비선형 시스템의
상태 추정을 위한 입자 필터

■ 한수희, 이호상
(서울대학교 전기 · 컴퓨터공학부)

1. 서 론

비선형 시스템의 상태를 추정하기 위한 필터로 확장 칼만 필터(Extended Kalman Filter, EKF)[4]가 가장 널리 사용되고 있다. 그러나 EKF는 비선형 모델을 1차 선형화 시켜 사용하므로, 비선형성이 매우 커서 동작점마다 시스템의 특징이 많이 달라지는 경우는 좋은 성능을 보장할 수 없다. 또한 선형 시스템에서는 분석이 용이한 Gaussian 잡음이 비선형 시스템에서 어떤 특징을 지니는지 정확한 해석을 하기가 매우 어렵다. 최근에는 모델의 선형화에서 오는 오차를 줄이고 Gaussian을 포함한 일반 잡음에 대해서도 추정을 잘 할 수 있는 시그마점 필터(sigma point filter)[1]와 입자 필터(particle filter)[2]가 제안되었다.

본고에서는 비선형 베이지안 필터를 Monte Carlo 방법으로 구현한 입자필터에 대하여 기본적인 개념을 설명하고 간단한 시뮬레이션을 통하여 그 성능을 알아본다.

2. 입자 필터

2.1 비선형 베이지안(bayesian) 필터링

아래와 같은 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f_k(x_k,\ w_k) \\ y_k &= h_k(x_k,\ v_k) \end{aligned} \tag{1}$$

x_k는 시스템의 상태이고, y_k는 측정되는 출력으로 우리가 알 수 있는 값이다. $f_k(\cdot,\cdot)$와 $h_k(\cdot,\cdot)$는 일반적으로 비선형 함수로 주어지고, w_k와 v_k는 동일한 확률 분포에서 시간 별로 독립적인 수열로 주어진다. w_k와 v_k의 분포가 꼭 Gaussian 분포일 필요는 없다.

본 논문에서는 주어진 측정치 $y_{1:k} = \{y_1,\ y_2,\cdots,\ y_k\}$로부터 x_k를 추정하는 것을 목표로 한다. 최소평균자승오차(MMSE)를 갖도록 베이지안 필터는 아래와 같이 주어진다.

$$\hat{x}_k = E[x_k \mid y_{1:k}] = \int x_k p(x_k \mid y_{1:k}) dx_k \tag{2}$$

상태차수가 커지면 (2)의 적분은 용이하지 않다. 우선 (2)의 적분 안에 있는 $p(x_k \mid y_{1:k})$를 살펴보자. $p(x_k \mid y_{1:k})$를 점화적으로 효과적으로 계산하기 위해 예측(prediction)과 갱신(update)의 과정을 거친다. 예측은 Chapman-Kolmogorov 방정식에 의해 아래와 같이 구해진다.

$$p(x_k \mid y_{1:k-1}) = \int p(x_k \mid x_{k-1}) p(x_k \mid y_{1:k-1}) dx_{k-1}$$

상태 방정식이 1차 마코프 확률 과정이기 때문에 $p(x_k \mid x_{k-1},\ y_{1:k-1}) = p(x_k \mid x_{k-1})$을 사용하였다. 상태가 고정되고 노이즈의 영향이 선형으로 나타날 때 $p(x_k \mid x_{k-1})$은 시스템 (1)에서 쉽게 구할 수 있다. 이제 갱신의 과정을 알아보자. 시간 k 때 측정치 y_k를 사용할 수 있으면 사후 확률 $p(x_k \mid y_{1:k})$는 $p(x_k \mid x_{k-1})$로부터 아래와 같이 계산되어진다.

$$p(x_k \mid y_{1:k}) = \frac{p(y_k \mid x_k)p(x_k \mid y_{1:k-1})}{p(y_k \mid y_{1:k-1})} \tag{3}$$

(3)의 $p(y_k \mid x_k)$는 시스템 (1)에서 구할 수 있고, 측정값 y_k는 사전확률로부터 사후확률을 구하는데 사용되고 있음을 알 수 있다. (2)와 (3)은 베이지안 필터를 구성하는데 중요한 관계식이다. 하지만 $f_k(\cdot,\cdot)$와 $h_k(\cdot,\cdot)$가 선형적이거나, 이산적인 상태 값을 갖는 경우가 아니면 해석적으로 (2)와 (3)을 구하기가 매우 어렵다. 따라서, 베이지안 필터를 근사화 하는 방법으로 확장형 칼만 필터, 근사화된 grid-based 필터, 입자 필터 등이 제안되었다. 다음 절 부터 비선형 베이지안 필터를 Monte Carlo 방법으로 구현한 입자 필터의 원리에 대하여 설명한다.

2.2 Sequential Importance Sampling(SIS) 알고리즘

여기에서는 입자 필터에서 중요하게 사용되는 SIS 알고리즘을 소개한다. SIS 알고리즘은 베이지안 필터를 재귀적으로 구현하는데 MC(Monte Carlo) 방법을 사용한다. 가중치를 갖는 무작위의 샘플(random sample, 입자라고도 말함)을 바탕으로 SIS알고리즘을 사용하여 사후 확률(posteriori probability)이 계산된다. 입자수가 많아지면 그 만큼 SIS 필터는 베이지안 필터에 근사화하게 된다. 하지만 계산량도 따라서 증가하기 때문에 계산속도는 느려질 것이다.

SIS 알고리즘을 설명하기 위해 다음과 같은 N_s개의 입자와 가중치의 집합

$$(x^i_{0:k},\ w^i_k) : 1, \cdots, N_s \tag{4}$$

을 생각하자. 여기서 가중치는 아래와 같이 정규화 되고,

$$\sum_{i=1}^{N_s} w^i_k = 1 \tag{5}$$

사후 확률 $p(x_{0:k} \mid y_{1:k})$은 아래와 같이 근사화 된다.

$$p(x_{0:k} \mid y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_s} w^i_k \delta(x_{0:k} - x^i_{0:k}) \tag{6}$$

(6)에서 보듯이 연속적인 사후 확률 $p(x_{0:k} \mid y_{1:k})$를 이산 가중치로 근사화 하였다. 가중치 w^i_k는 importance sampling 원리에 의해 구한다[5]. 이 원리는 초기에 무작위 샘플링에 의한 계산을 좀 더 효율적으로 하기 위해 어떤 특정 분포를 따르는 샘플링을 시도한다. 이 원리는 쉽게 구현할 수 없는 확률밀도함수(pdf) $p(x)$를 쉽게 구현할 수 있는 pdf $q(x)$를 사용하여 근사화 시킬 때도 용이하게 사용될 수 있다. importance sampling 원리의 입자 필터에 대한 응용은 후자에 해당된다. 이 원리에 의하면 (6)의 w^i_k는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$w^i \propto \frac{p(x^i_{0:k} \mid y_{1:k})}{q(x^i_{0:k} \mid y_{1:k})} \tag{7}$$

(7)에 연쇄 법칙을 적용하고 식을 정리하면 가중치 w^i_k는 아래와 같이 갱신되고[3]

$$w^i_k \propto w^i_{k-1} \frac{p(y_k \mid x^i_k)p(x^i_k \mid x^i_{k-1})}{q(x^i_k \mid x^i_{k-1},\ y_k)} \tag{8}$$

필터링된 사후 확률밀도함수 $p(x_k \mid z_{1:k})$는

$$p(x_k \mid y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_s} w^i_k \delta(x_k - x^i_k) \tag{9}$$

으로 근사화 된다. 전에 언급했듯이 $N_s \to \infty$이면 (9)의 우변은 연속형 사후 확률밀도함수 $p(x_k \mid y_{1:k})$로 수렴한다.

SIS 필터는 매순간 새로운 측정치를 사용하여 입자들과 가중치를 갱신하고, 모델을 통해 예측을 하는 두 단계의 과정을 반복한다. SIS 필터는 알고리즘 I 에 정리되어 있다.

> 알고리즘 I : SIS 필터
> FOR $i = 1 : N_s$
> $q(x_k \mid x^i_{k-1},\ z_k)$ 분포에서 x^i_k를 선택한다.
> 입자에 대한 가중치 w^i_k를 (8)에 의해 계산한다.
> END

SIS 필터는 시간의 흐름에 따라 하나의 입자만 가중치가 증가되고 나머지의 가중치는 거의 0에 가깝게 되는축퇴(degeneracy) 현상을 겪는다. 축퇴현상은 입자들의 가중치에 대한 갱신이 $p(x_k \mid y_{1:k})$의 근사값을 얻는데 별로 도움을 주지 못한다. 이론적으로 가중치의 분산은 시간에 따라 항상 증가하므로 이런 축퇴 현상을 피하기는 불가능하다.

이런 축퇴 현상을 추정하기 위해 다음과 같은 가격함수가 제안됐다[6].

$$N_{eff} = \frac{N_s}{1 + Var(w^{*i}_k)}$$

여기서 $w^{*i}_k = p(x^i_k \mid y_{1:k}) / q(y^i_k \mid y^i_{k-1}, y_k)$ 는 실이득(true weight)이라고 부른다. 위의 N_{eff} 는 실제 계산할 수 있는 값이 아니므로 다음과 같은 추정된 $\widehat{N_{eff}}$ 를 사용한다.

$$\widehat{N_{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_s} (w_k^i)^2} \tag{10}$$

(10)의 $\widehat{N_{eff}}$ 가 작으면 축퇴 현상이 심각함을 의미한다. 극단적으로 특정 가중치만 1이고 나머지는 0이면 $\widehat{N_{eff}}$ 는 가장 작은 1이 된다. 그 이외는 $\widehat{N_{eff}}$ 는 항상 1보다 크다. 축퇴 현상을 줄이는 방법으로 두 가지 방법을 소개한다. 하나는 importance density 가 $\widehat{N_{eff}}$ 를 최소화 하도록 정한다.

$$\begin{aligned} q(x_k \mid x_{k-1}^i, y_k) &= p(x_k \mid x_{k-1}^i, y_k) \\ &= \frac{p(y_k \mid x_k, x_{k-1}^i) p(x_k \mid x_{k-1}^i)}{p(y_k \mid x_{k-1}^i)} \end{aligned} \tag{11}$$

(11)을 (8)에 대입하면 아래 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} w_k^i &\propto w_{k-1}^i p(y_k \mid x_{k-1}^i) \\ &= w_{k-1}^i \int p(y_k \mid x_k') p(x_k' \mid x_{k-1}^i) dx_k' \end{aligned} \tag{12}$$

위에서 제시한 최적의 importance density는 구현면에서 $p(x_k \mid x_{k-1}^i, y_k)$ 로부터 샘플을 선택해야 하고, x_k에 대한 다차원 공간상에서의 적분을 해야하는 하는 단점이 있다. 따라서 편의상 importance density는 아래와 같이 정하고,

$$q(x_k \mid x_{k-1}^i, y_k) = p(x_k \mid x_{k-1}^i)$$

가중치는 다음과 같이 재귀적으로 표현된다.

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i p(y_k \mid x_k^i)$$

축퇴현상을 줄이는 또 다른 방법으로는 resampling이 있는데 이것은 다음 절에 소개한다.

2.3 Resampling

축퇴현상이 발견되면, 즉 $\widehat{N_{eff}}$ 가 어떤 기준값 N_T 보다 작게 되면, resampling을 실시하여, 축퇴현상을 예방할 수 있다. Resampling은 작은 가중치를 가지는 입자를 삭제하고, 큰 가중치를 가지는 입자를 중심으로 다시 샘플링을 하고 각각의 가중치를 $1/N_s$ 로 평준화 시킨다. Resampling 알고리즘이 알고리즘 II에 정리되어 있다.

```
알고리즘 II : Resampling 알고리즘
초기화 : c_1 = 0
FOR i = 2 : N_s
    c_i = c_{i-1} + w_k^i
END
u_1 ≈ U(0, N_s^{-1}) :
  U(a,b) ( a와 b 사이에서 균일 분포)
FOR j = 1 : N_s
  u_j = u_1 + N_s^{-1}(j-1)
  WHILE u_j > c_i
    i = i + 1
  END
  샘플 할당 : x_k^{j*} = x_k^i
  가중치 할당 : w_k^j = N_s^{-1}
  부모 입자의 인덱스 할당 : i^j = i
END
```

```
알고리즘 III : 입자 필터
FOR i = 1 : N_s
  q(x_k | x_{k-1}^i, y_k)분포에서 x_k를 선택한다.
  입자에 대한 가중치 w_k^i를 (8)에 의해 계산한다.
END
전체 가중치에 대한 합 t 를 구한다.
FOR i = 1 : N_s
    w_k^i = t^{-1} w_k^i 와 같이 정규화를 한다.
END
(10)의 N_eff^ 를 구한다.
IF N_eff^ < N_T
  알고리즘 II ( resampling )를 실행한다.
END
```

이산형으로 표현된 $p(x_k \mid y_{1:k})$

$$p(x_k \mid y_{1:k}) = \sum_{i=1}^{N_s} w_k^i \delta(x_i - x_k^i) \tag{13}$$

를 바탕으로 N_s번의 샘플링을 함으로써 새로운 입자 $x_k^{1*}, \cdots,$

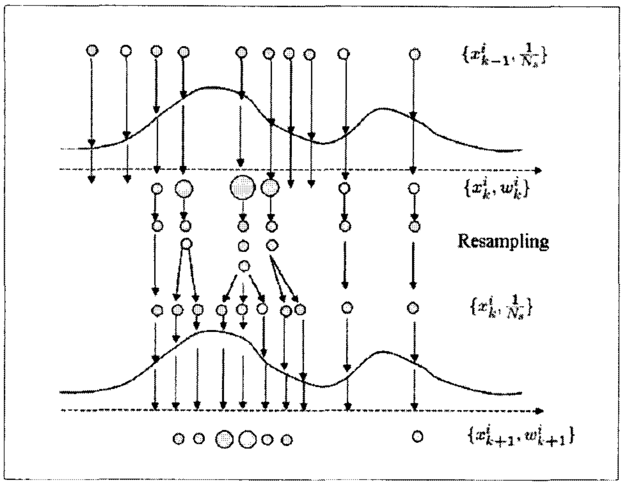


그림 1. 입자필터의 동작

$x_k^{N_s*}$ 을 구한다. 입자들의 값은 동일한 pdf로부터 시간 별로 독립적인 수열로 주어진다. 따라서 가중치는 모두 $1/N_s$ 로 동일하게 주어진다. 일반적인 입자 필터의 알고리즘이 알고리즘 III에 정리되어 있다. 10개의 입자를 예로 들어 입자 필터의 동작을 개념적으로 그림 1에 도시해 놓았다.

pdf에 의해 가중치가 갱신되고, resampling 에 의해 가중치의 집중을 방지하게 되는 과정을 볼 수 있다.

3. 시뮬레이션

이 논문에서는 모바일 로봇의 위치 추정 문제에 입자 필터를 적용하여 오차 절감에 대한 성능을 분석하여 보았다. 시스템의 상태변수들로는 로봇의 x 좌표, y 좌표, 위치각 θ 가 있다. 시간 k 에서의 로봇의 위치를 $q_k = [x_k, y_k, \theta_k]$ 라는 상태변수 벡터로 표현했을 때, 로봇의 동적 모델은 다음과 같은 비선형 방정식으로 표현된다.

$$q_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k + \Delta D_k \cos\theta_k \\ y_k + \Delta D_k \sin\theta_k \\ \theta_k + \Delta\theta_k \end{bmatrix} + v_k$$

v_k 는 잡음 벡터로 가우시안 분포를 따른다고 가정한다. ΔD_k 는 로봇의 이동 거리로 $\Delta D_k = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 로 표현되며 로봇의 앞바퀴에 달려있는 엔코더를 통해 측정되고, 각 변화 $\Delta\theta_k$ 는 자이로를 통해 측정된다. 이 두 가지 측정값으로부터 제어 입력 벡터 $u_k = [\Delta D_k, \Delta\theta_k]$ 를 계산한다.

위치 추정에서 엔코더로부터 받는 입력에 잡음이 섞여있을 경우 오류가 누적되는 문제가 있으며, 이러한 문제를 해결하기 위해 등장한 많은 방법들은 고정된 노드들과 로봇 사이의 거리를 이용하거나 각도를 이용하기도 한다. 여기서는 거리 정보만을 이용하여 각도를 제외한 로봇의 x, y 좌표만을 추정하기로 한다.

먼저 파라미터 설정에서 로봇의 x 좌표는 (-20,20), y 좌표는 (-15,25) 사이에만 존재한다고 가정한다. 시뮬레이션에 이용될 입자의 개수, resampling에 이용할 확산율을 초기 파라미터로 지정해준다. 시뮬레이션에 이용할 고정된 태그의 위치, 태그와 로봇 사이의 거리와 엔코더로부터의 측정값은 주어진다.

먼저 모든 입자를 주어진 영역 내에 랜덤하게 분포시킨다. 각 입자들의 확률은 $\frac{1}{N_s}$, i 번째 입자의 누적 확률은 $\frac{i}{N_s}$ 로 초기화시킨다. 다음 단계의 x, y 좌표는 먼저 엔코더와 자이로를 통해 받은 측정값으로 설정한다. 태그와 로봇 사이의 거리 정보를 이용하여 각 입자들의 가중치를 결정하게 된다. 입자와 태그 사이의 거리를 r_m 이라 하고 측정된 거리를 이라 $\hat{r}$ 하면, 각 입자들의 가중치는 다음과 같은 조건부 확률에 비례하게 된다.

$$P(q \mid r_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{r}-r_m}{\sigma}\right)^2}$$

가중치의 합이 1이 되도록 정규화한 뒤, 가중치가 큰 입자들 중심으로 입자를 분산시켜 재배치한다. 시뮬레이션에 사용된 입자 재배치 알고리즘은 다음과 같다.

알고리즘 IV : 입자 재배치 알고리즘 : Resampling

$C_j = \sum_{i=1}^{j} w_i$ {C : cumulative density function}
t=rand($N_s + 1$) {t: $N_s + 1$ 개의 무작위수에 대한 배열}
T=sort(t)
i=1 , j=1 , T($N_s + 1$)=1 ;
WHILE($i \le N_s$) DO
  IF T[i] < Q[j]
    index[i] = j;
    i = i + 1;
  ELSE
    j=j+1;
  END
END
Return(index)
  샘플 할당 : $x_k^{j*} = x_k^i$
  가중치 할당 : $w_k^j = N_s^{-1}$
  부모 입자의 인덱스 할당 : $i^j = i$
END

and estimators," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 45, No. 3, March 2000.

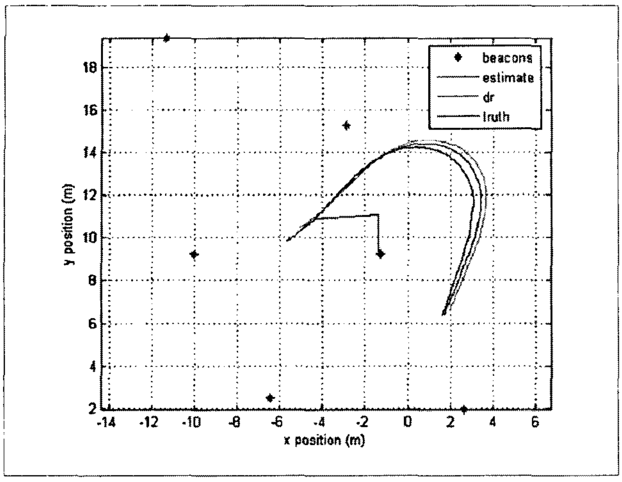


그림 2. 시뮬레이션 결과

입자의 수를 1000개로 잡고, 주어진 경로를 80 스텝으로 나눈다. 확산율을 0.03m/sec로 결정하고 시뮬레이션을 수행하면 그림 2와 같은 결과를 얻는다.

4. 결 론

이 논문에서는 실제 비선형 시스템에서 유용하게 쓰일 수 있는 입자 필터의 원리를 알아보았다. 베이지안 필터의 재귀적 구현를 위해 MC(Monte Carlo) 방법을 사용하는 것을 소개했다. 가중치를 갖는 무작위의 샘플(random sample, 입자라고도 말함)을 바탕으로 SIS알고리즘을 사용하고, 축퇴 현상을 방지하기 위해 resampling 을 수행하여 현재 많이 사용하고 있는 입자 필터를 시뮬레이션으로 구현하였다.

입자 필터는 일반적인 비선형 시스템뿐만 아니라 Gaussian 노이즈를 포함한 일반적 노이즈에 대해서도 적용될 수 있으므로 앞으로 많은 응용이 기대된다.

참 고 문 헌

[1] S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte , "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 45, No. 3, March 2000.

[2] N. Gordon, D. Salmond, and A. F. M. Smith, "New approach to nonlinear and non-Gaussian Bayesian state estimation," *Proc. Inst. Elect. Eng. F*, Vol. 140, 1993.

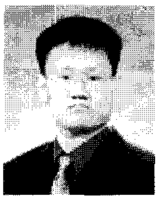
[3] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp, "A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 50, No. 2, Feb., 2002.

[4] H. W. Sorenson, *Kalman Filtering: Theory and Application*, IEEE Press, New York, 1985.

[5] A. Doucet, *On sequential Monte Carlo methods for Bayesian filtering*, Dept. Eng., Univ. Cambridge, UK, Tech. Rep., 1998.

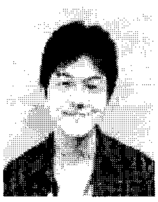
[6] J. S. Liu and R. Chen, "Sequential Monte Carlo methods for dynamical systems," *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1998.

저자약력



한 수 희

· 1974년 8월 26일생.
· 1998년 2월 서울대학교 전기공학부(공학사).
· 2000년 2월 서울대학교 전기 · 컴퓨터공 학부(공학석사).
· 2003년 8월 서울대학교 전기 · 컴퓨터공학부(공학박사).
· 2002년 11월~2003년 8월 서울대학교 제어계측신기술연구센터 연구원.
· 2003년 9월~2005년 1월 서울대학교 BK 박사후 연구원
· 2005년 1월~2005년 10월 스탠포드 방문연구원
· 2005년 10월~현재 서울대학교 제어계측신기술연구센터 선임 연구원.
· 관심분야 : 최적 제어 및 확률 제어, 이동 구간 제어, 시간 지연 시스템, 블록형 최적화, 추정 이론, 컴퓨터 이용 제어 시스템 설계



이 호 상

· 1984년 1월 26일생.
· 2006년 2월 서울대학교 전기공학부(공학사).
· 2006년 3월~현재 서울대학교 전기 · 컴퓨터공학부 제어정보시스템연구실 석사 과정.
· 관심분야 : 비선형 필터, 시스템 식별.