

포물형 근사식 수치모형의 투과 경계조건 Open Boundary Conditions in Parabolic Approximation Model

서승남* · 이동영**

Seung-Nam Seo* and Dong-Young Lee**

요 지 : 대부분의 포물형 수치모형은 경계 외측의 수심이 해안방향으로 변하지 않는 Snell 법칙을 적용할 수 있는 조건으로 국한한다. 여기에는 기존의 Kirby 방법이 있으며 본 논문에서는 이를 수정한 방법 그리고 Dirichlet 경계조건에 대해 자세히 기술하고 이에 대한 수치실험 결과를 제시하였다. 일정 수심 위에 존재하는 원형 천퇴에 대한 수치실험 결과 계산영역 좌우에 가상 수치 조정구역을 두고 본 Dirichlet 경계조건을 적용한 경우가 파고비의 분포가 가장 작게 왜곡되는 것으로 나타났다.

핵심용어 : 포물형 근사식, 수치모형, 원형 천퇴, Snell 법칙, 투과 경계조건

Abstract : Most of parabolic approximation models employ a relatively limited open boundary condition in which there is no depth variation in the longshore direction outside of the computation domain so that Snell's law may be presumed to hold. Existing Kirby's condition belongs to this category and in the paper both modified Kirby's method and Dirichlet boundary condition are presented in detail and numerical results of three methods were shown. Judging from computation to wave propagations over a circular shoal in a constant depth, the method based on present Dirichlet boundary condition with fictitious numerical adjusting regions in both sides of the computation domain gives the least distorted amplitude ratio distribution.

Keywords : parabolic approximate form, numerical model, circular shoal, Snell's law, open boundary condition

1. 서 론

수심이 완만히 변하는 지역을 지나는 파랑의 변형을 지배하는 환경사 파랑식(Berkhoff, 1972)으로부터 유도된 포물형 근사식에 대한 경계조건으로 파랑 진행방향 좌우측에 벽의 존재 유무에 따라 각각 불투과(No Flux) 조건 또는 투과(Open) 조건을 부여할 수 있다. 불투과 조건은 설치된 벽에서 법선방향 유속성분이 0인 조건으로 표현되며 이는 분명하고 수치모형에 적용이 용이하기 때문에 본 논문에서는 이를 다루지 않는다. 이에 반하여 계산영역에서 변형된 또는 산란된 파랑의 에너지가 경계에서 반사되지 않고 외부로 전파되는 투과조건은 계산구역 외측의 주변 수심과 경계에서의 파향 정보가 필요하다. 그러나 비

선형인 경우 파향은 해에 포함되어 있기 때문에 이를 구하기 위해서는 반복법이 요구되는 등 조건의 설정이 쉽지 않다. 본 논문에서는 포물형 근사식 수치모형의 기존 경계조건을 분석하고 이에 기초한 개선된 방법을 제시하고자 한다.

포물형 근사식에 대한 수치모형의 정밀도 향상에 영향을 주는 파랑 비선형성의 중요성(Kirby and Dalrymple, 1984; Kirby and Dalrymple, 1986)과 고차 모형의 필요성(Kirby, 1986a; Kirby, 1986b)에 대해서는 상당한 진전이 있었으나 경계조건(Kirby, 1986c)에 대한 연구는 충분치 않은 것으로 판단된다. 포물형 근사식의 수치모형에는 파랑 진행방향의 좌우 양측에서 경계조건이 필요하다. 거의 모든 포물형 수치모형은 Radder(1979)가 제시한 음해

*한국해양연구원 연안개발연구본부 책임연구원(Coastal Engineering Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. snseo@kordi.re.kr)

**한국해양연구원 연안개발연구본부 책임연구원(Coastal Engineering Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. dylee@kordi.re.kr)

법인 Crank-Nicolson 방법을 사용하며 이 방법에서는 연립방정식이 구성되며 여기에 경계조건이 반영된다. 따라서 이 경우의 해는 경계조건에 아주 민감하게 될 수 있음을 쉽게 예상할 수 있으며 이에 대한 계산 예를 나타내었다. 그리고 Kirby(1986c)가 제시한 경계조건은 매우 특이함을 밝히고 이와 관련된 계산 예도 제시하였다.

경계조건의 부여 방법에 따른 오차를 검증하기 위해 일정 수심 위에 존재하는 원형 천퇴에 의한 파랑변형을 대상으로 하였다. 이 특수한 지형에서는 직교 입사의 엄밀해를 임의 입사각으로 회전하면 주어진 사각 입사의 해를 얻게 되나 포물형 근사모형의 특성상 사용된 근사식에 따라 그리고 입사각의 크기에 따라 상이한 결과를 보이게 된다. 이러한 점에 착안한 Kirby(1986b)는 Padé 근사와 Rational 근사의 결과를 제시하여 고차 포물형 근사모형이 보다 정밀함을 나타내었다. 그러나 직교입사의 경우라도 원형천퇴의 중심이 계산영역 내의 위치에 따라 계산된 파고분포가 다름을 보였고 이를 분석하여 적합한 경계조건의 설정방법을 제시하였다.

파랑 추산모형은 주기와 방향의 불규칙성을 포함하는 불규칙 모형(Panchang et al., 1990; Chawla et al., 1998)으로 이미 확장되었다. 불규칙 모형은 다양한 크기의 주기와 입사각에 대한 계산을 전제로 하며 이런 불규칙 모형의 정밀도 향상을 위해 규칙과 모형에 대한 철저한 분석이 선행되어야 한다. 예로 계산 영역의 격자망이 고정된 하나로 이루어진 경우에는 포물형 근사모형에 내재된 입사각에 의한 오차가 부적절한 경계조건 부여로 인한 오차에 견줄 수도 있음을 배제할 수 없다. 본 논문은 이러한 가능성에 대한 수치결과를 제시하고 동시에 불규칙 모형에도 적용할 수 있는 경계조건 부여방법에 대해서도 기술하였다.

2. 투과 경계조건

서이(2006)가 보인 바와 같이 파랑전파에 관한 포물형 근사모형은 연산자 근사법에 따라 다양한 형태로 나타낼 수 있으나 본 논문은 경계조건의 영향을 분석하는 것이 목적이므로 이 가운데 하나인 식 (1)과 같은 (1,1) Padé 모형을 대상으로 한다(Booij, 1981). 이 때 x 는 외해에서 육지방향으로 y 는 해안선과 평행한 오른손 좌표계를 사용하고 첨자는 관련 변수에 대한 미분을 의미한다(Fig. 1).

$$\zeta_x + \frac{1}{4k^2} \zeta_{xyy} = ik\zeta + \frac{3i}{4k} \zeta_{yy} - \frac{k_x}{2k} \zeta + \frac{3k_x}{8k^3} \zeta_{yy} \quad (1)$$

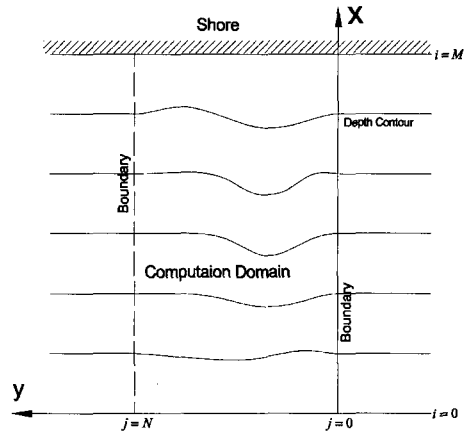


Fig. 1. Definition sketch of computation domain and grid system.

식 (1)은 주기성분이 분리된 해면 함수 $\eta(x, y)$ 에 대한 완경사 파랑식인 식 (2)에 $\zeta = \sqrt{P} \eta$ 를 사용하여 Helmholtz 형태로 변환된 $\nabla^2 \zeta + k_c^2 \zeta = 0$ 으로부터 유도됨을 보일 수 있다.

$$\nabla \cdot (P \nabla \eta) + k^2 P \eta = 0 \quad (2)$$

여기서 $P = CC_g/g$, C 는 파속, C_g 는 군속도, g 는 중력가속도 그리고 k 는 파수이다. 파수는 주어진 주기와 수심의 관계식인 파랑 분산식 (3)으로부터 계산한다.

$$\omega^2 = gk \left[1 + \tanh^5 kh (kA)^2 \frac{\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^5 kh}{8 \sinh^4 kh} \right] \times \tanh \left[kh + \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^4 kA \right] \quad (3)$$

여기서 ω , h 그리고 A 는 각각 파랑의 각주파수, 수심 그리고 진폭이고 이 식은 파랑 비선형성을 포함하는 경험식이다(Kirby and Dalrymple, 1986).

계산 영역은 Fig. 1과 같이 설정된 계산구역을 $M+1$ 개의 x 격자선과 $N+1$ 개의 y 격자선으로 분할·구성한 격자망으로 구성된다. 지배방정식 (1)을 Crank-Nicolson 유한차분법으로 차분화하면 격자점 $i+1$ 번째 행과 j 번째 열에서 식 (4)와 같은 식이 구성된다.

$$a_j^{i+1} \zeta_{j-1}^{i+1} + b_j^{i+1} \zeta_j^{i+1} + c_j^{i+1} \zeta_{j+1}^{i+1} = a_j^i \zeta_{j-1}^i + b_j^i \zeta_j^i + c_j^i \zeta_{j+1}^i, \quad (j=0, \dots, N) \quad (4)$$

식 (4)에서 a , b , c 는 파수 k 의 함수로 모든 격자점에서 계산할 수 있으며 우변은 i 번째 행에서 계산된 값이다. 이 식을 격자점 $j=0, \dots, N$ 에서 각각 적용하면 $i+1$

행에서의 미지수인 ζ_j^{i+1} 들로 구성되는 3각 행렬의 연립 방정식이 얻어진다. 첫 행인 $i=0$ 에서는 초기조건으로 ζ_j^0 의 값들이 주어지며 이를 식 (4)의 우변에 대입하여 구성된 연립방정식을 풀면 $i=1$ 행에서 ζ_j^1 이 구해진다. 이러한 과정을 반복하면 설정된 모든 격자점에서 ζ 를 구할 수 있다.

식 (4)에서 알 수 있듯이 경계인 격자점 $j=0$ 와 $j=N$ 에서 차분식은 각각 격자점 $j=-1$ 과 $j=N+1$ 에서의 변수를 포함하게 되며 이들은 계산 영역 밖에 존재하는 가상점들의 변수이다. 이들 점에서 변수들을 계산영역 내의 점들로 전환하기 위해 경계조건을 이용하는 것이 일반적인 방법이다.

2.1 Kirby의 경계조건

식 (1)과 연관된 투과 경계조건으로 계산영역 밖의 y 방향 수심이 경계에서의 수심과 같아 y 방향의 변화율이 없는 Snell 법칙을 적용할 수 있는 경우에는 식 (5)의 경계조건을 사용할 수 있다(Kirby, 1986b).

$$\zeta_y = im\zeta \tag{5}$$

여기서 m 은 파수벡터의 y 성분으로 이 식은 파고의 y 변화율이 작은 경우에도 성립하는 것을 입증할 수 있다.

식 (5)의 경계조건에 대한 차분식으로 Kirby(1986b)는 식 (6)을 제안하였고 이의 적합성을 기술하였다.

$$\zeta_{j+1}^{i+1} - \zeta_j^{i+1} = \frac{im\Delta y}{2} (\zeta_{j+1}^{i+1} + \zeta_j^{i+1}), \quad j = 0 \text{ or } N-1 \tag{6}$$

식 (6)에서 m 은 i 행에서 계산된 값인 $m \approx -i\zeta_y^i/\zeta_j^i = -2i(\zeta_{j+1}^i - \zeta_j^i)/[\Delta y(\zeta_{j+1}^i + \zeta_j^i)]$ 을 대입하면 식 (7)을 얻게 된다.

$$\zeta_{j+1}^{i+1} \left[1 - i \operatorname{Imag} \left(\frac{\zeta_{j+1}^i - \zeta_j^i}{\zeta_{j+1}^i + \zeta_j^i} \right) \right] - \zeta_j^{i+1} \left[1 + i \operatorname{Imag} \left(\frac{\zeta_{j+1}^i - \zeta_j^i}{\zeta_{j+1}^i + \zeta_j^i} \right) \right] = 0 \tag{7}$$

여기서 $\operatorname{Imag}()$ 는 괄호 안 복소수의 허수 부분을 의미한다.

식 (7)은 Ref/Dif 1 프로그램(Kirby and Dalrymple, 1994)에 사용되었으며 이 프로그램에서는 식 (1)의 ζ 대신 이에 상응하는 식 (2)의 η 를 구한다. 그리고 각 행에서 연립방정식은 경계조건 차분식(7)과 지배방정식의 차분식 (4)로 형성되며 이들은 서로 연계되지 않는 특수한 형태이

다. 그러나 뒤의 계산 예에서 보였듯이 Ref/Dif의 방법을 다른 방법과 비교하면 그 결과는 나쁘지 않다.

한편 해석적 또는 수치적 방법으로 해를 구하는 일반적인 과정은 지배방정식을 만족하는 다수의 식들 가운데 경계조건을 만족하는 식만을 선별하게 된다(Greenberg, 1978; Haberman, 2004; Press et al., 1986). 따라서 일반적인 수치해의 방법을 따르면 식 (4)에 존재하는 가상점의 변수는 경계조건을 이용하여 내부점의 변수로 치환하게 된다. 그러나 Ref/Dif 방법은 경계조건이 차분식과 별개로 사용하였고 이것이 약점이다.

2.2 수정 Kirby의 경계조건

Kirby의 경계조건이 수치해의 일반적인 방법으로 적용 가능한가에 관한 여부를 실험하였다. 식 (7)은 경계가 속한 내부 셀(Cell)의 중간점에 대한 차분이며 이 식은 인접한 외부 셀에서도 동등하게 성립한다. 이로부터 얻은 관계식을 차분식 (4)에 대입하는 일반적인 방법으로 구한 수치해를 시도하였다.

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1-im^*a_0^{i+1} + b_0^{i+1}}{1+im^*} \right) \zeta_0^{i+1} + c_0^{i+1} \zeta_1^{i+1} \\ & = \left(\frac{1-im^*a_0^i + b_0^i}{1+im^*} \right) \zeta_0^i + c_0^i \zeta_1^i \\ & a_N^{i+1} \zeta_{N-1}^{i+1} + \left(b_N^{i+1} + c_N^{i+1} \frac{1+im^*}{1-im^*} \right) \zeta_N^{i+1} \\ & = a_N^i \zeta_{N-1}^i + \left(b_N^i + c_N^i \frac{1+im^*}{1-im^*} \right) \zeta_N^i \end{aligned} \right. \tag{8}$$

식 (8)에서 $m^* = \operatorname{Imag} \{ -(\zeta_{j+1}^i - \zeta_j^i) / (\zeta_{j+1}^i + \zeta_j^i) \}$ 을 사용하였다. 위에서 주어진 경계조건 식 (7)과 (8)은 제 3형식의 경계조건(the 3rd type BC)이다. 식 (8)과 같이 일반적인 방법을 유지하고 또한 지배방정식의 차분식 (4)에 적용할 수 있는 새로운 경계조건에 대한 여러 방법이 시도되었고 그 가운데 한 방법을 소개하기로 한다.

2.3 Dirichlet 경계조건

경계조건의 식 (5)는 앞에서 언급한 바와 같이 아주 포괄적인 조건이나 대부분의 수치모형에서는 Fig. 1과 같은 계산영역, 즉 경계 외측의 y 방향 수심은 경계에서의 수심과 같이 설정하는 경우가 대부분이므로 경계의 외측구역에서 식 (5)는 상수 m 을 갖는 Snell 조건으로 한정된다. 그리고 ζ 를 평균 위상부분과 진폭을 포함한 변동부분으로 분리한 식 (9)을 사용한다.

$$\zeta = e^{i(\int \bar{l} dx + \bar{m} y)} \psi(x, y) \quad (9)$$

여기서 \bar{m} 는 y 방향의 평균수심을 이용하여 계산한 y 평균파수 벡터 $\vec{k} = (\bar{l}, \bar{m})$ 의 성분이며 상수이다. 그리고 평균파수 벡터의 방향은 Snell법칙을 이용하여 계산한다. 이를 식 (1)에 대입하여 정리하고 그 결과 식에 Crank-Nicolson 차분법을 사용한 차분식은 식 (4)의 형태이나 계수 a, b, c 는 상이한 값을 갖는다.

식 (9)에 의한 변환으로 경계 밖의 ψ^{i+1} 는 모두 같아 식 (4)에 해당하는 차분식에 대한 수치해는 식 (10)으로 나타낼 수 있다.

$$\psi_j^{i+1} = \frac{a_j^i + b_j^i + c_j^i}{a_j^{i+1} + b_j^{i+1} + c_j^{i+1}} \psi_j^i, \quad j = -1 \text{ or } N+1 \quad (10)$$

식 (10)은 포물형 미분방정식의 경계조건으로 미지수가 주어진 경우인 제 1형식의 경계조건(Dirichlet BC)이다. 여기서 주목해야 할 것은 식 (10)은 계산영역에서 변형된 산란파의 영향이 경계에 미치지 않는 경우에 성립하며 이 경우에는 주어진 차분식의 엄밀해로 가장 적합한 조건이 된다. 이에 대한 계산 예와 분석을 제 3절로 미룬다.

2.4 수치실험

본 절에서 다른 경계조건들의 성능을 판별하기 위해 일정 사면의 지형과 수심이 일정한 지형에 원형 천뢰가 존재하는 경우에 대해 수치실험을 실시하였다. 첫 계산에는 Kirby(1986c)의 일정 사면에 대한 파고의 변화에 대한 것으로 선형 파랑분산식(진폭이 0인 경우에 해당)을 대상으로 하였다. 해저경사는 1:100이고 계산 영역의 수심은 10 m에서 1 m까지로 x 방향 격자점은 100개($M=99$), y 방향 10개($N=9$, $\Delta y = 25$ m)로 구성된다. 파랑의 제원은 주기 7초, 파고 0.2 m, 입사각 40° 를 사용하여 구한 파고비를 Fig. 2에 나타내었다.

그림에서 실선은 천수계수와 굴절계수를 곱한 $\sqrt{C_{g0} \cos \alpha_0} / \sqrt{C_g \cos \alpha}$ 으로 계산한 값으로 이는 선형 파랑의 에너지 보존법칙으로부터 유도되며 첨자 0은 입사파에 대한 값이다(Dean and Dalrymple, 1984). 그림의 해상도 내에서 3개의 다른 방법으로 계산된 파고비는 동일함을 알 수 있으며 다만 입사각이 커짐에 따라 수치해는 이론해와 차이를 보인다. 이는 사용한 포물형 근사식에 내재된 오차에 의한 것으로 판단된다.

두 번째 수치실험의 지형은 Kirby(1986b)가 제시한 일정 수심위의 원형천뢰가 계산구역 중심선상에 위치한 경우에

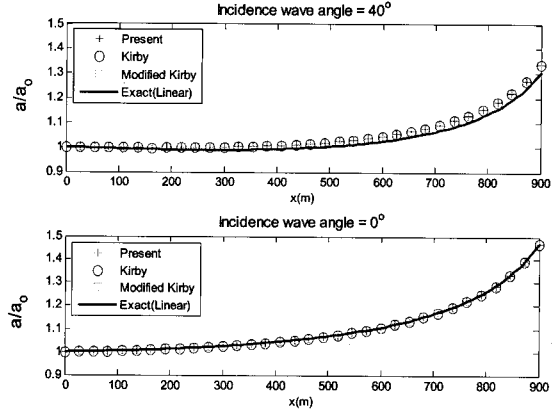


Fig. 2. Amplitude ratios calculated by different implementations of boundary condition for 1:100 sloping bed.

다. 수심은 식 (11)로 주어지고 계산영역은 $0 \leq x, y \leq 25$ m이고 격자간격은 $\Delta x = \Delta y = 0.25$ m이다.

$$h(x, y) = \begin{cases} 0.336 & , r > 4 \\ 0.336 + 0.3 - 0.5 \sqrt{1 - \left[\left(\frac{x-x_c}{5} \right)^2 + \left(\frac{y-y_c}{5} \right)^2 \right]} & , r \leq 4 \end{cases} \quad (11)$$

여기서 (x_c, y_c) 는 천뢰 중심점의 좌표이고 r 은 중심점에서 반경이다. 수치실험의 파랑 제원은 주기 1초, 파고 0.0464 m, 입사각 0° 이고 수치해에서 구한 진폭을 이용하여 식 (3)에서 파수를 구하는 비선형분산식이 사용되

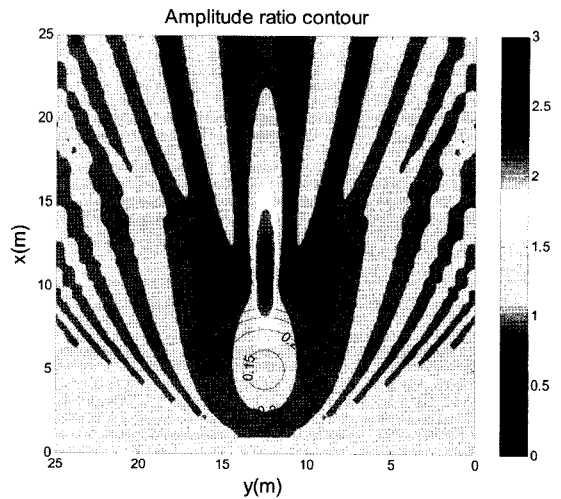


Fig. 3. Amplitude ratio and bathymetry contour calculated by present Dirichlet BC; incidence angle = 0° ; center of shoal at (5, 12.5).

있고 천퇴의 중심점은 (5, 12.5)에 위치한다. 위의 상이한 3개 경계조건을 사용한 모든 수치실험 결과는 계산 영역 중심선에 대칭분포를 보이고 경계부근에서 미세한

차이를 제외하면 거의 같다. 그 가운데 식 (10)의 경계조건을 사용하여 계산한 결과가 Fig. 3이다.

Fig. 3의 파고비 분포는 중심선에 대칭이고 천퇴에 의한 변형된 에너지가 좌우 경계에서 내측으로 반사되지 않고 통과되는 것으로 보여 실제 현상과 매우 흡사한 것으로 판단된다. 이 경우에 대하여 엄밀히는 기존 문헌에 존재하지 않기 때문에 비록 정량적인 측면은 약하나 본 논문에서는 이를 설정된 포물형 근사식의 최적 수치해로 부르기로 한다.

이제 천퇴의 중심점만 (5, 5)에 위치시키고 다른 제원은 동일한 경우에 계산된 파고비 분포를 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 4는 천퇴의 위치가 계산영역의 중심선에서 벗어나 대칭은 아니나 파고비 분포는 천퇴 중심선에 대한 대칭인 것이 옳바르다. 그림에서 알 수 있듯이 모든 계산은 천퇴 중심선에 대한 대칭이 되지 않고 경계가 가까운 우측의 분포는 상당히 왜곡되었다. 그리고 이 경우는 직교입사로 사각입사의 경우보다 포물형 근사모형의 결과는 상대적으로 좋기 때문에 Fig. 4의 왜곡된 계산 결과는 주로 경계조건에 기인하는 것으로 판단된다.

3. 수치 조정구역에 의한 개선

경계조건을 부여하는 식 (10)의 방법은 계산영역 내에서 변형된 파랑에너지의 전파가 영역 내에서 이루어질 정도로 큰 경우에 적용하여야 올바른 결과를 갖게 된다. 그러나 Fig. 4의 결과는 천퇴가 우측에 치우쳐 이 경계 부근에 파랑 에너지는 상당히 변형되고 이들이 경계 밖으로 통과되지 않고 주어진 경계조건을 만족하기 위해 내부로 반사되어 상당히 왜곡된 분포를 보인다. 이를 개선하기 위한 방안으로 실제 계산영역은 천퇴에 대해 대칭이 되게 우측($y < 0$)에 가상의 격자점을 추가한 경우에 식 (10)의 방법으로 계산 결과가 Fig. 5이다.

Fig. 5의 파고비 분포는 천퇴의 중심선에 대한 대칭으로 경계조건에 의한 수치해의 왜곡이 발생하지 않았다. 이러한 결과가 추가된 가상 격자점으로 인한 계산상의 대칭에 의한 것이지를 규명하기 위해 이번에는 좌우 경계 외측에 60개의 격자점을 각각 추가하여 계산하였고 그 결과는 Fig. 5와 동등하였다. 이로부터 가상 격자를 포함한 실제 계산구역이 충분히 커서 파랑에너지가 그 내부에서 전파되는 경우에는 지형의 대칭성이 확보되지 않아도 경계에 의한 에너지 왜곡 분포가 발생하지 않음을 입증할 수 있었다.

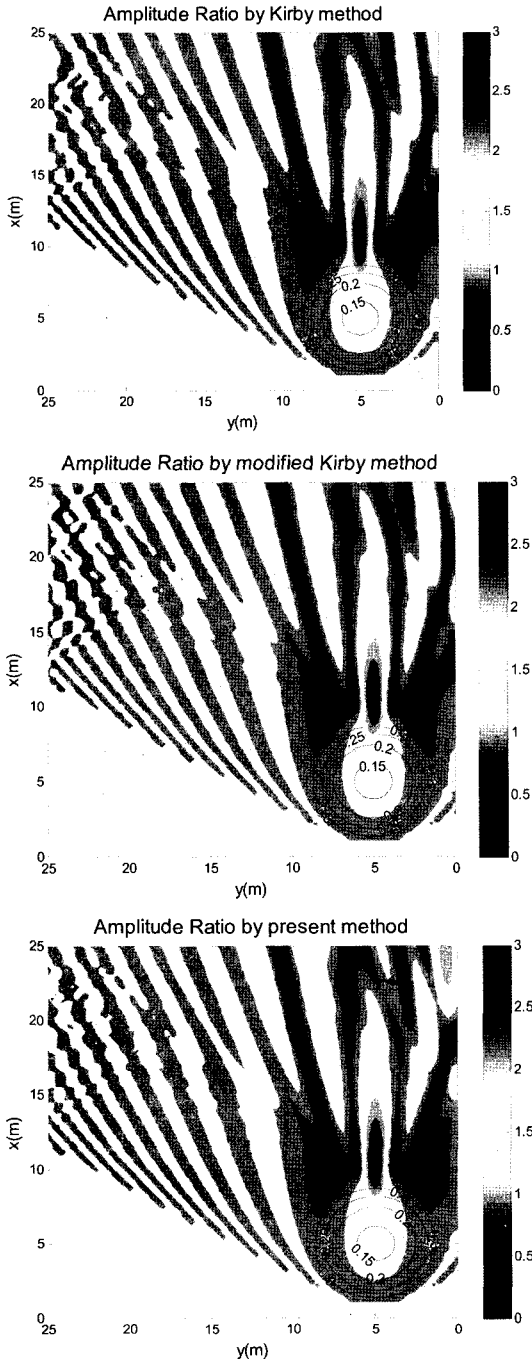


Fig. 4. Distorted amplitude ratio contour calculated by different methods; incidence angle=0°; center of shoal at (5, 5).

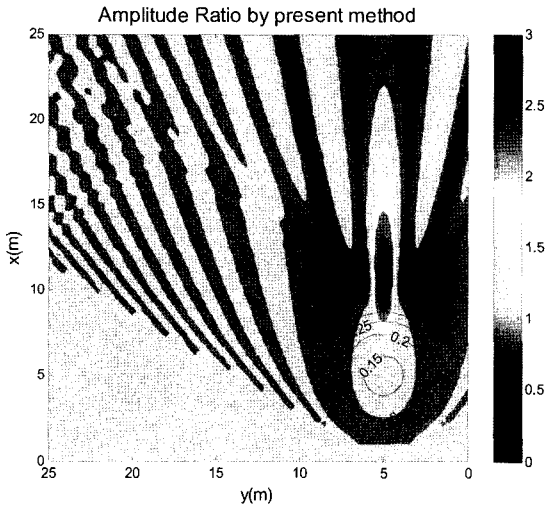


Fig. 5. Calculated amplitude ration contour by present method with extra fictitious grid points on $y < 0$ to make symmetric computation domain.

따라서 경계부근의 에너지 변화가 있는 경우에는 경계 좌우에 충분한 추가의 격자점을 두는 방법이 필요한 것으로 판단된다. 본 논문에서는 이렇게 추가된 격자점이 구성하는 구역을 수치 조정구역이라 부른다. 수치 조정구역의 크기가 클수록 경계조건에 의한 오차는 작게 되나 그 크기의 정도는 주어진 지형과 파랑 제원에 따라 다를 것으로 예상된다. 또한 큰 수치 조정구역의 경우에는 추가 되는 격자점의 수가 많아 계산이 느려지는 단점이 있다. 이를 보완하기 위해 구성 격자의 크기가 경계에서 외측으로 갈수록 커지는 가변 격자에 대한 수치실험을 행하였다. 가변 격자의 크기는 식 (12)로 설정하였다.

$$\Delta y_j = \begin{cases} \Delta y(r_a)^{-1-jd-j}, & j < jd \\ \Delta y & ; jd \leq j \leq ju \\ \Delta y(r_a)^{j-ju-1}, & j > ju \end{cases} \quad (12)$$

여기서 ju 와 jd 는 각각 경계 좌우측의 특정한 격자번호로 이 보다 외측에 있는 격자 크기는 식 (12)에 의해 비율 r_a 의 멱승으로 커지고 실험에서는 1.15와 1.2의 값을 사용하였다.

Fig. 6은 수치 조정구역에 각각 60개의 가변 격자를 사용하여 계산한 결과이며 경계 외측에서 바로 크기가 커지는 경우인 (a)보다는 경계에서 어느 정도의 구간까지는 일정한 격자 길이를 유지하되 그 후에는 간격이 점차 커

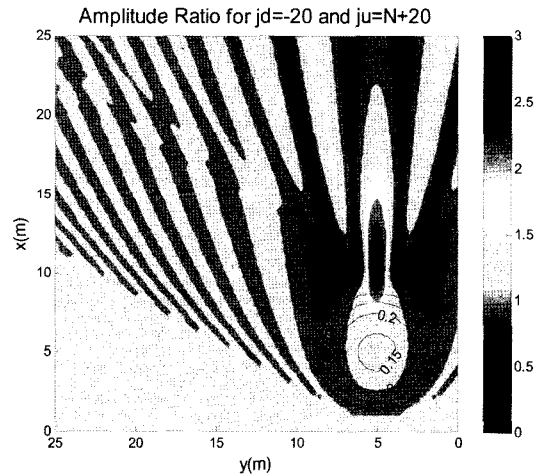
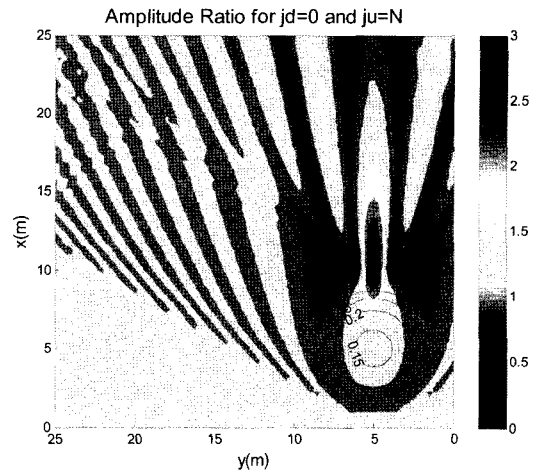


Fig. 6. Calculated amplitude ration contour by present method with different setting of Δy_a in Eq. (10) with $r_a=1.2$.

지는 (b)의 결과가 좋음을 알 수 있다. 즉 계산 구역에서 변형된 에너지의 경계 통과는 수치 조정구역의 격자 크기의 구성 방법에도 영향을 받으며 따라서 일정한 구간에는 균일한 격자를 두는 방법이 좋다. Table 1은 원 계산구역의 y 방향 길이와 하나의 수치 조정구역의 길이를 나타낸 것으로 가변 격자를 사용한 경우 실제 계산에 속한 길이가 상당히 큼을 보여준다. 그리고 수치실험을 분석하면 가변 격자길이의 비 r_a 가 작은 경우가 내부의 파랑에 에너지를 더 잘 통과시키는 것으로 나타났다.

마지막 계산에는 사각입사에 대한 각각 경계조건들의 정확도를 평가하기 위한 것으로 원형 천퇴의 중심이 좌표 (5, 5)에 위치하여 위의 계산 입력자료와 동일하나 다만 직교입사 대신 입사각 30° 에 대한 것이다. 좌우 수치 조

Table 1. Lengths of original computation domain and fictitious numerical adjusting region for different cases

original length		y direction length		Note
		$r_a=1.2$	$r_a=1.15$	
		100 Δy	100 Δy	
Adjusting Region	Case a	338,080 Δy	33,604 Δy	$jd=0, ju=N$
	Case b	(20+8,814) Δy	(20+2,047) Δy	$jd=-20, ju=N+20$

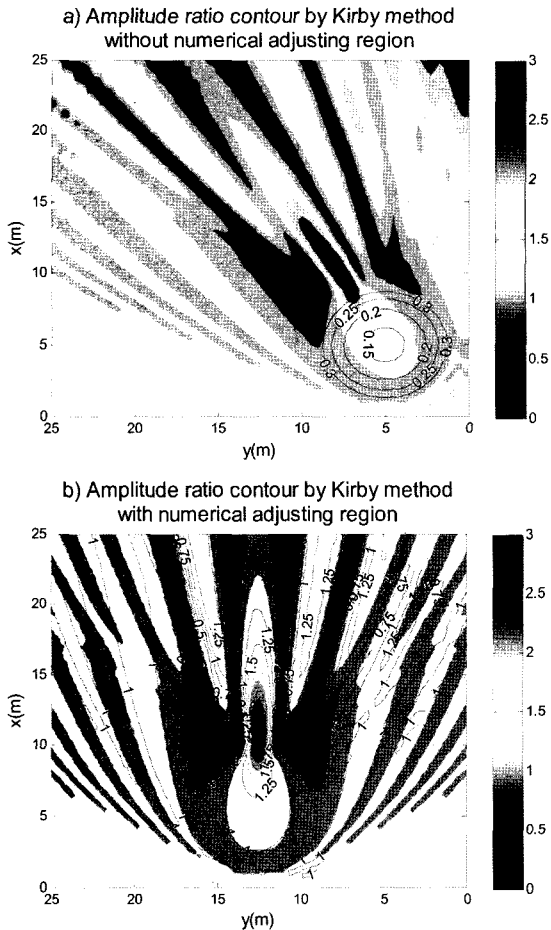


Fig. 7. Calculated amplitude ration contour by Kirby method; angle of incidence 30°.

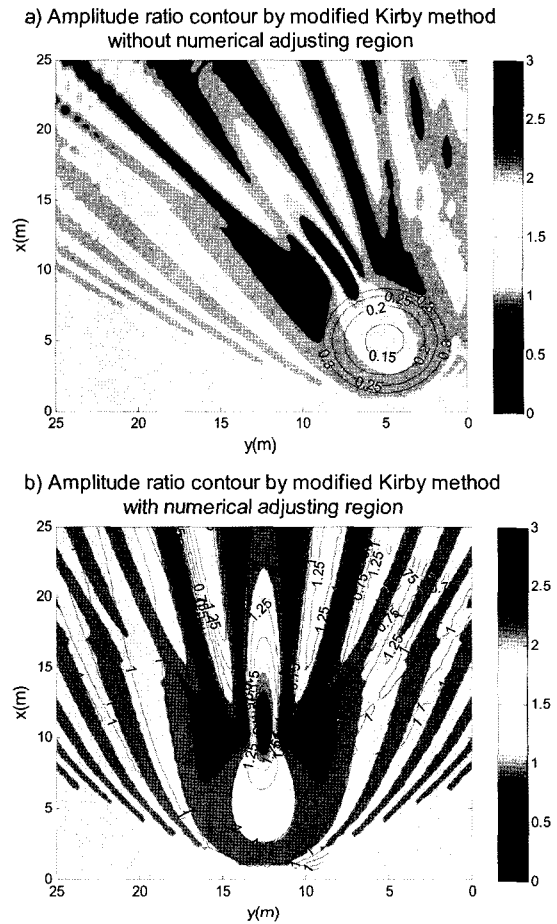


Fig. 8. Calculated amplitude ration contour by modified Kirby method; angle of incidence 30°.

정구역에는 각각 60개의 추가 격자점이 있으며 이 가운데 20개의 격자간격은 계산영역의 격자간격과 동일한 크기를 가지나 그 밖의 점에서 간격의 비는 1.15로 커진다. 논문에서 제시된 그림의 표제 a는 수치 조정구역이 없는 경우이고 b는 이 구역이 실제 계산에 포함된 결과를 직교입사의 좌표계로 변환하여 실선으로 나타낸 것이다. 그림 표제 b에서 기준이 되는 직교입사의 계산에는 위와 동일한 수치 조정구역이 포함되었다.

Fig. 7은 Kirby의 경계조건을 사용하여 얻은 결과를, Fig. 8은 수정 Kirby의 경계조건에 대한 결과를 그리고 Fig. 9는 식 (10)에 의한 결과를 각각 나타낸 것이다. 그림의 결과를 분석하면 식 (10)의 경계조건을 사용하고 계산영역 좌우에 수치 조정구역을 둔 경우가 직교입사의 파고비 분포와 근접함을 보이나 입사각 30°에도 분포의 대칭구조가 상당히 왜곡되어 나타난다. 특히 수치 조정구역이 없이 계산한 결과는 왜곡의 정도가 심해 오차가 더 크

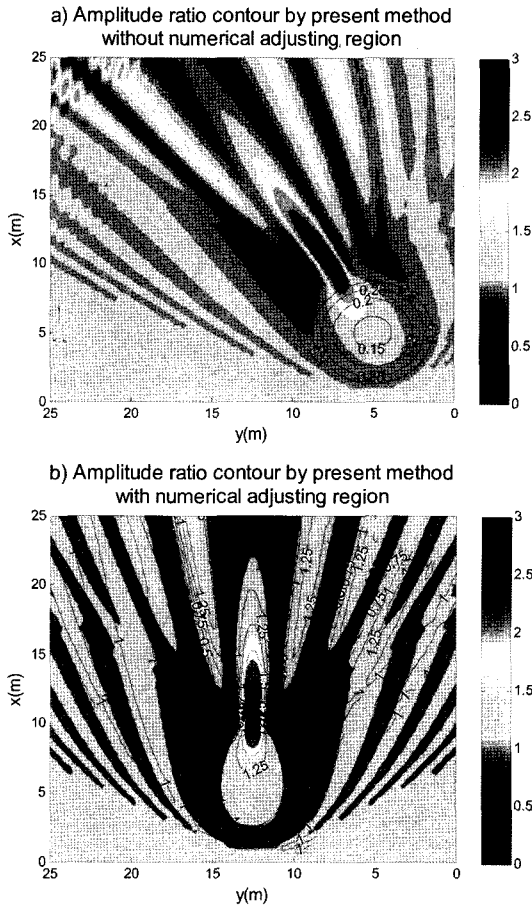


Fig. 9. Calculated amplitude ration contour by present method; angle of incidence 30°.

게 되며 이에 주의하여야 한다.

하나의 격자망을 갖는 불규칙 파랑모형은 방향스펙트럼의 정해진 대표 입사각을 사용하여 다수의 입사각에 대한 계산이 이루어진다(Panchang et al., 1990; Chawla et al., 1998). 그리고 불규칙 파랑에 대한 수치실험에는 벽으로부터 에너지가 반사되지 않도록 흡수장치(wave absorber)를 설치하는 경우가 많으며(Vincent and Briggs, 1989; Vincent and Briggs, 1999) 수치 조정구역은 이 흡수장치의 수치모형 버전이라 할 수 있다.

위에서 계산결과를 분석하여 종합하면 입사각이 큰 경우에는 포물형 근사모형의 오차도 크게 뵈을 예상할 수 있다. 이러한 오차를 줄이기 위해서는 본 논문에서 보인 바와 같이 우선 적정한 수치 조정구역을 포함하고 그리고 Kirby(1986b)가 보인 바와 같이 고차 포물형 근사모형을 사용해야 할 것으로 판단된다.

4. 결 론

포물형 근사모형의 투과 경계조건은 계산영역 내에서 변형된 에너지가 경계에서 반사되지 않고 완전히 통과하는 조건이다. 이 조건은 만족시키기 쉽기 때문에 대부분의 포물형 수치모형은 경계 외측의 수심이 해안방향으로 변하지 않는 Snell 법칙을 적용할 수 있는 조건으로 국한한다. 경계조건은 포물형 수치모형의 해의 정밀도와 밀접한 관계가 있으며 경계조건에 의한 영향을 분석하기 위하여 기존의 Kirby 방법, 이를 수정한 수정 Kirby 방법 그리고 Dirichlet 경계조건을 선정하였다. Kirby의 경계조건 부여방법은 경계조건의 차분식과 지배방정식의 차분식이 각각 독립적인 식으로 존재하는 특이한 형태이므로 본 논문에서는 이들이 연계된 일반적인 방법인 수정 Kirby방법을 제시였다. 그리고 위의 Snell 법칙이 성립하는 경우 주어진 포물형 수치모형의 엄밀해로부터 유도된 Dirichlet 경계조건을 포함하여 이들이 수치해에 미치는 영향을 가능할 수 있는 수치실험 결과를 제시하였다.

일정 수심 위에 존재하는 원형 천퇴에 대한 직교입사와 사각 입사의 수치실험 결과 계산영역 좌우에 가상 수치 조정구역을 두고 본 Dirichlet 경계조건을 적용한 경우가 파고비의 분포가 가장 적게 왜곡되는 것으로 나타났다. 따라서 입사각의 범위가 큰 불규칙 파랑모형에는 계산상 오차를 줄이기 위해 본 논문에서 제시한 수치 조정구역이 반드시 필요하며 동시에 고차 포물형 수치모형의 사용이 요구된다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “해상파랑 관측 및 조사” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사를 드립니다.

참고문헌

서승남, 이종찬 (2006). 수정 완경사 파랑식에 대한 포물형 근사식 모형, 한국 해안-해양공학회, 18(4), 360-371.
 Berkhoff, J.C.W. (1972). Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th Coastal Eng. Conf., 1, 471-490.
 Booij, N. (1981). Gravity waves on water with non-uniform depth and current. Report 81-1, Dept. of Civil Eng., Delft Univ. Technology.
 Chawla, A., Zkan-Haller, H.T. and Kirby, J.T. (1998). Spectral

- model for wave transformation over irregular bathymetry, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 124(4), 189-198.
- Dean, R.G. and Dalrymple, R.A. (1984). *Water wave mechanics for engineers and scientists*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Greenberg, M.D. (1978). *Foundations of Applied Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Haberman, R. (2004). *Applied Partial Differential Equations*, 4th ed., Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Kirby, J.T. (1986a). Higher order approximations in the parabolic equation method for water waves, *J. Geophys. Res.*, 91, 933-952.
- Kirby, J.T. (1986b). Rational approximations in the parabolic equation method for water waves, *Coastal Eng.*, 10, 355-378.
- Kirby, J.T. (1986c). Open boundary condition in parabolic equation method, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 112(3), 460-465.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1984). Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves, *Coastal Eng.* 8, 212-232.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1986). Approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation, *Coastal Eng.*, 9, 545-561.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1994). *Combined Refraction/Diffraction Model REF/DIF 1, Version 2.5. Documentation and User's Manual*, Research Report No. CACR-94-22, Center for Applied Coastal Research, Department of Civil Engineering, University of Delaware, Newark.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T. (1986). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press.
- Radder, A.C. (1979). On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, 95, 159-176.
- Panchang, V.G., Pearce, B.R., Wei, G. and Briggs, M.J. (1990). Numerical simulation of irregular wave propagation over shoal, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 116(3), 324-340.
- Vincent, C.L. and Briggs, M.J. (1989). Refraction-diffraction of irregular waves over a mound, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 115(2), 269-284.
- Vincent, C.L. and Briggs, M.J. (1999). Distribution of extreme waves behind a shoal, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 125(1), 54-56.

Received January 30, 2007

Accepted April 24, 2007