Received November 13, 2006; Revised manuscript received December 17, 2006)

Differential equations and their solutions were formulated to describe the deflection of the tapered, nonuniform thickness and width's temple, clamped at one end while the perpendicular force is acting on the other end which is freely suspended. The model was derived based on laws of continuity at every point inside the elastic medium that the deflection, tangent slope, bending moment, shearing force must be continuous within the medium. The model is found to be in good agreement with measurements on the beta titanium temple with the correlation 0.992 and $p=0.999$ (Chi test). Therefore it is possible to predict the effect of various temple parameters such as elastic modulus, thickness, width on the deflection of the temples being considered.

Key words: moment, modulus of elasticity, moment of inertia, shearing force