

엘레먼트 인버스 재킷 변환과 유사한 DFT의 새로운 희소 행렬 분해

정회원 이광재*, 박대철**, 이문호***, 학생회원 최승제***

A New Sparse Matrix Analysis of DFT Similar to Element Inverse Jacket Transform

Kwang-jae Lee*, Dae-chul Park**, Moon-Ho Lee*** *Regular Members*,
Seung-je Choi*** *Student Member*

요 약

본 논문은 엘레먼트 인버스 처리에 근거한 재킷 변환을 통한 DFT 행렬의 새로운 표현을 다룬다. DFT 행렬의 역을 단지 재킷 변환의 소행렬 분해에 따라 표현하며 이러한 결과는 DFT 행렬의 역이 단지 이의 희소 행렬과 치환 행렬에만 관련됨을 보여준다. 재킷 행렬을 통한 DFT 행렬의 분해는 블록 변조 특성을 나타내는 강한 기하 구조를 갖는다. 이는 재킷 행렬을 통해 분해된 DFT 행렬은 블록 변조 과정으로 해석할 수 있음을 의미한다.

Key Words : Hadamard matrix, DFT, Jacket transform, element inverse

ABSTRACT

This paper addresses a new representation of DFT matrix via the Jacket transform based on the element inverse processing. We simply represent the inverse of the DFT matrix following on the factorization way of the Jacket transform, and the results show that the inverse of DFT matrix is only simply related to its sparse matrix and the permutations. The decomposed DFT matrix via Jacket matrix has a strong geometric structure that exhibits a block modulating property. This means that the DFT matrix decomposed via the Jacket matrix can be interpreted as a block modulating process.

1. 서 론

아다마르(Hadamard) 행렬은 신호 및 영상 처리를 위한 매우 실용적인 직교행렬의 하나이다^[1]. 일반적으로 실베스터-아다마르(Sylvester-Hadamard) 행렬이 원소는 +1 또는 1로 구성된다. 따라서 이러한 행렬의 계산은 단지 가산과 감산만으로 수행된다. 최근, 중앙 가중치 아다마르 행렬을 일반화한 재킷(Jacket) 행렬이 소개되었다^[2]. 재킷 행렬이라는 명

칭은 뒤집어 읽는 재킷(reversible jacket)의 기하 구조(geometric structure)에서 유래한다. 이는 기존의 일반적인 아다마르 행렬을 포함하지만^[1-3], 가중치 ω 를 가지며, ω 는 j 또는 2^k 이다. 여기서 k 는 정수, j 는 허수 단위(imagination unit), $j = \sqrt{-1}$, 아다마르 행렬의 중앙부에 위치한다. 또한, $N=2^n$, $n \in \{2, 3, \dots\}$ 인 재킷 행렬 $[J_N]$ 은 대칭적(symmetric)이다^[4-6]. 전방(forward) 행렬의 가중치 원소의 위치는 이의 역 행렬의 비가중치 원소에 의해 대체될

※ 본 연구는 ETRI IT-SoC, KICOS 2006-00013, KOTEF, 2차 BK21 사업으로 이뤄졌음.
* 한려대학교 멀티미디어정보통신공학과 (kjlee@hanlyo.ac.kr), ** 한남대학교 정보통신공학과 (daechul@hannam.ac.kr)
*** 전북대학교 전자정보공학부 (moonho@chonbuk.ac.kr, tmdwp23@naver.com)
논문번호 : KICS2006-10-415, 접수일자 : 2006년 10월 10일, 최종논문접수일자 : 2007년 4월 4일

수 있지만 이들의 부호(signs)는 전방 행렬과 역 행렬에서 변하지 않는다^[7-9]. 이는 매우 흥미로운 상보 행렬 관계를 의미한다.

<정의 1> 비영(零) 원소로 이루어진 다음과 같은 크기 $m \times m$ 의 행렬 $[J_m]$ 에 대해

$$[J_m] = \begin{bmatrix} j_{0,0} & j_{0,1} & \dots & j_{0,m-1} \\ j_{1,0} & j_{1,1} & \dots & j_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{m-1,0} & j_{m-1,1} & \dots & j_{m-1,m-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

이의 역 행렬이

$$[J_m^{-1}] = \begin{bmatrix} 1/j_{0,0} & 1/j_{0,1} & \dots & 1/j_{0,m-1} \\ 1/j_{1,0} & 1/j_{1,1} & \dots & 1/j_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/j_{m-1,0} & 1/j_{m-1,1} & \dots & 1/j_{m-1,m-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

와 같은 경우 이를 재킷 행렬이라 한다. 여기서, C는 정규화 상수, T는 행렬의 전치(transposition)를 나타낸다.

일반 정의에서 정방 행렬 $[A]_m = [a_{ij}]_N$ 과 이의 역 행렬은 행렬의 원소 단위의 역으로 정의되며, $[A]_N^{-1} = \frac{1}{N}[1/a_{ij}]_N$, $1 \leq i, j \leq N$ 을 엘레먼트 인버스(element inverse)라 한다. 아다마르 행렬, DFT 행렬 등 몇몇 유용한 행렬 또한 재킷 행렬 계열에 포함시킬 수 있다^[9].

II. DFT의 소행렬 분해

이산 푸리에 변환(DFT)은 주어진 시퀀스 $x(m)$, $0 \leq m \leq N-1$ 에 대한 푸리에 표현이며, 다음과 같이 정의된다.

$$X(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W^{nm}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3)$$

여기서 $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. N점 푸리에 행렬을 $F_N = [W^{nm}]_N$, $n, m = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 으로, 그리고 $N \times N$ 실베스터-아다마르 행렬을 $[H]_N$ 으로 나타내기로 한다.

실베스터-아다마르 행렬은 크로네커 곱(Kronecker products)을 연속 적용함으로써 다음과 같이 반복적으로 생성되며,

$$[H]_N = [H]_2 \otimes [H]_{N/2}, \quad (4)$$

여기서, $N=4, 8, 16, \dots$ 그리고 $[H]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 이다. 이 하에서는 F 및 H 행렬의 차원(dimension)이 $N=2^k$, $k=1, 2, 3, \dots$ 인 경우만을 고려한다.

<정의 2> 희소 행렬 $[S]_N$ 은 $[F]_N$ 과 $[H]_N$ 을 연결시키면, 다음과 같이 H에 근거한 F의 소행렬 분해(factorization)에 의해 계산될 수 있다.

$$[F]_N = \frac{2}{N}[H]_N[S]_N \quad (5)$$

$$[S]_N = \frac{2}{N}[H]_N^{-1}[F]_N = \frac{1}{2}[H]_N[F]_N \quad (6)$$

S 행렬의 구조는 다소 모호하지만 S의 존재에 관한 보다 간단하고 흥미로운 관계를 보일 수 있다. 직접 곱을 이용하는 DFT을 제시하기 위해 W의 표기를 소문자 $w = e^{-j2\pi}$ 로 바꾸면 $w^{n/N}$ 은 N점 W에 대한 단위원상의 n 번째 근(root)이 된다.

$$[F]_2 = \begin{bmatrix} w^{0/2} & w^{0/2} \\ w^{0/2} & w^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [H]_2 \quad (7)$$

다음과 같이 정의하자.

$$[D]_2 = \begin{bmatrix} w^{0/4} & 0 \\ 0 & w^{1/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

및

$$[G]_2 = [F]_2[D]_2 = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad (8)$$

이를 일반식으로 나타내면 다음과 같다.

$$[D]_N = \text{diag}(w^{0/2N}, w^{1/2N}, w^{2/2N}, \dots, w^{(N-1)/2N})$$

및

$$[G]_N = [F]_N[D]_N \quad (9)$$

III. DFT에 대한 재킷 유형의 희소 행렬 분해

이제 본 논문에서 문헌 [9]에 제시되어 있는 일 반화된 가중치 아다마르 표현으로부터 재킷 행렬을 나타내기로 한다.

$$[J]_m = \frac{1}{m} [H]_m [S]_m \quad (10)$$

여기서, $m = 2^{k-1}$, $k \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 그리고 $[S]_m$ 은 $[J]_m$ 의 최소 행렬이다. 따라서, 재킷 행렬의 역은 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$([J]_m)^{-1} = ([S]_m)^{-1} [H]_m \quad (11)$$

여기서, $[\tilde{S}]_m$ 은 $([J]_m)^{-1}$ 의 최소 행렬이다. 재킷 행렬이 엘레먼트 인버스 특성을 가지기 때문에 재킷 행렬의 역 또한 재킷 행렬이 된다. 식 (8)과 유사하게, 다음의 관계를 얻을 수 있으며,

$$([J]_m)^{-1} = \frac{1}{m} [H]_m [\tilde{S}]_m \quad (12)$$

여기서, $[\tilde{S}]_m$ 은 $([J]_m)^{-1}$ 의 최소 행렬이다.

식 (11)과 (12)로 부터 다음을 얻는다.

$$([J]_m)^{-1} = \frac{1}{m} [H]_m [\tilde{S}]_m = ([S]_m)^{-1} [H]_m \quad (13)$$

이는 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} [H]_m [\tilde{S}]_m &= ([S]_m)^{-1} [H]_m \\ [H]_m [\tilde{S}]_m &= (m) ([S]_m)^{-1} [H]_m \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{S}]_m &= m ([H]_m)^{-1} ([S]_m)^{-1} [H]_m \\ [\tilde{S}]_m &= [H]_m ([S]_m)^{-1} [H]_m \end{aligned} \quad (15)$$

$[H]_m ([S]_m)^{-1} = ([S]_m)^{-1} [H]_m$ 인 경우 식 (12)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [\tilde{S}]_m &= [H]_m ([S]_m)^{-1} [H]_m \\ &= ([S]_m)^{-1} ([H]_m [H]_m) \\ &= m ([S]_m)^{-1} [I]_m = m ([S]_m)^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, $[I]_m$ 은 $m \times m$ 항등 행렬(identity matrix).

이와 같은 특별한 경우에 $[J]_m$ 과 $([J]_m)^{-1}$ 의 최소 행렬 간의 흥미로운 관계를 찾을 수 있다. 위에서 언급한 바와 같이 DFT 행렬 역시 재킷 행렬이다. 4점 DFT 행렬 $[F]_4$ 에 대한 최소 행렬을 고려하면, 다음의 결과를 얻을 수 있다^[10].

$$\begin{aligned} [F]_4 &= \begin{bmatrix} \alpha^0 & \alpha^0 & \alpha^0 & \alpha^0 \\ \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^0 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^6 \\ \alpha^0 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1-j & 0 & 1+j \\ 1 & 1+j & 0 & 1-j \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [H]_4 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-j & 1+j \\ 0 & 0 & 1+j & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [H]_4 \begin{bmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & (G_2 H_2)^k \end{bmatrix} [P]_4 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, $\alpha = e^{-j2\pi/N}$, $[P]_4$ 는 크기 4의 치환 행렬(permutation matrix), h 는 허미시안(Hermitian) 전치를 나타낸다. 특히, 변형된 최소 행렬 $[\hat{S}]_4$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$[\hat{S}]_4 = \begin{bmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & (G_2 H_2)^h \end{bmatrix} \quad (18)$$

이의 역은 다음과 같다.

$$([\hat{S}]_4)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & (G_2 H_2)^h \end{bmatrix} \quad (19)$$

이는 다음과 같은 특성에 따른 것이다.

$$\begin{aligned} ([\hat{S}]_4)^{-1} [\hat{S}]_4 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & G_2 H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & (G_2 H_2)^h \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4I_2 & 0 \\ 0 & G_2 H_2 H_2 (G_2)^h \end{bmatrix} = [I]_4 \end{aligned} \quad (20)$$

또한, $[F]_4$ 는 치환된 DFT 행렬로 고려되며 다음과 같이 정의된다.

$$[\tilde{F}]_4 = [H]_4 [\hat{S}]_4 \quad (21)$$

이를 이용하면 치환을 통한 푸리에 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[F]_4 = \frac{1}{2} [\tilde{F}]_4 [P]_4 \quad (22)$$

여기서, $[\tilde{F}]_4 = [H]_4 [\tilde{D}]_2$, $[\tilde{F}]_2 = \text{diag}(2I_2, (G_2 H_2)^h)$.

따라서 식 (17)은 다음과 같이 간략히 나타낼 수 있다.

$$[F]_4 = \frac{1}{2}[H]_4[\hat{S}]_4[P]_4 = \frac{1}{2}[\tilde{F}]_4[P]_4 \quad (23)$$

여기서, $[P]_8$ 은 $[P]_8^T[P]_8 = [I]_8$ 의 관계를 갖는 크기 8의 치환 행렬이며 다음과 같다.

식 (18)와 (22)를 이용하면 $[F]_4$ 의 역행렬을 다음과 같이 간단히 구할 수 있다.

$$[F_4]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \left(\frac{1}{-j}\right) & \left(\frac{1}{-1}\right) & \left(\frac{1}{j}\right) \\ 1 & \left(\frac{1}{-1}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{1}{-1}\right) \\ 1 & \left(\frac{1}{j}\right) & \left(\frac{1}{-1}\right) & \left(\frac{1}{-j}\right) \end{bmatrix}$$

$$[P]_8 = \begin{bmatrix} 10000000 \\ 00001000 \\ 00000010 \\ 00100000 \\ 00000001 \\ 00000100 \\ 00010000 \\ 01000000 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$= \frac{1}{2}([P]_4)^{-1}([\hat{S}]_4)^{-1}[H]_4 = 2([P]_4)^{-1}([\tilde{F}]_4)^{-1}$$

치환된 DFT 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[F_4]^{-1} = \frac{1}{8}([P]_4)^{-1} \begin{bmatrix} 2L_2 & 0 \\ 0 & G_2H_2 \end{bmatrix} [H]_4 \quad (24)$$

$$[\tilde{F}]_8 = [H]_8[\tilde{D}]_4 = [H]_8 \cdot \text{diag}(2\tilde{D}_2, (G_4H_4)^h) \quad (27)$$

예를 들어 $[F]_8$ 의 경우에는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$[F]_8$ 의 경우와 유사한 방법으로 식 (24)는 다음과 같이 쓸 수 있으며,

$$[F]_8 = \begin{bmatrix} \alpha^0 & \alpha^0 & \alpha^0 & \alpha^0 & \alpha^0 & \alpha^0 & \alpha^0 & \alpha^0 \\ \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 & \alpha^7 \\ \alpha^0 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha^8 & \alpha^{10} & \alpha^{12} & \alpha^{14} \\ \alpha^0 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 & \alpha^{12} & \alpha^{16} & \alpha^{18} & \alpha^{21} \\ \alpha^0 & \alpha^4 & \alpha^8 & \alpha^{12} & \alpha^{16} & \alpha^{20} & \alpha^{24} & \alpha^{28} \\ \alpha^0 & \alpha^5 & \alpha^{10} & \alpha^{15} & \alpha^{20} & \alpha^{25} & \alpha^{30} & \alpha^{35} \\ \alpha^0 & \alpha^6 & \alpha^{12} & \alpha^{18} & \alpha^{24} & \alpha^{30} & \alpha^{36} & \alpha^{42} \\ \alpha^0 & \alpha^7 & \alpha^{14} & \alpha^{21} & \alpha^{28} & \alpha^{35} & \alpha^{42} & \alpha^{49} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} & -j & \frac{(-1-j)}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{(-1+j)}{\sqrt{2}} & j & \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & \frac{(-1-j)}{\sqrt{2}} & j & \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} & -j & \frac{(-1+j)}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{(-1+j)}{\sqrt{2}} & -j & \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} & j & \frac{(-1-j)}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & \frac{(1+j)}{\sqrt{2}} & j & \frac{(-1+j)}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{(-1-j)}{\sqrt{2}} & -j & \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}[H]_8 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2j & 0 & 0 & 0 & 2+2j & 0 \\ 0 & 0 & 2+2j & 0 & 0 & 0 & 2-2j & 0 \\ 0 & 1-2.4j & 0 & 1-0.4j & 0 & 1+0.4j & 0 & 1+2.4j \\ 0 & 1+0.4j & 0 & 1+2.4j & 0 & 1-2.4j & 0 & 1-0.4j \\ 0 & 2.4+j & 0 & -0.4-j & 0 & -0.4+j & 0 & 2.4-j \\ 0 & -0.4+j & 0 & 2.4-j & 0 & 2.4+j & 0 & -0.4-j \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}[H]_8 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2j & 2-2j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2j & 2+2j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2.4j & 1+0.4j & 1+0.4j & 1-2.4j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-0.4j & 1-2.4j & 1+2.4j & 1+0.4j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4-j & -0.4+j & -0.4-j & 2.4+j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4-j & 2.4+j & 2.4-j & -0.4+j & 0 & 0 \end{bmatrix} [P]_8$$

$$= \frac{1}{4}[H]_8 \begin{bmatrix} 4L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(G_2H_2)^h & 0 \\ 0 & 0 & (G_4H_4)^h \end{bmatrix} [P]_8 = \frac{1}{4}[H]_8[\hat{S}]_8[P]_8 = \frac{1}{4}[\tilde{F}]_8[P]_8 \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 ([F]_8)^{-1} &= 4([P]_8)^{-1}([\hat{S}]_8)^{-1}([H]_8)^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}([P]_8)^{-1}([\hat{S}]_8)^{-1}([H]_8) \\
 &= \frac{1}{32}([P]_8)^{-1} \begin{bmatrix} 4I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(G_2H_2) & 0 \\ 0 & 0 & (G_4H_4) \end{bmatrix} ([H]_8)
 \end{aligned} \tag{28}$$

다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 [\hat{S}]_8 &= \begin{bmatrix} 4I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(G_2H_2)^h & 0 \\ 0 & 0 & (G_4H_4)^h \end{bmatrix} \\
 ([\hat{S}]_8)^{-1} &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(G_2H_2) & 0 \\ 0 & 0 & (G_4H_4) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{29}$$

식 (29)는 다음의 성질에 따른 것이다.

$$\begin{aligned}
 &([\hat{S}]_8)^{-1}[\hat{S}]_8 \\
 &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(G_2H_2)^k & 0 \\ 0 & 0 & (G_4H_4)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(G_2H_2) & 0 \\ 0 & 0 & (G_4H_4) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 4(G_2H_2)^k G_2H_2 & 0 \\ 0 & 0 & (G_4H_4)^k G_4H_4 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 16I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 16I_4 \end{bmatrix} = [I]_8
 \end{aligned} \tag{30}$$

위의 경우에서 다음의 관계를 간단히 증명할 수 있다.

$$([G_N H_N])^h ([G_N H_N]) = N^2 [I]_N \tag{31}$$

<증명> $[G]_N = [F]_N [D]_N$ 이므로 이로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$([G]_N)^h [G]_N = ([F_N D_N])^h [F_N D_N] = [D]_N^h ([F]_N)^h [F]_N [D]_N = N [I]_N \tag{32}$$

따라서 식 (31)은 다음과 같은 관계로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &([G_N H_N])^h ([G_N H_N]) \\
 &= [G]_N^h [H]_N^h [H]_N [G]_N = [G]_N^h M [I]_N [G]_N \\
 &= N [I]_N (M [I]_N) = N^2 [I]_N
 \end{aligned} \tag{33}$$

이는 다음과 같은 일반식으로 나타낼 수 있으며,

$$[\tilde{F}]_N = [H]_N [\tilde{D}]_{N/2} = [H]_N \cdot \text{diag}(2\tilde{D}_{N/4}, (G_{N/2} H_{N/2})^h) \tag{34}$$

DFT 행렬의 역 $[F]_N$ 은 다음과 같이 일반화 할 수 있다.

$$([F]_N)^{-1} = \frac{1}{2 \left(\frac{N}{2}\right)^2} (P_N)^{-1} \text{diag}(2(\tilde{D}_{N/4})^h, (G_{N/2} H_{N/2})) [H]_N \tag{35}$$

다음 관계에 주목하면,

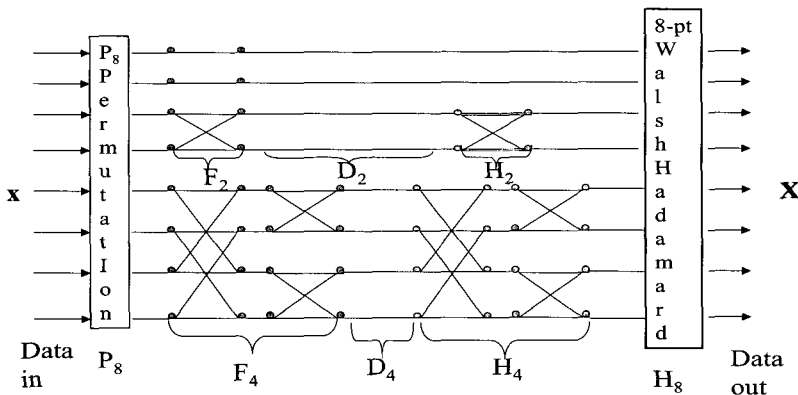


그림 1. 재킷 변환을 통한 DFT를 위한 데이터 흐름 제어

$$\begin{aligned}
 ([G]_4[H]_4)^T &= [H]_4^T[G]_4^T = [H]_4[G]_4^T \\
 &= [H]_4[D]_4^T[F]_4^T = [H]_4[D]_4[F]_4 \quad (36)
 \end{aligned}$$

DFT 행렬은 그림 1에 나타난 것처럼 최소 행렬 $[S]_N$ 과 아다마르 행렬이 곱해진 것으로 볼 수 있다. 이는 최소 행렬 $[S]_N$ 이 아다마르 행렬에는 포함되어 있지 않은 복소 스펙트럼 정보를 포함하고 있음을 의미한다. 재킷 행렬에 근거한 DFT 알고리즘의 계산 복잡도는 Cooley-Tukey 형 FFT에 비해 단지 몇 개의 실수 가산이 더 필요할 뿐 유사한 복잡도를 갖고 있다.

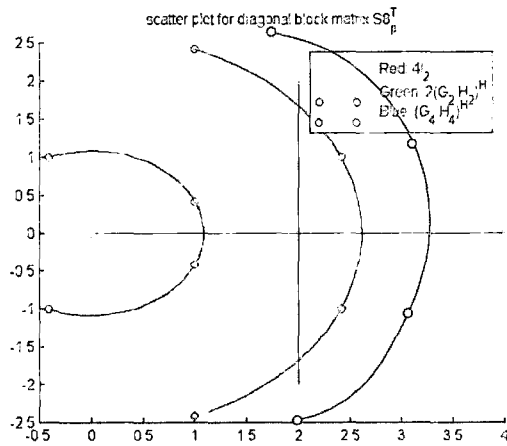


그림 2. 대각 블록 행렬 S_{16} 에 대한 산점도

IV. 통신 분야에서의 응용

X_r 및 Y_r 는 각각 블록 대각 행렬 S'_8 의 실수 및 허수부라 하자. 블록 행렬 $4[L]_2$ 의 좌측 상단에서부터 시작하여 블록 행렬 $(G_4H_4)^H$ 의 우측 하단까지 다음과 같이 실수 및 허수부를 취하여 분리한다.

$$\begin{aligned}
 X_r^1 &= \text{real}(4L_2), \\
 Y_r^1 &= \text{imaginary}(4L_2), \\
 X_r^2 &= \text{real}((G_2H_2)^H) \dots \quad (37)
 \end{aligned}$$

그러면 그림 2와 같이 블록 대각 행렬 S'_8 에 대한 산점도(scatter plot)가 그려진다. 그림 2로부터 크기 $N=8$ 의 최소 행렬 S'_8 이 M진 원형 성상(M-ary circle constellation)의 변이체(variant)로 알려진 고유한 포인트에 사상됨을 관찰할 수 있다. 이는 재킷 행렬을 통해 분해된 DFT 행렬은 블록 변조 과정으

로 해석할 수 있음을 의미한다. 즉, 모든 입력 데이터는 아다마르 변환 이전에 M진 원형 성상 변이체 중의 하나와 곱해진다.

V. 결론

본 논문에서 제안된 알고리즘은 DFT 이전의 입력 데이터 시퀀스의 특정 부분의 앰피시스(emphasis) 및 디앰피시스(deemphasis)를 위한 신호 처리 및 신호분류(signal classification)에 적용할 수 있다. 이는 또한 주파수 선택적 페이딩 채널의 위상 및 진폭 보상에 적용할 수도 있다. 재킷 행렬에 근거한 DFT 알고리즘의 계산 복잡도는 Cooley-Tukey 형 고속 알고리즘에 비해 단지 실수 가산이 약간 증가하는 정도이다.

DFT 행렬은 블록 대각행렬과 블록 변조의 흥미로운 특성을 나타내는 최소 행렬에 의해 WHT와 DFT가 서로 연결될 수 있도록 하는 재킷 행렬을 통해 재구성된다. 본 논문은 재킷 행렬을 이용한 DFT 행렬의 새로운 표현과 고속 연산을 위한 분해 알고리즘을 제시하였다. 특히, 재킷 행렬의 엘레먼트 인버스 특성이 DFT 및 아다마르 변환^[11]과 같은 다양한 신호처리 분야에 적용될 수 있음을 보였다. 순방향 및 역의 계산을 위한 간단한 구성 및 고속 연산과 최소 행렬의 분해는 적고 부호 설계 및 고속 알고리즘 등의 개발에서 매우 유용하다. 통신 응용 분야에서 제안된 DFT 분해를 적용하기 위해서는 좀 더 연구되어야 할 것이다.

참고 문헌

- [1] N. Ahmed and K.R. Rao, *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1975.
- [2] M.H. Lee, "A New Reverse Jacket Transform and Its Fast Algorithm," *IEEE, Trans. On Circuit and System*, vol. 47. no. 1, pp.39-47, Jan. 2000.
- [3] M.H. Lee and Y. Yasuda, "Simple Systolic Array for Hadamard Transform," *Electronics Letters*, vol. 26 no.18, pp 1478-1479, August,1990.
- [4] M.H. Lee, B. S. Rajan, and J.Y. Park, "A Generalized Reverse Jacket Transform," *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol.48, no. 7, pp.684-690, July, 2001.

[5] J. Hou, M.H. Lee, and J.Y. Park, "New Polynomial Construction of Jacket Transform," *IEICE Trans. Fund.* vol.E86.A, no.3, pp. 652-660, March 2003.

[6] S.R. Lee, J.H. Yi, "Fast Reverse Jacket Transform as an Alternative Representation of N point Fast Fourier Transform," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, KL1419-03, pp.1413-1420, Nov. 2001.

[7] C.P. Fan, J.F. Yang, "Fast Center Weighted Hadamard Transform Algorithm," *IEEE Trans. on CAS-II*, vol.45, No.3, pp.429~432, March. 1998.

[8] M.H. Lee, D.Y. Kim, "Weighted Hadamard Transform for S/N Ratio Enhancement in Image Transform," *Proc. of IEEE ISCAS'84*, pp.65~68, 7~10 May, 1984, Montreal, Canada.

[9] M.H. Lee, "The Center Weighted Hadamard Transform," *IEEE Trans. On Circuits and Systems*, vol. 36, no.9, pp.1247~1249, Sep. 1989.

[10] D.C. Park, M.H. Lee, and E. Choi, "Revisited DFT matrix via the reverse jacket transform and its application to communication," *The 22nd symposium on Information theory and its applications (SITA 99)*, Yuzawa, Niigata, Japan, Nov.30-Dec.3, 1999.

[11] M.H. Lee and K. Finlayson, "A simple element inverse Jacket transform coding," *IEEE Information Theory Workshop 2005 (ITW 2005)*, Rotorua, New Zealand, 29 Aug - 1st Sept. 2005.

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Jacket_matrix.
<http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Matrices>.
<http://en.wikipedia.org/wiki/user:leejacket>.

이 광 재 (Kwang-jae Lee)

정회원



1986년 2월 : 전북대학교 전자공
학과 졸업
1990년 2월 : 전북대학교 전자공
학과 석사
2006년 2월 : 전북대학교 전기공
학과 박사
1995년 3월~현재 : 한려대학교

멀티미디어정보통신공학과 전임강사
<관심분야> 이동통신, 부호이론, WLAN

박 대 철 (Dae-chul Park)

정회원



1977년 2월 : 서강대학교 전자공
학과 졸업
1985년 12월 : Univ. of New
Mexico 전자공학과 석사
1989년 5월 : Univ. of New
Mexico 전자공학과 박사
1993년 9월~현재 : 한남대학교

정보통신공학과 교수
<관심분야> 영상해석, 신호처리

이 문 호 (Moon-Ho Lee)

정회원



1967년 2월 : 전북대학교 전기공
학과 졸업
1976년 2월 : 전북대학교 전기공
학과 석사
1990년 2월 : 일본 Tokyo Univer-
sity 정보통신공학과 박사
1981년 3월~현재 : 전북대학교

전자정보공학부 교수
<관심분야> 이동통신, 정보이론, UWB

최 승 제 (Seung-je Choi)

학생회원



2006년 2월 : 전북대학교 전자정
보공학부 석사
2007년 2월~현재 : 전북대학교
전자정보공학부 박사과정
<관심분야> 오류정정부호, STC,
UWB