

완화된 안정도 조건을 갖는 강인한 디지털 퍼지 제어기 설계: 전역적 디지털 재설계 접근법

Development of Robust Fuzzy Controller with Relaxed Stability Condition: Global Intelligent Digital Redesign Approach

성 화 창, 김 진 규, 주 영 훈, 박 진 배*
(Hwa Chang Sung, Jin Kyu Kim, Young Hoon Joo, and Jin Bae Park)

Abstract : This paper presents the development of digital robust fuzzy controller for uncertain nonlinear systems. The proposed approach is based on the intelligent digital redesign(IDR) method with considering the relaxed stability condition of fuzzy control system. The term IDR in the concerned system is to convert an existing analog robust control into an equivalent digital counterpart in the sense of the state-matching. We shows that the IDR problem can be reduced to find the digital fuzzy gains minimizing the norm distance between the closed-loop states of the analog and digital robust control systems. Its constructive conditions are expressed as the linear matrix inequalities(LMIs) and thereby easily tractable by the convex optimization techniques. Based on the nonquadratic Lyapunov function, the robust stabilization conditions are given for the sampled-data fuzzy system, and hence less conservative. A numerical example, chaotic Lorenz system, is demonstrated to visualize the feasibility of the proposed methodology.

Keywords : Takagi-Sugeno fuzzy system, global digital redesign, Lyapunov function, norm minimization, linear matrix inequality

I. 서론

산업현장에서 사용되는 대부분의 플랜트는 연속 시간으로 표현되며, 이를 제어하는 문제 역시 연속 시간 기반으로 논의되어 왔다. 최근 마이크로 프로세서 기반 제어 기법이 발달하면서 연속시간으로 표현되는 (비)선형 플랜트에 대한 디지털 제어기 설계 방안이 활발히 논의 되고 있다. 이와 같은 현 추세에서, 디지털 재설계(Digital Redesign: DR) 방안의 경우 잘 설계 된 연속시간 제어기를 등가의 디지털 제어기로 변환시킬 수 있는 효과적인 방안이라는 점에서 많은 주목을 받고 있다.

Kuo에 의해 처음 제안된 DR 기법은[1], 초기에 선형 플랜트에 대해서만 연구되었으며[2,5], 좀 더 복잡한 비선형 플랜트에 대한 기법은 Joo에 의해 처음으로 제안되었다[10]. 지능형 디지털 재설계(Intelligent Digital Redesign: IDR)이라 명명된 이 기법은 기존의 DR 기법과 비선형 혹은 불확실 시스템의 모델링에 매우 효과적인 퍼지 기법을 결합시킴으로써 비선형 플랜트에 대한 디지털 제어기를 효과적으로 설계할 수 있게 하였다. 그리고 Lee는 기존의 IDR이 가지고 있던 지역적 상태정합이라는 한계점을 전역적 접근 방법으로 풀어낸 새로운 기법을 제안하기도 하였다[3].

이와 더불어 강인 IDR 기법 역시 활발히 연구되었다. Chang은 불확실성이 포함된 시스템에서의 IDR 기법을 제안하였으나[11], 제안된 기법의 경우 전역적 접근이 아닌 지역적 상태 정합으로 인하여 한정된 샘플링 시간에서만 유효하다. 그리고 시스템 전체의 안정도 역시 고려되지 않았다. 저자의 이전 논문의 경우 강인 IDR 기법에 대한 연구가 핵심

이었으며, 쌍선형 및 역 쌍선형 기법을 통해 이산화 시 나타나는 복잡한 지수 항목에 대한 전개를 통해 전역적 상태 정합을 이루고자 하였다[9].

본 논문에서는 강인 디지털 퍼지 제어기 설계에 있어서 좀 더 완화된 안정도 조건을 고려하고자 하였다. 이는 기존의 퍼지 제어 기법에서 안정도 조건을 논의 할 때 다루어 지는 조건으로, 시스템이 가질 수 있는 안정도의 정도를 범위를 넓혀 줌으로써 제어기 설계에 용이하도록 하는데 그 목적이 있다[7,8]. T-S 퍼지 모델로 나타내어진 불확실성이 포함된 비선형 시스템에서의 디지털 제어 이득을 구하기 위하여, 주어진 문제를 강인 아날로그 제어 시스템과 디지털 제어 시스템 간의 norm 최소화 문제(norm minimization problem)으로 간주하고 이를 선형 행렬 부등식(Linear Matrix Inequality: LMI)로 나타내고자 하였다. 그리고 비 이차 Lyapunov 함수를 바탕으로 하여 디지털 시스템 상에서의 완화된 안정도 조건을 구하게 되었다. 이로 인해 디지털 시스템의 강인성 및 안정성을 보장 받게 된다. 그리고 결과를 혼돈 Lorenz 시스템에 적용하여 본 논문의 우수성을 입증하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 사용될 모델에 대해 설명되며, 3절에서는 IDR 기법에 대해 다루게 된다. 그리고 4절에서는 안정도 조건 및 상태 정합 조건이 LMI 형태로 나타내어지며 5절에서는 4절에서 구한 결과를 혼돈 Lorenz 시스템에 적용하게 된다. 마지막으로 6절에서는 결론을 제시하며 논문을 마무리 짓게 된다.

II. 혼돈 Lorenz 시스템

혼돈 Lorenz 시스템은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma x + \sigma y \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{bmatrix} \quad (1)$$

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2007. 1. 5., 채택확정 : 2007. 4. 5.

성화창, 박진배 : 연세대학교 전기전자공학부

(casfirspear@control.yonsei.ac.kr/jbpark@yonsei.ac.kr)

김진규, 주영훈 : 군산대학교 전자정보공학부

(kjk242@kunsan.ac.kr/yhjoo@kunsan.ac.kr)

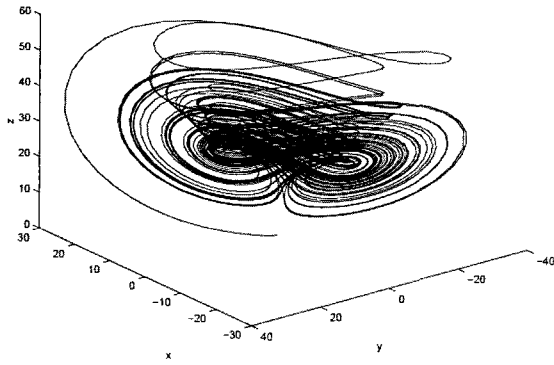


그림 1. 혼돈 Lorenz 시스템의 궤적.
Fig. 1. Chaotic Lorenz system.

여기서 $\sigma, r, b > 0$ 이며, σ 는 Prandtl 수, r 은 Rayleigh 수이며, b 는 증폭 상수이다. 각 상수 별로 불확실성이 포함 되면 $\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma$ 와 같은 표현으로 나타나며, $(\sigma_0, r_0, b_0) = (10, 28, 8/3)$ 의 초기 조건을 가지게 된다.(1)의 경우,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{bmatrix} \quad (2)$$

로 나타내어 지며 T-S 퍼지 모델로 변환하기 위하여 x 에 대한 변화 폭을 $x_i \in [M_1, M_2]$ 로 하여 다음과 같은 멤버쉽 함수 값을 설정하게 된다.

$$\Gamma_1^j = \frac{-x_j + M_2^j}{M_2^j - M_1^j}, \quad \Gamma_2^j = \frac{x_j - M_1^j}{M_2^j - M_1^j} \quad (3)$$

이를 토대로 다음과 같은 T-S 퍼지 모델 구성이 가능하다.

$$R^i : IF \ z_i(t) \text{ is about } M_i \\ THEN \ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = A_i \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad i \in I_2. \quad (4)$$

여기서 A_i 는 σ, r, b 등의 상수들의 불확실성에 의해 30%의 변화폭을 가지게 되며, 따라서 (4)에서 나타난 A_i 의 경우 $A_i + \Delta A_i$ 과 같이 불확실성을 나타내는 변수 ΔA_i 와 더불어 표현된다. 그림 1은 Lorenz 시스템의 궤적을 나타낸다. Lorenz 시스템에 대한 안정도 및 디지털 재설계 결과는 5절에서 다시 논의된다.

III. T-S 퍼지 시스템

불확실성이 포함된 비선형 시스템은 다음과 같이 나타난다.

$$\dot{x}_c(t) = f(x_c(t)) + \Delta f(x_c(t)) + (g(x_c(t)) + \Delta g(x_c(t)))u(t) \quad (5)$$

여기서 $x_c(t) \in R^n$ 는 상태 벡터이며, $u_c(t) \in R^m$ 는 제어 입력이다. $f(x_c(t))$ 와 $g(x_c(t))$ 는 비선형 벡터를 의미하며 $\Delta f(x_c(t))$ 와 $\Delta g(x_c(t))$ 는 불확실성을 나타내는 벡터이다. 첨자

c 는 아날로그 제어를 의미하며, 첨자 d 는 디지털 제어를 의미한다. 비선형 시스템 (5)의 T-S 퍼지 모델은 아래와 같다.

$$R^i : IF \ z_1(t) \text{ is } F_1^i \text{ and ... and } z_n(t) \text{ is } F_n^i \\ THEN \ \dot{x}_c(t) = (A_i + \Delta A_i)x_c(t) + (B_i + \Delta B_i)u_c(t) \quad (6)$$

여기서 R^i 는 i 번째 규칙, $z_h(t)$ 는 h 번째 전건부 변수를 의미한다. 그리고 F_h^i 는 i 번째 규칙에서 h 번째 전건부 변수의 퍼지 집합이다. 중심값-평균 비퍼지화, 곱셈 추론, 싱글톤 퍼지화를 사용하면 퍼지 추론 규칙 (6)의 전역 동특성은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}_c(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(z(t))((A_i + \Delta A_i)x_c(t) + (B_i + \Delta B_i)u_c(t)). \quad (7)$$

여기서

$$\omega_i(x(t)) = \prod_{j=1}^n \Gamma_j^i(z_j(t)), \quad \mu_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^q \omega_i(z(t))}$$

이며 $F_h^i(z_h(t))$ 는 h 번째 전건부 변수 $z_h(t)$ 의 퍼지 집합 F_h^i 에 대한 소속도를 나타낸다. 이를 제어할 주어진 아날로그 제어기는 다음의 퍼지 추론 시스템으로 구성되며

$$R^i : IF \ z_1(t) \text{ is } F_1^i \text{ and ... and } z_n(t) \text{ is } F_n^i \\ THEN \ u_c(t) = K_c^i x_c(t) \quad (8)$$

제어기 (8)의 전역 동특성은 (6)과 같은 퍼지 IF-THEN 규칙으로 나타내어 지며, 비퍼지화 된 결과는 아래와 같다.

$$u_c(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(z(t))K_c^i x_c(t). \quad (9)$$

(7)과 (9)로 구성된 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}_c(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))((A_i + \Delta A_i) + (B_i + \Delta B_i)K_c^i)x_c(t) \quad (10)$$

여기서 K_c^i 는 아날로그 게인을 의미한다.

IV. 지능형 디지털 재설계

디지털 T-S 퍼지 제어 시스템의 경우 다음과 같은 형태로 표현되며,

$$\dot{x}_d(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(z(t))((A_i + \Delta A_i)x_d(t) + (B_i + \Delta B_i)u_d(t)) \quad (11)$$

$u_d(t) = u_d(kT)$ 는 샘플링 구간 $[kT, kT+T)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 에서 결정되어 할 값이며, $T > 0$ 는 샘플링 주기이다. 퍼지모델 기반 제어기의 경우 $[kT, kT+T)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 와 같은 구간에서 아래와 같이 나타난다.

$R^i : IF z_1(t) \text{ is } F_1^i \text{ and ... and } z_n(t) \text{ is } F_n^i$
 THEN $u_d(t) = K_d^i x_d(t)$

여기서 K_d^i 는 재설계 될 디지털 제어 이득 행렬이며, 따라서 전체적인 디지털 제어기는

$$u_d(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(z(kT)) K_d^i x_d(kT) \quad (12)$$

로 표현된다.

IDR은 매 샘플링 순간마다 아날로그 페루프 시스템 (10)과 (10), (12)로 구성되는 디지털 페루프 시스템의 상태를 최대한 근사화 시키는 것으로, 일반적으로 이산 시간에서 논의 된다. 이를 위해 아래 가정을 도입하게 된다.

가정 1[3]: 모든 샘플링 구간에서 퍼지 시스템의 i 번째 규칙의 발화정도 $\mu_i(z(t))$ 는 구간 $[kT, kT+T)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 에서 $\mu_i(z(t)) \approx \mu_i(z(kT))$ 로 근사화 될 수 있다.

이를 통해 디지털 T-S 퍼지 시스템 (10)은 다음으로 나타난다.

$$x_d(kT) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \mu_i(z(kT)) \mu_j(z(kT)) (\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^j) x_d(kT) \quad (13)$$

여기서

$$\hat{G}_i = \exp(A_i + \Delta A_i)T, \hat{H}_i = (G_i - I_n)(A_i + \Delta A_i)^{-1}(B_i + \Delta B_i)$$

이며, 아날로그 페루프 T-S 퍼지 시스템 (7)은 다음과 같이 이산화 가능하다.

$$x_c(kT) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \mu_i(z(kT)) \mu_j(z(kT)) \hat{\Phi}_{ij} x_c(kT) \quad (14)$$

여기서 $\hat{\Phi}_{ij} = \exp((A_i + \Delta A_i) + (B_i + \Delta B_i)K_c^j)T$ 이다. ΔA_i 와 ΔB_i 로 나타내어진 불확실 파라미터를 해결하기 위하여 다음 가정 및 법칙을 도입한다.

가정 2: 불확실성을 나타내는 두 파라미터 ΔA_i 와 ΔB_i 는 놈 한정(norm bounded)으로 정의 되며 다음 구조로 정립이 가능하다.

$$[\Delta A_i \ \Delta B_i] = D_i F_i(t) [E_{1i} \ E_{2i}]$$

여기서 D_i , E_{1i} 와 E_{2i} 는 불확실성을 나타내는 충분한 공간을 지는 결정 행렬이며, $F_i(t) \in R^{i \times j}$ 는 불확실성을 내포한 Lebesgue-measurable 값으로 다음을 만족하게 된다.

$$F_i^T(t) F_i(t) \leq I.$$

가정 2는 세부 파라미터에 대한 구체적 접근이라면, 다음 정리는 \hat{G}_i , \hat{H}_i 와 $\hat{\Phi}_i$ 로 나타내어진 복잡성을 해결하기 위한 것이다.

정리 1[4,9]: \hat{G}_i , \hat{H}_i 는 다음과 같이 근사화 된다.

$$\hat{G}_i \cong G_i + \frac{T}{2}(I_n - \frac{1}{2}A_i T)^{-1} \Delta A_i (G_i + I_n) \quad (15)$$

$$\hat{H}_i \cong (G_i - I_n)A_i^{-1}B_i + (G_i - I_n)A_i^{-1} \Delta B_i + \frac{1}{2}(G_i - I_n)A_i^{-1} \Delta A_i (G_i - I_n)A_i^{-1}B_i \quad (16)$$

증명: 논문 [4] 참조. □

따름정리: $\hat{\Phi}_i$ 의 경우는 다음과 같다.

$$\hat{\Phi}_{ij} = \exp((A_i + \Delta A_i) + (B_i + \Delta B_i)K_c^j)T \cong \Phi_{ij} + \frac{1}{2}(\Phi_{ij} - I_n)(A_i + B_i K_c^j)^{-1}(\Delta A_i + \Delta B_i K_c^j)(\Phi_{ij} + I_n) \quad (17)$$

여기서 $\hat{\Phi}_{ij} = \exp((A_i + B_i K_c^j)T)$ 이며, $(i, j) \in I_Q \times I_Q$.

IDR을 만족시키기 위한 조건은 크게 두 가지로 태 접합과 안정도 문제 이다. 우선 상태 정합 문제는 아날로그 제어 이득과 디지털 제어 이득간의 놈 거리 최소화 문제,

$$\|\hat{\Phi}_{ij} - \hat{G}_i - \hat{H}_i K_d^j\| < \gamma, \quad (i, j) \in I_Q \times I_Q \quad (18)$$

로 표현되며, 구체화 된 LMI를 구하기 위해 다음 두 가정을 도입하게 된다.

가정 3[2]: 주어진 충분한 공간을 지니는 상수 행렬 N , O 와 L 은 다음 두 식을 만족하게 된다.

$$(a) \ O > 0, \ N + L^T O L < 0, \\ (b) \ \begin{bmatrix} N & L^T \\ L & -O^{-1} \end{bmatrix} < 0 \text{ or } \begin{bmatrix} -O^{-1} & L \\ L^T & N \end{bmatrix} < 0.$$

가정 4[2]: 주어진 충분한 공간을 지니는 상수 행렬 D , E 그리고 대칭 상수 행렬 S 는 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$S + DFE + E^T F^T D^T < 0,$$

여기서 F 는 $F^T F \leq I$ 라는 조건을 만족하게 되면 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 필요 충분 조건으로 다음 식을 만족하게 된다.

$$S + \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} E^T & \varepsilon D \\ \varepsilon D^T & \varepsilon^{-1} E \end{bmatrix} < 0.$$

가정 3은 주어진 비선형 식을 LMI 꼴로 변환시키는 대표적인 방법으로 널리 알려져 있다. 그리고 가정 4의 도입으로 비선형성과 더불어 불확실성을 가지고 있는 (15)와 (16)에 대하여 좀 더 효율적인 접근이 가능해 진다. 정리 1, 가정 3 과 가정 4을 통하여 앞에서 구성된 상태 정합 문제는 다음의 새로운 LMI 꼴로 변환되어 정리된다.

정리 2-1 (상태 정합 문제): 이산화 된 디지털 페루프 시스템 (13)에서 주어진 아날로그 게인 K_c^i 와 구하고자 하는 디지털 게인 K_d^i 사이의 상태 정합 문제는 다음과 같은 선

형 작용소의 norms을 최소화하는 볼록 최적화 문제로 구성된다.

Minimize

$P_i, \Gamma_d^i, Q_{ij}^k, \gamma$ subject to

$$\begin{bmatrix} -\gamma L & * & * & * & * & * \\ \Phi_{ij}L - \psi_{ij} & -\gamma I & * & * & * & * \\ V_{ij} & 0 & -\varepsilon_{ij}I & * & * & * \\ Z_{ij} & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}I & * & * \\ 0 & Y_{ij}^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1}I & * \\ 0 & U_i^T & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1}I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Gamma_d^i &= K_d^i L, \quad \psi_{ij} = G_i L + (G_i - I_n) A_i^{-1} B_i \Gamma_d^j, \\ U_i &= \frac{1}{2} (G_i - I_n) A_i^{-1} D_i, \quad V_{ij} = (E_{1i} + E_{2i} K_c^i) (\Phi_{ij} + I_n) L, \\ z_{ij} &= E_{1i} (G_i + I_n) L + 2E_{2i} \Gamma_d^i + E_{1i} (G_i - I_n) A_i^{-1} B_i \Gamma_d^j, \\ Y_{ij} &= \frac{1}{2} (\Phi_{ij} - I_n) (A_i + B_i K_c^j)^{-1} \end{aligned}$$

이며, *는 행렬의 대각선 대칭 행렬을 의미한다.

증명: LMI (19)는 $\|\hat{\Phi}_{ij} - \hat{G}_i - \hat{H}_i K_d^j\|$ 를 최소화 하는 데서 출발한다. 이 문제는 가정 3과 2-norm 방법에 의해,

$$(\hat{\Phi}_{ij} - \hat{G}_i - \hat{H}_i K_d^j)^T (\hat{\Phi}_{ij} - \hat{G}_i - \hat{H}_i K_d^j) < \gamma^2 I \quad (20)$$

로 변형 가능하며 여기서 $(i, j) \in I_Q \times I_Q$ 이다. 행렬 L 이 존재하고 양변에 L 에 대한 congruence 변환을 취하게 되면,

$$L^T (\hat{\Phi}_{ij} - \hat{G}_i - \hat{H}_i K_d^j)^T (\hat{\Phi}_{ij} - \hat{G}_i - \hat{H}_i K_d^j) L < \gamma^2 L^T L \quad (21)$$

이 된다. (21)에 가정 3을 적용하면 아래와 같은 부등식을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} -\gamma L & * \\ \hat{\Phi}_{ij} - \hat{G}_i - \hat{H}_i K_d^j & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

으로 변형 가능하며, 정리 1과 가정 3, 4를 이용하게 되면 위의 (19)를 얻어 낼 수 있다. (이하 증명은 지면 관계상 생략한다.) □

정리 2-1까지는 이전 논문 [9]에서 다루어진 내용과 유사하다. 본 논문에서는 좀 더 보편화된 안정도를 보이기 위한 다음 방법론을 제시하게 된다.

정리 2-2 (안정도 문제): 만약 행렬 L 이 존재하고, 상수 행렬 Γ_d^i 이 존재하며 다음 두 LMI는 일반적인 고유값 문제 (GEVP)로 나타내어 질 수 있다.

Minimize

$P_i, \Gamma_d^i, Q_{ij}^k, \gamma$ subject to

$$\begin{bmatrix} -P_i + Q_i^k & * & * & * \\ \psi_{ii} & P_k - (L + L^T) & * & * \\ Z_{ii} & 0 & -\varepsilon_{ij}I & * \\ 0 & U_i^T & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1}I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} -4P_i + Q_{ij}^k & * & * & * & * & * \\ \psi_{ij} + \psi_{ji} & P_k - (L + L^T) & * & * & * & * \\ Z_{ij} & 0 & -\varepsilon_{ij}I & * & * & * \\ Z_{ji} & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}I & * & * \\ 0 & U_{ij}^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1}I & * \\ 0 & U_{ji}^T & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1}I \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

여기서 $P_i > 0, Q_i^k > 0, Q_{ij}^k = (Q_{ij}^k)^T, j > i$,이다.

증명: 디지털 퍼지 시스템 (13)의 페루프는 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\begin{aligned} x_d(kT + T) &= \sum_{i=1}^q \mu_i^2(z(kT)) (\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^i) x_d(kT) \\ &+ 2 \sum_{i < j}^q \mu_i(z(kT)) \mu_j(z(kT)) \\ &\quad \frac{(\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^j) + (\hat{G}_j + \hat{H}_j K_d^i)}{2} x_d(kT). \end{aligned} \quad (25)$$

다음의 비이차 Lyapunov 함수를 고려해보자.

$$\begin{aligned} V(x_d(kT)) &= x_d(kT)^T \sum_{i=1}^q \mu_i(z(kT)) P_i x_d(kT) \\ &= x_d(kT)^T P_z x_d(kT). \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 $P_i > 0, i \in I_Q$ 그리고 $P_z = \sum_{i=1}^q \mu_i(z(kT)) P_i$ 이다.

$V(x_d(kT))$ 가 양수이며 바운드 되어 있다는 사실은 분명하다. $V(x_d(kT))$ 의 증가 정도를 고려하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta V(x_d(kT)) &= V(x_d(kT + T)) - V(x_d(kT)) \\ &= x_d(kT + T)^T P_z x_d(kT + T) \\ &- x_d(kT)^T P_z x_d(kT) \leq \sum_{i=1}^q \mu_i^2(z(kT)) x_d(kT)^T \\ &\quad ((\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^i) T x_d(kT) (\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^i) - P + Q_i^k) x_d(kT) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^q \mu_i(z(kT)) \sum_{i < j}^q \mu_j(z(kT)) x_d(kT)^T \\ &\quad \left(\frac{(\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^j) + (\hat{G}_j + \hat{H}_j K_d^i)}{2} \right) P_z \\ &\quad \times \left(\frac{(\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^j) + (\hat{G}_j + \hat{H}_j K_d^i)}{2} \right) - P + Q_{ij}^k x_d(kT). \end{aligned}$$

따라서 우리는 다음의 두 부등식 문제를 얻게 된다.

$$((\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^i) T x_d(kT) (\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^i) - P + Q_i^k) \quad (27)$$

$$\left(\frac{(\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^i) + (\hat{G}_j + \hat{H}_j K_d^j)}{2} \right) P_z \left(\frac{(\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^i) + (\hat{G}_j + \hat{H}_j K_d^j)}{2} \right) \quad (28)$$

여기서 $(i, j) \in I_Q \times I_Q$ 이다. (27)와 (28)과 같이 비이차로 표시될 경우 다음의 정리가 성립한다[7].

$$A_{ij}^T P_z A_{ij} - P < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P_i & * \\ A_{ij} L & L + L^T - P_z \end{bmatrix} > 0 \quad (29)$$

여기서 $(i, j, k) \in I_Q \times I_Q \times I_Q$ 이며, (29)과 가정 3에 의하여 다음 두 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -P_i + Q_i^k & * \\ (\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^i) L & P_k - (L + L^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} -4P_i + Q_i^k & * \\ \left(\frac{\hat{G}_i + \hat{H}_i K_d^i + \hat{G}_j + \hat{H}_j K_d^j}{2} \right) L & P_k - (L + L^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

(27), (28)과 이의 변형 풀인 (30), (31)은 다음과 같은 방법에 의해 변형 가능하다. 우선 (27)과 (28)의 경우 가정 3에서 제시된 Schur 변환에 의해 $L = L^T = P > 0$ 라는 조건하에 각각 (30)과 (31)로 변환된다. 그리고 (30)과 (31)에서 (27)과 (28)로 변환하기 위해서는 좌변에 $Y := [I \ A^T]$ 를 곱해주고, 우변에 Y^T 를 곱해주면 된다. 이로써 (30)과 (31)은 타당성을 지니게 되며, 가정 3과 4를 이용하면 주어진 (23)과 (24) 형태의 LMI 를 얻어낼 수 있다. □

참고 1: 정리 2-1과 2-2에서의 (i, j) 로 나타내어진 묶음에서 $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) = 0$ 와 같은 문제에 있어서 전역적 안정도 문제 결정에는 크게 영향을 미치지 않는다. 그리고 불확실성을 표현한 행렬 D_i 와 F_i 의 경우 파라미터 불확실성을 표현하기 위해 임의로 선택될 수 있으나, 제어기의 성능에는 영향을 줄 수 있다.

V. 컴퓨터 시뮬레이션

지금까지 전개한 LMI의 경우 논문 [9]에서 보여진 안정도 정도에서 보다 완화된 안정도 조건을 보장할 수 있다는 데서 장점이 있다[7,8]. 이제 구해진 안정도 및 상태 정합 조건을 이용하여 2절에서 소개된 Lorenz 시스템에 대한 디지털 재설계 결과를 보여 주게 된다.

시뮬레이션에 사용된 시스템 구성은 다음과 같다. 우선 행렬 A_i 는

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\sigma_0 & \sigma_0 & 0 \\ \gamma_0 & -1 & -M_1 \\ 0 & M_1 & -b_0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\sigma_0 & \sigma_0 & 0 \\ \gamma_0 & -1 & -M_2 \\ 0 & M_2 & -b_0 \end{bmatrix}$$

와 같이 나타내어 지며, 그리고 입력 행렬 B_i 은 $B_1 = [3 \ 0 \ 0]^T$ 으로 나타난다. $\Delta A_i, \Delta B_i$ 로 나타난 불확실 파라미터는 가정 2에 의해 각각 행렬 D_i 와 F_i 로 변환되며, 그 설정된 값은 다음과 같이 결정된다.

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad E_{11} = E_{12} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & -\sigma_0 & 0 \\ \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

그리고 $(M_1, M_2) = (-20, 30)$ 이며, 시스템의 초기값은 $x_c(0) = [10 \ -10 \ -10]^T$ 이다. 잘 설계된 아날로그 제어기를 통한 계인 값은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$K_c^1 = [-86.2892 \ -47.3637 \ -7.5237],$$

$$K_c^2 = [-86.4095 \ -47.0816 \ 11.1490].$$

그리고 샘플링 시간을 0.01초로 선정하고 정리 2를 이용하여 다음의 재설계된 디지털 제어기 이득을 구하였다. 이 값은 아날로그 제어기를 통해 구해진 이득 행렬과 전역적 접근에 의해 정합된 값이다.

$$K_d^1 = [-35.8949 \ -23.5376 \ -1.1093],$$

$$K_d^2 = [-31.9595 \ -17.9971 \ 1.4282].$$

IDR의 경우 재설계된 디지털 제어기를 통한 시스템 궤적이 원래의 아날로그 제어기에서의 궤적과 얼마나 유사한가를 통해 시스템의 효율성을 증명 받게 된다. 아래 그림들에서 볼 수 있듯이, 두 제어기를 통해 나온 신호의 궤적이 유사함을 알 수 있다.

그림 2와 3은 각각 재설계된 Lorenz system의 궤적과 그때의 제어 입력을 나타낸 것이다. 이전 논문 [9]에서 보여지는 궤적에 비해 좀 더 나은 안정도 조건을 보여 준다는 사실을

그림의 비교를 통해서도 쉽게 알 수 있으며, 다음의 평가 함수를 도입함으로써 구체적으로 드러나게 된다.

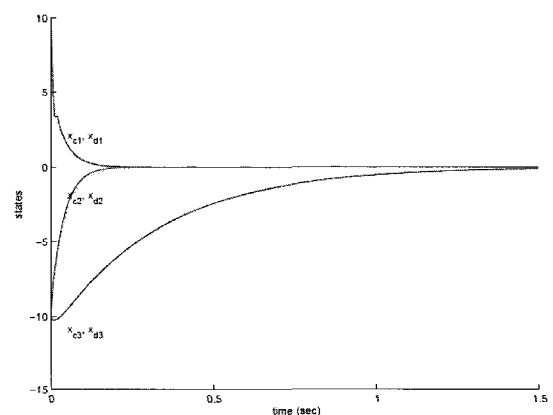


그림 2. T=0.01 일 때, 제어된 Lorenz system 상태.
Fig. 2. States of the controlled Lorenz system with T=0.01(Dotted line: continuous-time system, Solid line: digital system).

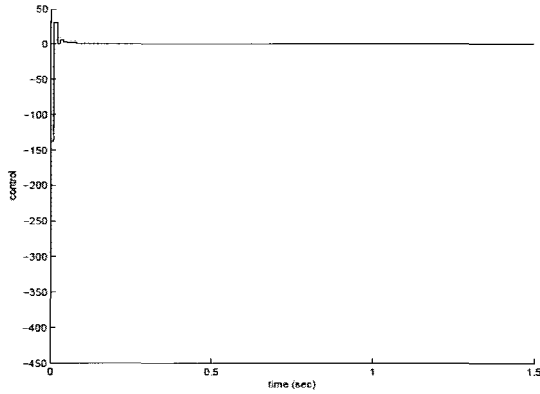


그림 3. T=0.01 일 때, 제어 입력.
Fig. 3. Control input with T=0.01.

$$J_x = \sum_{i=1}^n \int_0^T |x_c(t) - x_d(t)| dt \quad (32)$$

논문 [9]의 경우 (32)에 의한 평가 함수는 0.1954이지만, 제안된 기법을 통한 평가 함수는 0.1566으로 좀 더 나은 결과를 보여 주게 되며, 이는 완화된 조건의 안정도 범위를 가지고 있음에 기인한다고 유추해 볼 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 불확실성이 포함된 비선형 시스템의 지능형 디지털 재설계 기법에 대해 논의하였다. 지능형 디지털 재설계 문제를 제약 조건이 있는 블록 최적화 문제의 형태로 구성함으로써 전역적 접근을 가능케 하였다. 그리고 선형행렬 부등식의 장점을 활용하여 디지털 제어 시스템의 안정성을 증명하였으며, 쌍 선형과 역 쌍 선형 기법의 도입으로 불확실성이 내포되어 있는 식을 보다 효율적으로 풀어 낼 수 있었다. 또한 좀 더 완화된 조건의 안정도 조건을 제시함으로써 안정도 조건을 새로이 하였다. 제안된 기법의 효율성을 수치적 예제를 통하여 나타내는 것을 끝으로 본 논문을 마무리 지었다.

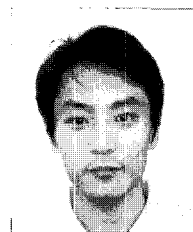
참고문헌

- [1] B. C. Kuo, *Digital control systems*, Saunders College publishing, 2nd edn. 1992.
- [2] L. Xie, "Output feedback H^∞ control of systems with parameter uncertainties," *Int. J. Contr.*, vol. 63, no. 4, pp. 741-750, 1996.
- [3] H. J. Lee, H. B. Kim, and J. B. Park, "A new intelligent digital redesign for T-S fuzzy systems: Global approach," *IEEE Trans.* vol. 12, no. 2, April 2004.
- [4] L. S. Shieh, J. Gu, and J. W. Sunkel, "Model conversions of uncertain linear systems using the bilinear and inverse-bilinear approximation method," *Proc. 36th Midwest Symposium*, vol. 1, pp. 514-517, Aug. 1993.
- [5] T. Chen and B. Francis, *Optimal sampled-data control systems*, Springer, 1995.
- [6] W. Chang, J. B. Park, H. J. Lee, and Y.H. Joo, "LMI approach to digital redesign of linear time-invariant systems," *IEE Proc-Control Theory, Appl.*, vol. 149, no. 4, July 2002.
- [7] T. M. Guerra and L. Vermeiren, "LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takaki-Sugeno's form," *Automatica*, vol. 40, pp. 823-829, 2004.
- [8] B. Ding, H. Sun, and P. Yang, "Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems Takaki-Sugeno's form," *Automatica*, vol. 42, pp. 503-508, 2006.
- [9] 성화창, 주영훈, 박진배, "불확실성을 갖는 비선형 시스템의 강인한 지능형 디지털 재설계," 퍼지 및 지능 시스템 학회 논문지, vol. 16, no. 2. pp. 138-143, 2005.
- [10] Y. H. Joo, G. Chen, and L. S. Shieh, "Hybrid state-space fuzzy model-based controller with dual-rate sampling for digital control of chaotic systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 7, pp. 394-408, Aug. 1999.
- [11] W. Chang, J. B. Park, H. J. Lee, and Y. H. Joo, "Design of sampled-data fuzzy-model-based control systems by Using Intelligent Digital Redesign," *IEEE Trans On Circuits And Systems-I: Fundamental Theory and Applications*. vol. 49, no. 4, April 2004.



성 화 창

2005년 연세대학교 전기전자공학과 졸업. 2007년 동 대학원 석사 졸업. 2007년~현재 동 대학원 박사과정 재학중. 관심분야는 디지털제어, 비선형제어, 디지털 재설계, 퍼지 이론.



김 진 규

2007년 군산대학교 전자정보공학부 졸업. 2007년~현재 동 대학원 석사과정 재학중. 관심분야는 지능형 제어, 감정인식, 패턴 분류기, 퍼지 이론.

박 진 배

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제 12 권 제 11 호(2006년 11월호) 참조.

주 영 훈

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제 13 권 제 3 호(2007년 3월호) 참조.