

유체-구조 연성 문제의 형상 최적설계

하윤도*, 김민근*, 조현규**, 조선희†*

서울대학교 조선해양공학과*, 삼성중공업(주)**

Shape Design Optimization of Fluid-Structure Interaction Problems

Yoondo Ha*, Min-Geun Kim*, Hyun-Gyu Cho** and Seonho Cho†*

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering and
Research Institute of Marine Systems Engineering, Seoul National University*
Samsung Heavy Industries Co. Ltd.**

Abstract

A coupled variational equation for fluid-structure interaction (FSI) problems is derived from a steady state Navier-Stokes equation for incompressible Newtonian fluid and an equilibrium equation for geometrically nonlinear structures. For a fully coupled FSI formulation, between fluid and structures, a traction continuity condition is considered at interfaces where a no-slip condition is imposed. Under total Lagrange formulation in the structural domain, finite rotations are well described by using the second Piola-Kirchhoff stress and Green-Lagrange strain tensors. An adjoint shape design sensitivity analysis (DSA) method based on material derivative approach is applied to the FSI problem to develop a shape design optimization method. Demonstrating some numerical examples, the accuracy and efficiency of the developed DSA method is verified in comparison with finite difference sensitivity. Also, for the FSI problems, a shape design optimization is performed to obtain a maximal stiffness structure satisfying an allowable volume constraint.

※Keywords: Fluid-structure interaction problem(유체-구조 연성문제), Navier-Stokes equation (Navier-Stokes 방정식), Adjoint design sensitivity analysis(애드조인트 설계민감도법), Shape design optimization(형상최적설계)

1. 서론

유체-구조 연성문제는 조선, 항공, 자동차 등 주요 산업 전반에 걸쳐 매우 중요한 주제이다. 이

러한 문제는 본질적으로 비선형성을 가지며 두 개의 다른 분야 문제가 연성되기 때문에 해석상 많은 어려움이 따른다. Ghattas 와 Ni 는 유한요소해석을 기반으로 정상상태 비선형 유체-구조 연성문

접수일: 2006년 12월 8일, 승인일: 2007년 2월 1일

† 교신저자: secho@snu.ac.kr, 02-880-7322

제를 유체의 비선형성, 구조의 대변형, 그리고 경계면 조건을 고려한 완전 연성해석을 수행하였다 (Ghattas and Li 1995). Lund와 Moller는 이러한 연성해석법을 바탕으로 경계면을 매개변수를 이용하여 표현하고 형상 민감도를 얻은 후 형상 최적설계를 수행하였다(Lund et al. 2001). 그러나 설계민감도 계산시간의 부담으로 상용화나 대형 문제의 최적설계로의 확장은 어려운 현실에 직면해 있다. 유체-구조 연성문제는 경계면을 통하여 상호작용이 발생하는 문제이므로 구조해석에서는 경계면에서 변위가 강제된다. 강제변위가 있는 비선형 문제에 대하여 Cho와 Jung은 변분식을 유도하고 설계민감도 해석 및 위상 최적설계를 수행하였다(Cho and Jung 2003).

지금까지의 유체-구조 연성해석에서는 유체와 구조를 따로 계산하여 반복적으로 해를 구하는 방법(iterative method)이 널리 사용되어 왔다. 그러나 이 방법은 계산시간의 부담이 크고, 일반적으로 유체에서 계산된 하중을 고체의 하중으로 반영하지만 고체가 변형에 따른 유체장의 변화를 동시에 반영하는 완전 연성문제를 구현하지 못한다. 또한 최적설계 시 연성문제의 해와 민감도를 모든 반복 계산 단계마다 다시 계산해야 하는 어려움이 있기 때문에 반복 계산법은 연성문제 해의 수렴성과 형상 최적설계를 수행하는데 많은 어려움이 있었다. 이를 극복하기 위해서 유체와 구조의 비선형성을 고려하면서 두 영역을 반복 계산 없이 하나의 대수 방정식을 이용하여 완전 연성시켜 해를 얻는 방법을 제안한다. 유체-구조 연성문제에서 정상상태 비압축성 뉴턴 유체(Steady-state incompressible Newtonian fluid)를 고려하였고, 구조물 해석은 전역 라그랑지안(Total Lagrangian) 정식화를 사용하여 구조물 표면에서 작용하는 표면력(Traction)을 변형 전 고체영역에서 제 1 피올라-컬코프 응력(First Pola-Kirchhoff stress)으로 표현하였다(Ghattas and Li 1995). 또한 애조인 설계민감도 법(Adjoint Design Sensitivity Analysis; Haug and Choi 1986)을 유체-구조 연성문제에 적용하였다. 이 방법에서는 이미 수렴된 해와 자코비안(Jacobian)을 이용하기 때문에 해석에 비해

매우 효율적으로 설계민감도를 구할 수 있다는 장점이 있다(하윤도, 조선희 2004).

본 연구에서는 유체-구조 연성문제를 정식화하고 유한요소법을 이용하여 완전 연성된 해를 구한다. 압력, 속도, 변위 등에 대하여 구조물의 형상에 대한 형상 설계민감도를 구하고 이를 이용하여 형상 최적설계를 수행한다. 유체-구조 연성문제에 대한 최적설계에서는 주어진 체적에 대해서 구조물의 변형 에너지가 최소가 되도록 하였다. 2차원의 최적화된 형상을 보다 정확하게 묘사하기 위해 베지어-곡면(bi-cubic Bezier patch)을 사용하였고, 설계변수로는 베지어-곡면의 조정점(Control point)을 사용하였다. 또한 조정점에 제약 조건을 가하여 대변형을 고려한 형상 최적설계 모델의 해석 시 유한요소의 과도한 뒤틀림을 방지하였다. 수치 예제를 통해 제안된 설계민감도 해석법이 매우 효율적이며, 정확하다는 것을 보이고, 이를 이용한 형상 최적설계를 수행하였다. 여기서 제시한 방법은 계산시간을 단축시킬 수 있기 때문에 기존의 비선형 문제가 가지는 계산 시간의 부담을 줄일 수 있으며, 병렬화를 통하여 조선해양분야의 대형 문제에 적용한다면, 주어진 유체장에 의한 저항을 최소화하는 초기 선형설계에 활용될 수 있을 것이다.

2. 유체-구조 연성문제

2.1 정상 상태 유체-구조 연성문제

Fig. 1과 같은 유체영역 Ω_F 와 변형 전의 고체영역 Ω_S 을 포함한 열린 영역 Ω 을 고려하자. 각각의 경계는 $\Gamma_F = \Gamma_F^1 \cup \Gamma_F^2$, $\Gamma_S = \Gamma_S^1 \cup \Gamma_S^2$ 이고, 서로 독립적이다. 닫힌 경계는 $\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma_S \cup \Gamma_I$ 로 표현될 수 있고, 완전한 유체와 고체 영역은 각각 $\bar{\Omega}_F = \Omega_F \cup \Gamma_F$ 과 $\bar{\Omega}_S = \Omega_S \cup \Gamma_S$ 로 정의한다. 여기서 Γ_n^F 와 Γ_d^F 는 유체 영역에서의 표면력 경계(Traction Boundary)와 속도 경계(Velocity Boundary)를 의미하며, Γ_n^S 와 Γ_d^S 는 구조 영역에서의 표면력 경계, 변위 경계를 나타낸다. 또한 Γ_{I_0} 유체-구조 사이의 경계를 나타낸다. 유체-구조 완전 연성 문제에서는 정상 상태의 점성, 비압

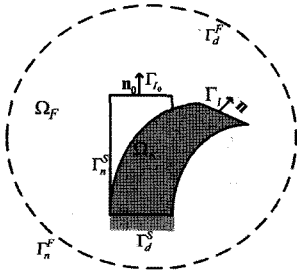


Fig. 1 Fluid-structure interaction problem

축성, 뉴턴 유체를 지배하는 네비어 스톡스 방정식 (Navier-Stokes equation) 과 등방성과균질성을 갖는 탄성 고체의 대변형에 대한 평형 방정식 (Equilibrium equation)을 이용한다. 일반적으로 유체 영역은 오일러리안 프레임(Eulerian frame)으로, 고체 영역은 라그랑지안 프레임으로 묘사한다.

2.2 유체 영역의 변분 방정식

유체 영역에서의 네비어 스톡스 방정식과 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j}^F + b_i^F = \rho u_{i,j} u_j \quad (1)$$

$$u_{k,k} = 0 \quad (2)$$

여기서 σ^F 과 b^F 는 각각 코시 응력(Cauchy stress)과 유체의 체적력이다. 변형율-변위 관계식과 구성 방정식은 각각 다음과 같다.

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}^F = -p\delta_{ij} + 2\mu_F d_{ij} \quad (4)$$

여기서 p 와 μ_F 는 각각 유체 압력과 점성계수를 나타낸다. 유체 영역은 다음과 같은 경계조건을 가진다.

$$\sigma^F n^F = \hat{t}^F \text{ on } \Gamma_n^F \quad (5)$$

$$u = \hat{u}, \text{ on } \Gamma_d^F \quad (6)$$

여기서 \hat{t}^F , \hat{u} , \bar{u} 은 각각 경계 표면력, 경계 속도, 가상 속도이다. n_F 은 바깥 방향을 향하는 유체 표면의 법선 벡터를 의미한다.

변분 방정식의 유도를 위해 식 (1)과 (2)에 다음과 같이 가상 속도 \bar{u} 와 가상 압력 \bar{p} 를 이용하여 적분 방정식을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\int_{\Omega_F} \bar{u} \cdot [\rho_F (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \text{div } \sigma_F] d\Omega = 0 \quad (7)$$

$$\int_{\Omega_F} \bar{p} \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (8)$$

여기서 해의 공간은 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{u} \in \bar{U} = \{ \bar{u} | \bar{u} \in H_0^1(\Omega^F), \bar{u} = 0 \text{ on } \Gamma_d^F \} \quad (9)$$

$$\bar{p} \in \bar{P} = \{ \bar{p} | \bar{p} \in L^2(\Omega^F) \} \quad (10)$$

유체영역의 경계에서는 표면력 \hat{t}^F 가 없다고 가정한다. 속도 \bar{u} 는 경계 조건을 만족시키므로, 식 (7)과 식 (8)에 부분 적분을 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$a(\mathbf{u}, \bar{u}) + b(p, \bar{u}) + c(\mathbf{u}, \bar{u}) = \ell_F(\bar{u}) + \int_{\Gamma} \bar{u}_i \sigma_{ij}^F n_j d\Gamma \quad (11)$$

여기서 각각의 에너지, 하중형식은 다음과 같다.

$$a(\mathbf{u}, \bar{u}) = \int_{\Omega^F} \bar{u}_{i,j} \mu_F (u_{i,j} + u_{j,i}) d\Omega \quad (12)$$

$$b(p, \bar{u}) = - \int_{\Omega^F} p \bar{u}_{i,i} d\Omega = 0 \quad (13)$$

$$c(\mathbf{u}, \bar{u}) = \int_{\Omega^F} \rho \bar{u}_i u_j u_{i,j} d\Omega \quad (14)$$

그리고

$$\ell_F(\bar{u}) = \int_{\Omega^F} \rho \bar{u}_i b_i^F d\Omega + \int_{\Gamma^F} \bar{u}_i \sigma_{ij}^F n_j d\Gamma \quad (15)$$

여기서 $c(\mathbf{u}, \bar{u})$ 는 비선형성을 가진다. 따라서 네비어 스톡스 방정식의 변분식은 비선형 방정식이 된다. 마찬가지로 연속 방정식 (2)에 대해서도 가상 압력 \bar{p} 를 이용하여 변분식을 구해보면 다음과 같다.

$$b(\bar{p}, \mathbf{u}) = 0 \quad (16)$$

2.3 고체 영역의 변분 방정식

대 변형이 수반되는 정적 구조문제에서 전역 라그랑지안 정식화를 이용하여 표현한 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P}^0 + \mathbf{b} = 0 \quad (17)$$

여기서, \mathbf{P}^0 , \mathbf{b} 은 각각 제 1 피올라-커코프 응력과 고체 체적력을 의미한다. 제 1 피올라-커코프 응력 \mathbf{P}^0 은 변형 구배를 이용하여 다음과 같이 제 2 피올라-커코프 0. \mathbf{S} 로 변환될 수 있다.

$$F_{iB} S_{BA} = x_{i,B} S_{BA} = P_{Ai}^0 \quad (18)$$

제 1 피올라-커코프 응력은 대칭성이 없는 반면, 제 2 피올라-커코프 응력은 대칭성이 보장되므로

정식화 및 수치해석에 유리하다.

고체구조물의 변형률-변위 관계식과 탄성 구성 방정식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}[\nabla_0 \mathbf{z} + \nabla_0 \mathbf{z}^T + \nabla_0 \mathbf{z} \cdot \nabla_0 \mathbf{z}^T] \quad (19)$$

$$\mathbf{S} = \lambda(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (20)$$

여기서 변형률 텐서는 피올라-커코프 응력과 에너지 대응관계를 가지는 그린-라그랑지 텐서 (Green-Lagrange tensor)를 사용하였다.

표면력 경계와 변위 경계는 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{t} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{n}^s = \hat{\mathbf{t}}^s \text{ on } \Gamma_n^s \quad (21)$$

$$\mathbf{z} = \hat{\mathbf{z}} \text{ on } \Gamma_d^s \quad (22)$$

\mathbf{n}^s , $\hat{\mathbf{t}}^s$, $\hat{\mathbf{z}}$ 는 각각 변형 전 구조물의 법선 벡터, 경계 표면력, 경계 변위이다. 여기서 가상변위 공간은 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathbf{Z}} = \{ \bar{\mathbf{z}} | \bar{\mathbf{z}} \in H_0^1(\Omega), \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_d^s, \bar{\mathbf{z}}^F = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_d^F \} \quad (23)$$

이를 이용하여 구성된 적분식은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega_s} \bar{\mathbf{z}} \cdot [\nabla_0 \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})] d\Omega = 0 \quad (24)$$

가상 변위와 식 (17)-(20)을 이용하면 다음과 같은 변분식을 얻을 수 있다.

$$d(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \ell_S(\bar{\mathbf{z}}) + \int_{\Gamma_n^s} \bar{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{n}^s d\Gamma \quad (25)$$

여기서 에너지식과 하중식은 각각 다음과 같다.

$$d(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega_s} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{z}) \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \ell_S(\bar{\mathbf{z}}) = & \int_{\Omega_s} \bar{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_d^s} \bar{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{n}^s d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_s^s} \bar{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{n}^s d\Gamma \end{aligned} \quad (27)$$

$d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$ 가 비선형성을 가지므로, 평형 방정식의 변분식은 비선형 방정식이 된다.

2.4 경계면 조건

제 2 피올라-커코프 응력 텐서와 코시 응력 텐서는 변형 전 경계면 상의 점 \mathbf{s}' 와 변형 후 경계면 상의 점 \mathbf{s}'' 에서 대응관계를 갖는다.

$$\mathbf{P}^o(\mathbf{s}') \mathbf{n}^{I_s}(\mathbf{s}') = \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{s}'') \mathbf{n}^{I_s}(\mathbf{s}'') \quad (28)$$

가상함수를 경계면에서 $\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{s}') = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{s}'')$ 와 같이 동일한 함수 공간을 갖도록 선택하면 아래의 식이 성립된다.

$$\int_{\Gamma_n^s} \bar{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{n}^{I_s} d\Gamma = \int_{\Gamma_n^s} \bar{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^s \mathbf{n}^{I_s} d\Gamma \quad (29)$$

식 (28)을 이용하면 식(29)는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_n^s} \bar{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{n}^{I_s} d\Gamma + \int_{\Gamma_n^F} \bar{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^F \mathbf{n}^{I_F} d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_n^F} \bar{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^S \mathbf{n}^{I_s} + \boldsymbol{\sigma}^F \mathbf{n}^{I_F}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

경계 면에서의 표면력 연속조건은

$$\boldsymbol{\sigma}^S \mathbf{n}^{I_s} + \boldsymbol{\sigma}^F \mathbf{n}^{I_F} = 0 \quad (31)$$

이므로 식 (11)과 (25)는 식 (28)을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + b(p, \bar{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + b(\bar{p}, \mathbf{u}) \\ = \ell_F(\bar{\mathbf{u}}) + \ell_S(\bar{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (32)$$

식 (32)에는 식 (16)이 결합되어 있다.

2.5 비선형 방정식의 선형화

앞서 구성된 식 (32)는 $c(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$ 와 $d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$ 가 비선형성을 가지므로 비선형 방정식이다. 수치 계산을 위해서는 다음과 같은 선형화가 필요하다. (n+1) 평형상태에서 식 (32)를 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a^{(n+1)}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + b^{(n+1)}(p, \bar{\mathbf{u}}) + c^{(n+1)}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + d^{(n+1)}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \\ + b(\bar{p}, \mathbf{u}) = \ell_F(\bar{\mathbf{u}}) + \ell_S(\bar{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (33)$$

${}^{n+1}\mathbf{u}$, ${}^{n+1}p$, ${}^{n+1}\mathbf{z}$ 의 증분적 분해(Incremental decomposition)는 다음과 같다.

$${}^{n+1}\mathbf{u} = {}^n\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}, \quad (34)$$

$${}^{n+1}p = {}^n p + \Delta p, \quad (35)$$

$${}^{n+1}\mathbf{z} = {}^n\mathbf{z} + \Delta\mathbf{z}. \quad (36)$$

식 (34)-(36)을 식 (33)에 대입하고 고차 항을 무시하면, 식 (33)은 다음과 같이 선형화된다.

$$\begin{aligned} & a(\Delta\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + b(\Delta p, \bar{\mathbf{u}}) + \hat{c}({}^n\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \\ & + \hat{d}({}^n\mathbf{z}; \Delta\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + b(\bar{p}, \Delta\mathbf{u}) \\ & = \ell_F(\bar{\mathbf{u}}) + \ell_S(\bar{\mathbf{z}}) - a({}^n\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) - b({}^n p, \bar{\mathbf{u}}) \\ & - c({}^n\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) - d({}^n\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) - b(\bar{p}, {}^n\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (37)$$

여기서

$$\hat{c}({}^n\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \int_{\Gamma_n^F} \rho_F \bar{\mathbf{u}} \cdot [({}^n\mathbf{u} \cdot \nabla) \Delta\mathbf{u} + (\Delta\mathbf{u} \cdot \nabla) {}^n\mathbf{u}] d\Omega \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \hat{d}({}^n\mathbf{z}; \Delta\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}({}^n\mathbf{z}; \bar{\mathbf{z}}) : \mathbf{C} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}({}^n\mathbf{z}; \Delta\mathbf{z}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\eta}}(\Delta\mathbf{z}; \bar{\mathbf{z}}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}({}^n\mathbf{z}) d\Omega \end{aligned} \quad (39)$$

3. 설계 민감도 해석

3.1 연속체 기반의 형상 설계민감도 해석

Fig. 2와 같은 설계영역의 변분을 고려하자.

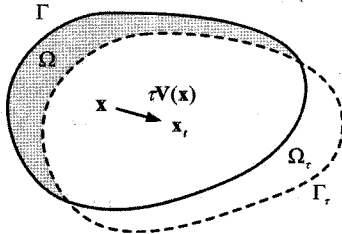


Fig. 2 Variation of domain

변환 함수 T 를 정의하는 가상의 시간 역할로서 파라미터 τ 를 정의하자. 변환 관계 $T: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_\tau$, $\mathbf{x} \in \Omega$ 에 의해 $\mathbf{x}_\tau = T(\mathbf{x}, \tau)$ 를 정의할 수 있다. T 는 테일러 급수를 사용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$T(\mathbf{x}, \tau) = T(\mathbf{x}, 0) + \tau \frac{\partial T(\mathbf{x}, 0)}{\partial \tau} + O(\tau^2) \cong \mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0) \quad (40)$$

속도장 \mathbf{V} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_\tau, \tau) = \frac{d\mathbf{x}_\tau}{d\tau} = \frac{dT(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad (41)$$

영역에 대한 범함수 ψ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\psi = \int_{\Omega_\tau} g(\mathbf{z}_\tau, \nabla \mathbf{z}_\tau) d\Omega_\tau \quad (42)$$

범함수 ψ 를 영역 Ω 에서 미분 (Material derivative)을 취하면 다음과 같다.

$$\dot{\psi} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} g_z \dot{\mathbf{z}} - g_{vz} (\nabla \mathbf{z}^T \mathbf{V}) + g_{vz} \nabla \dot{\mathbf{z}} \\ -g_{vz} \nabla (\nabla \mathbf{z}^T \mathbf{V}) + \text{div}(g \mathbf{V}) \end{bmatrix} d\Omega \quad (43)$$

여기서 $\dot{\mathbf{z}}$ 와 \mathbf{z}' 는 각각 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{z}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x})) - \mathbf{z}(\mathbf{x})}{\tau} \right] \quad (44)$$

$$\mathbf{z}' = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x}) - \mathbf{z}(\mathbf{x})}{\tau} \right] \quad (45)$$

또한 경계 범함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\psi = \int_{\Gamma} g(\mathbf{z}) d\Gamma \quad (46)$$

주어진 경계 범함수를 경계에 대해 일차 변분을

취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi'_V &\equiv \frac{d}{d\tau} \int_{\Gamma_\tau} g_\tau(\mathbf{z}_\tau) d\Gamma_\tau \Big|_{\tau=0} \quad (47) \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ g'(\mathbf{z}) + (\nabla g(\mathbf{z})^T \mathbf{n} + \kappa g(\mathbf{z})) \mathbf{V}^T \mathbf{n} \right\} d\Gamma \end{aligned}$$

여기서 $\kappa = \text{div} \mathbf{n}$ 는 곡률을 나타낸다.

3.2 애조인 설계민감도 해석

일반적으로 최적설계를 수행할 때 설계변수가 많은 경우에는 설계구배를 이용한 방법(Gradient based method)이 효율적이다. 구배를 이용하여 최적화를 수행하기 위해서는 설계민감도를 빠르고 정확하게 구하는 것이 중요하다. 설계민감도 해석법 중 연속체 기반으로 한 애조인 설계민감도법이 가장 많이 쓰인다. 이 방법은 연속체 기반으로 구배를 구하였기 때문에 매우 정확하며 이미 구성된 탄젠트를 이용하기 때문에 몇몇의 성능함수에 대하여 빠르게 설계민감도를 얻을 수 있는 장점이 있다. 구조 변형에너지에 대한 설계민감도를 구하기 위해 다음과 같이 목적함수를 정하자.

$$\psi \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n+1)}(\mathbf{z}) \varepsilon_{ij}^{(n+1)}(\mathbf{z}) d\Omega \quad (48)$$

식 (48)의 일차 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\psi' = \int_{\Omega_s} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n+1)}(\mathbf{z}) \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)}(\mathbf{z}; \dot{\mathbf{z}}) d\Omega + \psi'_{ex} \quad (49)$$

여기서

$$\begin{aligned} \psi'_{ex} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n+1)}(\mathbf{z}) ({}^{n+1}z_{i,q} V_{q,j} + {}^{n+1}z_{j,q} V_{q,i}) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n+1)}(\mathbf{z}) ({}^{n+1}z_{m,j} {}^{n+1}z_{m,q} V_{q,i} + {}^{n+1}z_{m,i} {}^{n+1}z_{m,q} V_{q,j}) d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n+1)}(\mathbf{z}) \varepsilon_{kl}^{(n+1)}(\mathbf{z}) \text{div} \mathbf{V} d\Omega \quad (50) \end{aligned}$$

애조인 방법을 사용하기 위해 애조인 시스템 식을 다음과 같이 구성한다.

$$\begin{aligned} &\alpha(\bar{\xi}, \bar{\xi}) + b(\bar{\phi}, \bar{\xi}) + \hat{c}({}^{n+1}\mathbf{u}, \bar{\xi}, \bar{\xi}) + \hat{d}({}^{n+1}\mathbf{z}, \bar{\zeta}, \bar{\zeta}) + b(\bar{\phi}, \bar{\xi}) \\ &= \int_{\Omega_s} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n+1)}(\mathbf{z}) \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(n+1)}(\mathbf{z}; \dot{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (51) \end{aligned}$$

여기서 $\bar{\xi}$, $\bar{\phi}$, $\bar{\zeta}$ 는 제차 경계조건을 만족시키는 애조인 해이다. ${}^{n+1}\dot{\mathbf{u}}$, ${}^{n+1}\dot{\mathbf{p}}$, ${}^{n+1}\dot{\mathbf{z}}$ 도 역시 제차 경

계조건을 만족시키므로, 식 (51)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\alpha^{(n+1)}\dot{\mathbf{u}}, \xi) + b(\phi, {}^{n+1}\dot{\mathbf{u}}) + \widehat{c}({}^{n+1}\mathbf{u}, {}^{n+1}\dot{\mathbf{u}}, \xi) + \widehat{d}({}^{n+1}\mathbf{z}, {}^{n+1}\dot{\mathbf{z}}, \zeta) + b({}^{n+1}\dot{\mathbf{p}}, \xi) = \int_{\Omega_s} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}({}^{n+1}\mathbf{z}) \widehat{\varepsilon}_{ij}({}^{n+1}\mathbf{z}, {}^{n+1}\dot{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (52)$$

ξ, ϕ, ζ 는 제차 경계조건을 만족시키므로 식 (52)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\alpha^{(n+1)}\dot{\mathbf{u}}, \xi) + b(\phi, {}^{n+1}\dot{\mathbf{u}}) + \widehat{c}({}^{n+1}\mathbf{u}, {}^{n+1}\dot{\mathbf{u}}, \xi) + \widehat{d}({}^{n+1}\mathbf{z}, {}^{n+1}\dot{\mathbf{z}}, \zeta) + b({}^{n+1}\dot{\mathbf{p}}, \xi) = -a'_v({}^{n+1}\mathbf{u}, \xi) - b'_v({}^{n+1}p, \xi) - c'_v({}^{n+1}\mathbf{u}, \xi) - d'_v({}^{n+1}\mathbf{z}, \zeta) - b'_v(\phi, {}^{n+1}\mathbf{u}) - \ell'_F(\xi) - \ell'_S(\zeta) \quad (53)$$

여기서 식 (52), (53)의 좌항은 서로 같으므로 식 (49)는 최종적으로 다음과 같이 쓸 수 있다. (조현규 2004)

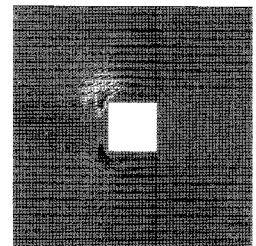
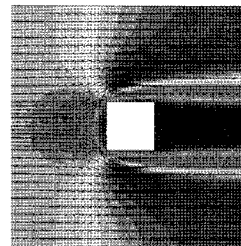
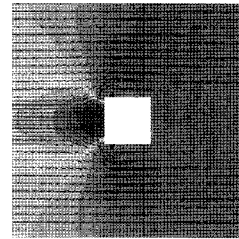
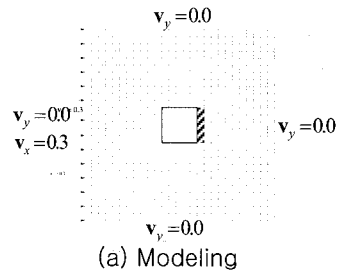
$$\psi' = -a'_v({}^{n+1}\mathbf{u}, \xi) - b'_v({}^{n+1}p, \xi) - c'_v({}^{n+1}\mathbf{u}, \xi) - d'_v({}^{n+1}\mathbf{z}, \zeta) - b'_v(\phi, {}^{n+1}\mathbf{u}) - \ell'_F(\xi) - \ell'_S(\zeta) + \psi'_{ex}({}^{n+1}\mathbf{z}) \quad (54)$$

식 (51)은 지배방정식과 같은 형태의 시스템 방정식이다. 또한, 탄젠트는 이미 구해져 있기 때문에 새롭게 구성할 필요가 없다. 식 (51)을 풀어서 얻어진 애조인 해, ξ, ϕ, ζ 를 구하여, 식 (54)에 대입하면 변형에너지에 대한 설계민감도를 쉽게 얻을 수 있다.

4. 수치 예제

4.1 유체-구조 연성 문제의 해석

본 논문의 수치 예제들은 유체-구조 문제에서 형상 최적설계의 적용 가능성을 확인하는 것을 목표로 하며 실제적 문제에 영향을 미칠 수 있는 다른 요인(격자수 등)들은 무시한 이상화된 모델을 다룬다. Fig. 3은 왼쪽으로부터 속도 $v=0.3\text{m/s}$ 의 유체력을 받는 구조물의 해석 결과 중 압력분포 및 속도장을 나타낸 것이다. 재료 물성치는 유체의 밀도와 점성계수는 각각 $\rho=1.0$ 와 $\mu=0.1$ 이고 고체의 탄성계수와 푸아송 비는 각각 $E=10$, $\nu=0.3$ 이다. 재료 물성치와 속도는 고체의 변형이 크게 발생하도록 가상적으로 정한 물성치이며, 대칭적인 경계조건이 주어졌을 때 속도 및 압력의



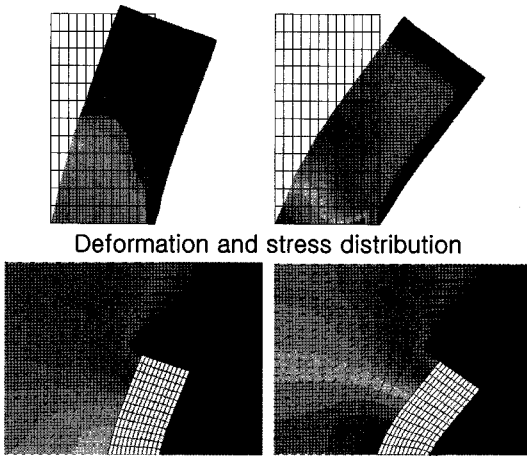
(c) x-dir velocity

(d) y-dir velocity

Fig. 3 Analysis of FSI problem

대칭적 분포로써 작성된 해석코드의 신뢰성을 확인할 수 있다.

본 논문에서 제시한 해석법은 대변형, 소변형을 (Large deformation, small strain)을 고려한 비선형 문제를 다룰 수 있다. Fig. 4는 0.6m/s 와 0.9m/s의 유체력을 받는 구조물의 변형상태와 주위의 압력분포를 나타낸 Fig.이다. Fig.에서 볼 수 있듯이 제시된 해석법이 비교적 큰 변형을 일으키는 구조물의 해석까지 가능하다는 것을 보여준다. 유체-구조 완전연성 해석에서 잠김(Locking) 현상을 방지하기 위하여 9 노드 유한요소를 사용하였고 연성장의 자유도가 기존의 유한요소해석에 비해 크며 탄젠트가 분산된 행렬 (Sparse matrix) 형태를 가지므로 병렬화가 이루어지지 않은 현 단계의 연구에서는 제한된 크기의 모델만을 다룰 수 있다.



Deformation and stress distribution
Press distribution
(a) v=0.6m/s (b) v=0.9m/s

Fig. 4 Large deformation analysis of FSI

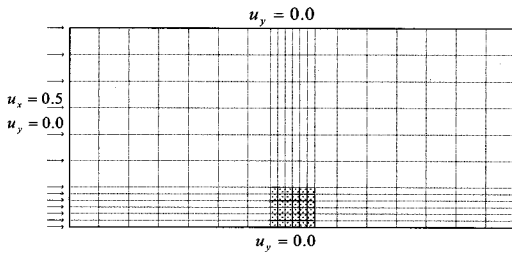


Fig. 5 Solid in fluid model

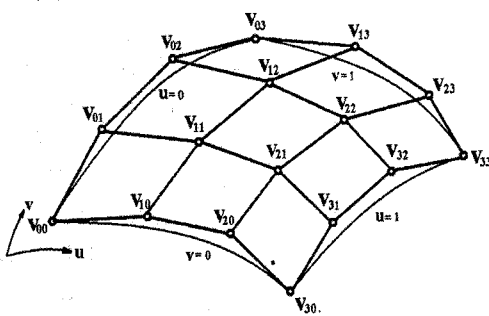


Fig. 6 Bi-cubic Bezier patch

4.2 형상 최적설계

Fig. 5 와 같이 사각 구조물 (Dotted area)이 유체장 내에 존재하는 경우를 생각하자. 고체의 형상을 나타내기 위해서 Fig. 6 의 쌍 3 차

베지어 곡면을 사용하였고 그 식은 다음과 같이 표현된다.

$$r(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) V_{ij} \quad (55)$$

$$B_i^m(u) = \frac{m!}{(m-i)!i!} u^i (1-u)^{m-i} \quad (56)$$

Fig. 7 은 Fig. 6 의 쌍 3 차 베지어 곡면을 이용하여 Fig. 5 를 매개화한 모습이다. 이와 같이 매개화를 이용하면 몇몇의 조정점을 이용하여 구조물의 최적 형상을 쉽게 표현할 수 있게 된다.

Table 1 에서는 제안된 설계 민감도법이 유한차분법(Finite Difference Method, FDM)과 비교하여 얼마나 정확한지 나타낸 결과이다. 유한차분은 0.1% 중앙차분을 사용하였으며 유체영역 및 고체영역 경계면에서 모두 정확한 결과를 얻었음을 알

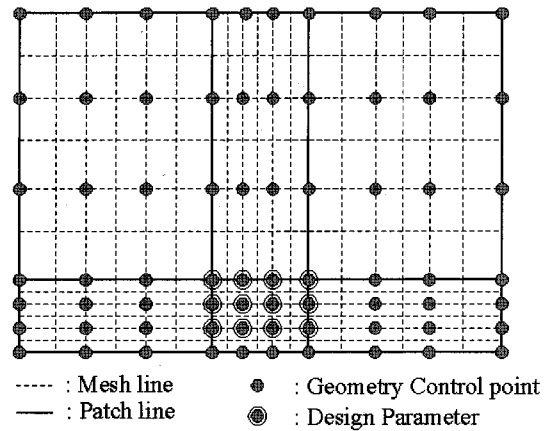


Fig. 7 Parameterization

Table 1 Comparison of shape sensitivity

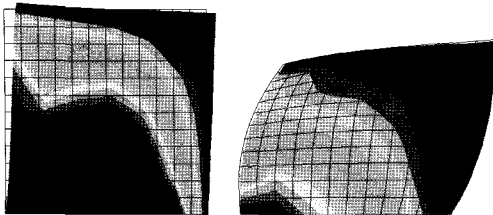
Node	DOF	FDM	AVM	Accuracy
443 Fluid	x-vel.	5.262E-08	5.262E-08	100.001%
	y-vel.	-8.89E-09	-8.89E-09	100.001%
	Press.	6.032E-09	6.032E-09	100.001%
273 Inter face	x-disp.	8.936E-08	8.936E-08	100.000%
	y-disp.	-6.13E-08	-6.13E-08	100.000%
	press.	-3.02E-09	-3.01E-09	99.996%
99 Solid	x-disp.	4.062E-08	4.062E-08	99.999%
	y-disp.	3.362E-09	3.361E-09	99.994%

Table 2 Comparison of computing cost

	Analysis	AVM	Ratio
CPU (sec)	724.429	6.921	0.955%

Table 3 Optimization result

	Optimal	Original	Volume
Strain Energy	0.049073	0.13931	100%
Decrease	-64.78%	-	-15%



(a) Original (b) Optimal

Fig. 8 Original, optimal shape deformation

수 있다. 계산 시간면에서도 Table 2 에서 알 수 있듯이 설계민감도 계산시간이 해석시간의 1% 보다도 적으므로 제안된 설계민감도 해석법이 매우 효율적임을 알 수 있다.

Fig. 5 의 문제에 대해서 구조물의 변형 에너지가 최소가 되도록 형상 최적설계를 수행하였다. 베지어 곡면의 조정점을 이용하여 높은 강성을 갖는 구조를 얻기 위하여 형상 최적설계를 수행하였다. Fig. 7 에서와 같이 구조영역에서 매개변수 (Design parameter) 12 개를 지정하고 2 개의 자유도를 갖는 24 개의 설계변수(Design variable)를 두고 최적설계를 수행하였다. 여기서, 제한조건은 고체 영역의 허용체적을 85%로 두었다. Fig. 8 은 형상 최적설계 전후의 변형과 응력분포를 보여준다. Table 3 에서 살펴볼 수 있듯이 형상 최적설계 전 구조물의 변형에너지는 0.13931 에서 최적설계 후 0.04907 로 약 64.78% 감소하였다. 선형 제한조건을 가지므로 수학적으로 최적해는 항상 제한조건에 존재한다. 물리적으로는 고체의 체적이 적을수록 전체 변형 에너지가 감소하기 때문에 항상 허용 체적 제한치에서 최소값을 갖게 된다. 체적이 15% 감소하였을 때 변형에너지는

Before Optimization

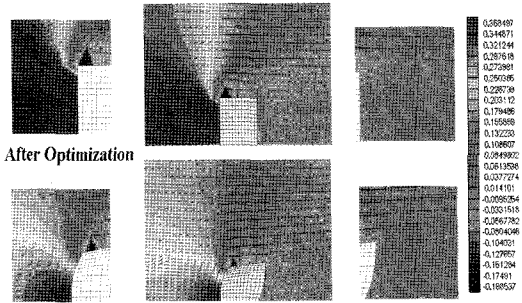


Fig. 9 Comparison of pressure and flow

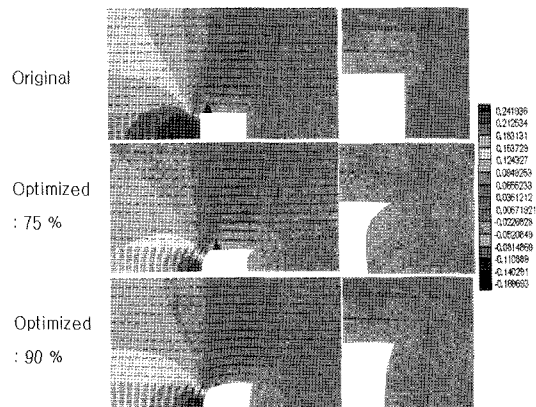


Fig. 10 Pressure and flow for original, optimal models

65% 정도 감소하였으므로 최적설계의 효과는 매우 큰 것으로 생각된다.

Fig. 9 는 형상 최적설계 후의 고체 주위에서의 유체 압력과 유동장을 표시한 것이다 Fig.에서 알 수 있듯이 구조물 주위의 유동의 흐름이 부드러워지고 국부적인 압력분포가 크게 감소하였음을 알 수 있다. 최적 형상을 살펴보면 높이의 변화 보다는 앞부분이 항아리 모양으로 변함으로써 유동장의 흐름을 변화시킨 것이 변형 에너지의 최소화에 지배적인 영향을 미친 것을 알 수 있다.

Fig. 10 은 종횡비가 다른 구조물에 대해서 고체 영역의 허용체적 제한조건을 75%와 90%로 다르게 주었을 때의 형상 최적설계 결과와 유체압력과 유동장을 표시한 것이다.

Table 4 에서 살펴볼 수 있듯이 서로 다른 허용체적 75%, 90%에서 형상 최적설계 후 구조물의

Table 4 Optimization result

Volume	75%	90%	Original
Strain Energy	9.570E-03	9.706E-03	3.426E-02
Decrease	-72.06%	-71.68%	-

변형에너지가 각각 72.06%, 71.68% 감소하였다. 최적설계 전, 후의 구조물의 높이를 비교해 보면 크게 차이가 없음에도 불구하고 변형에너지 저감 효과는 70% 이상 인 것으로 보아 구조물의 높이 보다는 최적설계에 의한 효과가 큰 것으로 판단된다.

5. 결론

본 연구에서는 정상상태의 비선형 유체-구조 연성문제를 정식화하고 유한요소법을 이용하여 설계민감도 식을 유도하고 형상 최적설계를 수행하였다. 유체-구조 연성문제에 대해서 애조인 방법을 이용한 설계민감도 해석법을 개발하였고 수치적 예제를 통해 그 효율성과 정확성을 확인하였다. 이를 이용하여 구조물의 변형 에너지가 최소가 되도록 형상 최적설계를 수행하여 최적의 형상을 도출하였다.

후 기

본 논문은 2006-2007 년도 첨단조선공학연구 센터의 지원으로 수행되었으며 위 기관의 후원에 감사 드립니다.(Grant Number R11-2002-104-06003-0)

참 고 문 헌

- 조현규, 조선희, 2004, "유체-구조 연성문제의 형상 최적 설계," 대한조선학회 추계학술대회 논문집, pp. 763-768.

- 하윤도, 조선희, 2004, "비선형 열전도 문제의 설계 민감도 해석 및 위상 최적설계," 대한조선학회 추계학술대회 논문집, pp. 1119-1124.
- Cho, S. and Jung, H.S., 2003, " Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization of Displacement-loaded Nonlinear Structures," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 192, pp. 2539-2553.
- Ghattas, O. and Li, X., 1995, "A Variational Finite Element Method for Stationary Nonlinear Fluid-solid Interaction Problem," *J. of Computational Physics*, Vol. 121, pp. 347-356.
- Haug, E.J. and Choi, K.K., 1986, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, New York.
- Lund, E., Moller, H. and Jacobson, L.A., 2001, " Shape Design Optimization of Steady Fluid-structure Interaction Problems with Large Displacements," *AIAA paper, 2001-1624*.



< 하 윤 도 >



< 김 민 근 >



< 조 현 규 >



< 조 선 호 >