

순차적 실험계획법을 이용한 위상 최적 설계 Sequential Design of Experiment Based Topology Optimization

송치오*, 박순옥**, 이정훈†
Chioh Song and Soonok Park and Jeonghoon Yoo

Abstract

Topology optimization methods are classified into two methods such as the density method and the homogenization method. Those methods need to consider relationships between the material property and the density of each element in a design domain, the relaxation of the design space, etc. However, it is hard to apply on some cases due to the complexity to compose the design objective and its sensitivity analysis. In this paper, a modified topology optimization is proposed to assist designers who do not have mathematical or theoretical background of the topology optimization. In this study, optimal topology of structures can be achieved by the sequential design of experiment (DOE) and the sensitivity analysis. We conducted the DOE with an orthogonal array and the sensitivity analysis of design variables to determine sensitive variables used for connectivity between elements. The modified topology optimization method has advantages such as freedom from penalizing intermediate values and easy application with basic DOE concept.

Key Words : Topology Optimization(위상최적화), Sequential Design of Experiment(순차적 실험계획법), Sensitivity Analysis(민감도해석).

1. 서론

위상(topology)이란 수학에서 나온 개념으로 공간을 추상적으로 정의하기 위해 나온 용어로 원래 위상수학이나 위상기하학 분야에서 사용되는 용어이다. 그러나 위상이라는 용어는 공간을 정의해야 하는 여러 분야에서 사용되고 있으며 본 논문에서는 구조물의 위상을 변화시켜 새로운 형상을 결정하는 위상최적화 설계 방법을 도입하고 있다.

위상 최적화 기법은 초기위상을 개선하기 위해 개발되었고, 구조물의 형상과 크기를 동시에 변화시키는 방법, 즉 구조물 내의 구멍(hole)의 개수와 위치, 영역간의 연결과 같은 형상 결정의 문제로 정의될 수 있다. 구조물에 사용된 재료적인 측면에서는 재료를 재분배함으로써 구조물의 새로운 위상을 찾아내는 방법이다 [1]. 위상최적화는 형상과 크기 최적화에서 사용되어온 구조물의 좌표와 두께 같은 설계변수를 사용하지 않고 구조물을 구성하고 있는 다공성 물질 내에 존재하는 빈 공간의 크기를 최적화를 위한 설계변수로 이용하게 된다. 또한 구조물에 사용된 초기의 재료 양을 최적화 과정을 통하여 일정하게

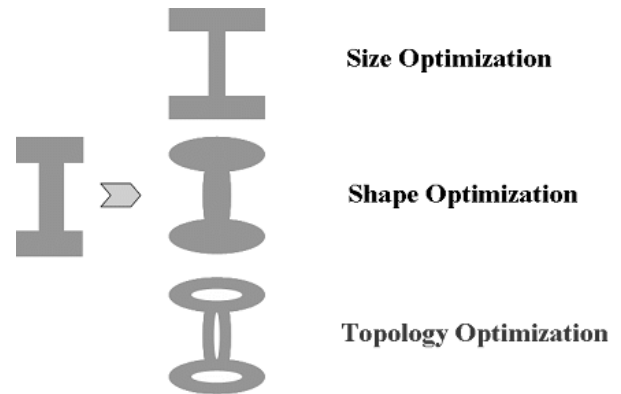


Fig. 1 Concept of structural optimization

유지시키기 위하여 체적 제한조건을 설정한다. 이러한 개념의 도입으로 기존의 형상과 크기 최적화에서 바꿀 수 없었던 위상을 변화시킬 수 있다 [2]. Fig. 1 은 위상최적설계 및 형상, 치수최적설계의 개념을 보여주고 있다.

위상 최적화 방법은 밀도법과 균질화법으로 크게 나눌 수 있는데, 균질화법(homogenization method)은 연속체의 특성상 요구되는 복합재의 개념과 영역의 완화(relaxation)라는 수학적인 요구조건을 만족시키는 위상최적설계의 개념으로 1988 년 Bendso와 Kikuchi는 복합재 해석에 이용된 구조물을 균질화법을 이용하여 위상 최적화에 적용하는 방법을 제시하였다 [3]. 밀도법의 경우는 균질화법과 개념상으로는 유사하나 상대적으로 균질화법보다 적용하기

* 연세대학교 기계공학과 대학원
(현 소속: 삼성전자)

** 연세대학교 기계공학과 대학원

† 연세대학교 기계공학부
E-mail : yoojh@yonsei.ac.kr
TEL : (02)2123-2859

쉬우므로 연구자들 사이에 널리 사용되고 있다. 그러나 밀도법은 연속체 문제를 유한개의 요소로 분할하여 해결하므로 설계영역을 몇 개의 유한 요소로 분할하였는지에 따라 위상최적화 결과가 좌우되는 한계성을 지니고 있다. 위상최적설계의 방법은 구조물의 컴플라이언스(compliance)를 최소화하기 위한 설계로부터 시작하여 점차 그 적용영역을 확대해 가고 있다 [4].

유한요소법(finite element method)을 이용하여 구조물의 형상을 최적화하는 방법은 구조물의 형상을 표현하는 기법, 설계변수에 대한 민감도를 계산하는 방법, 그리고 최적화 알고리즘 등의 개발로 발전을 거듭하여 왔다. 그럼에도 위상 최적설계는 변수와 형상 최적설계에 비해 실제적인 적용이나 전용 해석 프로그램의 제공이 상대적으로 매우 적다. 이는 다분히 위상최적설계가 가지게 되는 연속체 구조에서의 완화 등의 수학적 어려움과 변수-형상과 대비되는 개념의 상이함에 기인한다고 볼 수 있다. 이러한 어려움으로 인해 실제 구조물에 위상 최적화 설계를 적용하는 것은 설계자에게 많은 노력과 시간의 투자를 요구하게 된다.

따라서 본 연구에서는 설계자가 위상 최적설계의 수학적 어려움을 갖게 되거나 개념적 또는 이론적 배경을 충분히 숙지하지 못했더라도 유한요소 해석과 실험계획법(design of experiment), 그리고 민감도 해석(sensitivity analysis)을 하여 위상최적화를 할 수 있는 방법을 제안하고자 한다. 본 연구에서는 유한 요소 해석을 위해 해석하고자 하는 모델을 요소화(meshing)시켜 해석이 가능한 형태로 바꾼다. 이 요소들의 조합이 설계 변수로 설정되며, 직교배열표(orthogonal array table)에 기인하여 필요한 simulation의 조합이 구성된다. 각 설계변수는 해당 영역이 존재할 경우 1의 값을 가지며 존재하지 않는 경우 0의 값을 갖게 된다. 본 연구에서는 2수준 31개의 설계 변수를 가지며 32번의 실험을 수행하는 실험계획법을 실시한다. 해석 결과를 바탕으로 영역별 설계 변수의 민감도 해석 과정을 거치면 영역별 설계변수들의 민감도를 알 수 있게 된다. 최적 밀도 분포를 결정하는 단계에서는 중요한 설계 변수들만으로 밀도 분포를 구해낸 뒤 영향이 크지 않은 설계 조건들은 생략하거나 각 요소의 연결성(connectivity)을 제공하기 위한 요소로 사용하게 된다. 제안된 방법은 위상 최적 방법에서 중간값(intermediate value)을 갖는 밀도 분포 문제를 해결하는 동시에 기본적인 실험 계획법의 개념으로 여러 문제를 해결 할 수 있는 장점을 갖는다.

2. 위상최적설계 방법

2.1 최적설계 과정

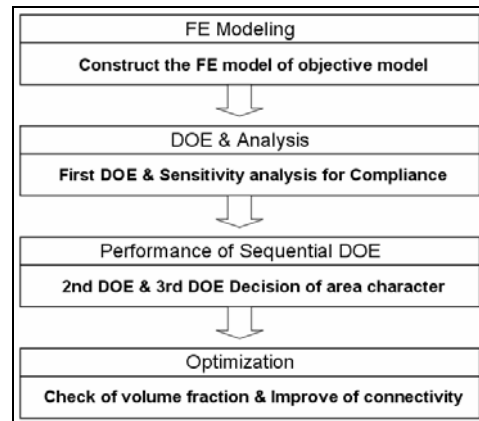


Fig. 2 optimization process

위상최적설계 시 초기모델을 해석하기 위하여 설계 영역을 유한 개의 요소로 구분하고, 이러한 요소로 이루어진 유한 개의 영역이 설계변수가 된다. 유한 요소 모델링과 실험계획법의 결과를 이용하여 설계 변수의 민감도 해석을 수행한다. Fig.2는 민감도 해석의 결과를 바탕으로 최대 목적 함수 값이 나타나는 변수들의 조합을 찾아서 최적의 목적함수 값을 도출하는 과정을 나타내고 있다.

Fig. 2에서 설계변수의 변화에 따른 목적함수 값의 변화와 제한조건의 변화를 추정하는 민감도해석(sensitivity analysis)을 하는 과정이 최적설계 과정에서 요구되는 중요한 사항이다. 그러나 민감도 계산하는 과정은 많은 경우 수학적으로 표현하기 쉽지 않으나, 일단 민감도가 계산되면 이를 이용한 최적화 기법들이 매우 다양하게 나와있기 때문에 최적해를 쉽게 찾을 수 있다. 이러한 민감도 계산의 어려움을 해결함과 동시에 계산시간을 단축하기 위해 본 연구에서는 실험계획법과 그 결과를 이용한 민감도 해석을 이용하였다.

2.2 목적함수

위상최적설계의 목적함수(objective function)로는 설계대상이 되는 구조물의 컴플라이언스(compliance)를 최소화하는 것으로 설정하며 이에 따른 최적화 문제는 식 (1)과 같이 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize } C(x) &= U^T K U = \sum_{e=1}^N (x_e) u_e^T k_0 u_e \\
 \text{Subject to } \frac{V(x)}{V_0} &\leq V_{frac} \\
 \text{and } K U &= F
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 x_e 는 설계변수를 의미하며 0 또는 1의 값을 갖는다.

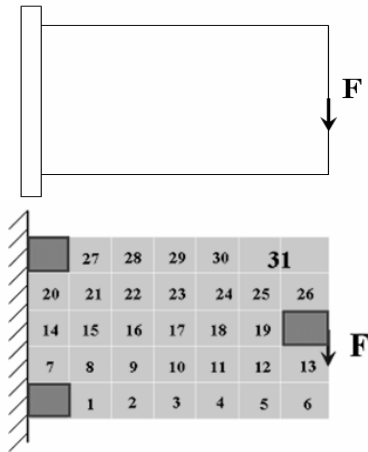


Fig. 3 Objective structure with (a) load conditions and (b) discretization of the design domain

2.3 설계영역과 설계변수

설계의 대상은 Fig. 3(a)에 나타난 외팔보이며, 좌측 끝 단은 모든 축에 대해 자유도가 고정되어 있고($\Delta x = \Delta y = fixed$) 하중은 우측 끝 단의 중심에 y축 방향으로 주어진다. 요소화된 설계변수들을 지정하기 위해 일정부분을 단체화(grouping)하며, 7 x 5 의 영역 중 하중과 경계조건에 직접적인 영향을 받는 3개의 영역을 제외시켰다. L32(2^{31})형 직교배열표(orthogonal array)를 적용하기 위하여 y축 상단의 요소 두 개를 하나로 그룹화하여 총 31개의 영역별 설계변수를 Fig. 3(b)와 같이 지정하였다. 구조물의 재료 물성치는 탄성 계수 $E=210e+06(kN/mm^2)$, 포아송 비 $\nu=0.3$, 하중 $F=-1(kN)$ 로 설정한다.

2.4 직교배열표

31개의 변수로 지정된 요소들에 대하여 직교배열표를 이용한 해석을 수행한다 [5]. 각 설계 변수는 해당영역이 존재할 경우 1의 값을 갖고, 존재하지 않을 경우 0의 값을 가지게 되며 총 31개의 설계 변수를 가진다. 모든 경우에 대한 실험을 수행할 경우, $2^{31} = 2,147,483,648$ 회라는 많은 실험을 진행해야 한다. 이것은 많은 시간과 계산 비용을 필요로 하므로 각 설계 변수들의 상호작용이 없는 직교배열표를 적용하여 총 32회의 실험을 수행한다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

3.1 실험계획법 결과

Table 1은 직교배열표에 의거하여 수행한 32번의 유한요소 해석에 의한 컴플라이언스를 나타낸다. 총 32개의 영역들을 이용하여 영역이 존재할 경우 1의 값을 갖고, 영역이 존재하지 않는 경우 0의 값을 가지는 것으로 설정하여 결과를 도출한다.

Table 1 Simulation results using orthogonal array

RUN	1	2	3	4	5	6	7	8	29	30	31	Response
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-8.2E-08
2	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	-6.2E-07
3	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	-4.5E-06
4	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	-6.4E-06
5	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-3.8E-06
6	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	-0.88813
7	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	-6.6E-06
8	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-3.1E-06
9	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	-0.05915
10	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	-1.34928
11	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	-0.89636
12	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	-2.54971
13	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	-0.64211
14	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	-2.53673
15	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	-6.4E-06
16	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	-4.29326
17	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-0.95039
18	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	-2.27816
19	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	-1.99005
20	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	-1.72247
21	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	-8.2E-08
22	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	-2E-07
23	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	-5.5E-07
24	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	-5.3E-06
25	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	-1.73937
26	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	-1.42202
27	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	-0.5636
28	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	-4E-07
29	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	-0.97713
30	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	-0.84418
31	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	-5.9E-06
32	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	-5.9E-06

Fig. 4는 각 설계 변수에 대한 민감도 해석의 결과를 나타내며, Fig. 5는 민감한 변수만을 추출하여 구성된 최적화된 형상을 보여주고 있다.

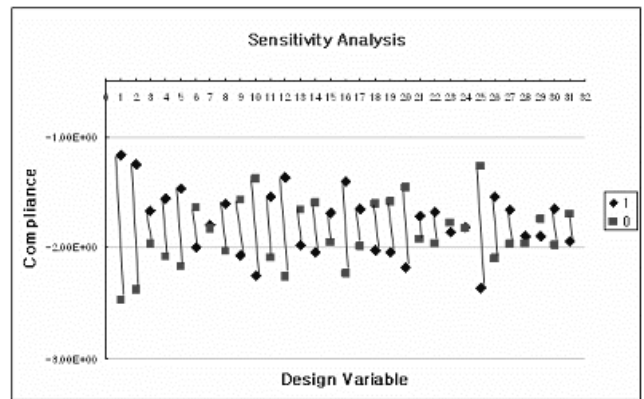


Fig. 4 Sensitivity analysis result

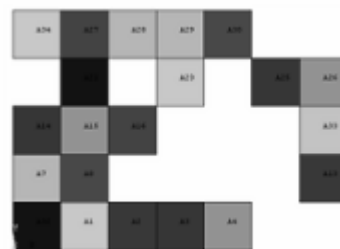


Fig. 5 Initial optimal topology by simple DOE application

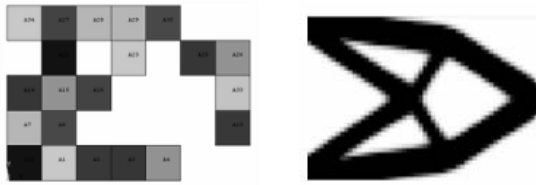


Fig. 6 Comparison of topology optimization results

3.3 위상 최적 결과의 비교

Fig. 6은 컴플라이언스를 최소화하기 위하여 실험계획법을 이용한 위상 최적 결과를 밀도법을 이용하여 구해진 위상최적화의 결과와 비교한 것이다 [6]. 두 개의 결과를 비교해보면 서로 다른 양상을 보인다는 것을 확인할 수 있다. 이는 설계변수 조합에 의한 실험계획법을 이용한 결과는 체적 분률(volume fraction)을 고려되지 않은 반면에 밀도법에 의한 결과는 체적 분률을 고려하여 구해진 데에 한 원인이 있다. 또한, 설계변수 조합에 의한 결과는 각 설계 변수간에 교호작용(interaction)이 없다는 가정에 의해 이루어졌으나, 실제로는 교호작용이 존재하는 것도 결과의 차이를 가져온 것으로 예상된다. 따라서, 교호작용의 영향을 최소화하는 순차적 실험계획법의 도입이 요구된다.

4. 순차적 실험계획법

위에서 제시된 위상최적화의 방법은 설계변수들 간의 교호작용과 체적 분률에 대한 고려가 없으므로 결과값을 신뢰하기에 부족한 면이 있다. 이에 대해 민감도가 중간 값을 갖는 설계영역에 대한 보완책으로 반응표면법(response surface method)을 적용한 방법이 있으나, 이는 근사식을 얻기 위해 부가적인 실험을 수행해야 하는 번거로움이 있다 [7]. 본 연구에서는 중간 값을 갖는 설계 영역에 대하여 실험계획법을 순차적으로 적용시켜 그 부분의 존재 유무를 판단하는 순차적 실험계획법(sequential design of experiment)을 이용한 위상최적화의 방법을 제안하고자 한다.

순차적 실험계획법은 Fig. 7에 제시된 순서로 진행된다. 1차 DOE에서 민감도분석 결과를 기초로 민감도가 큰 영역, 중간 영역, 낮은 영역으로 나눈다. 2차 DOE에서는 민감도가 큰 영역을 설계변수로 하여 2차 DOE와 민감도 분석을 실시한다. 2차 DOE의 결과를 가지고 1의 값을 가지는 설계영역을 선정한다. 3차 DOE는 민감도가 낮은 영역을 설계변수로 선정하고 DOE 및 민감도분석을 실시한다. 여기서는 0의 값을 가지는 설계영역을 선정한다. 마지막으로 4차 DOE에서는 2,3차 DOE에서 결정되지 않은 영역과 1차 DOE에서 중간값을 가지는 영역을 설계변수로

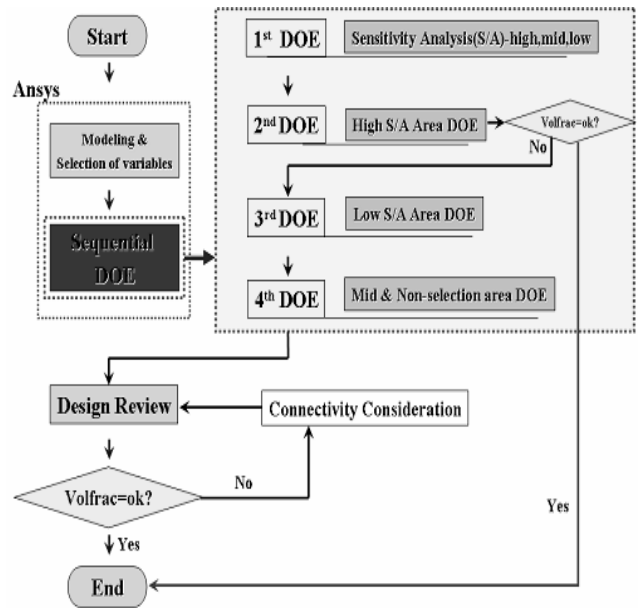


Fig. 7 Procedure of topology optimization by sequential design of experiment

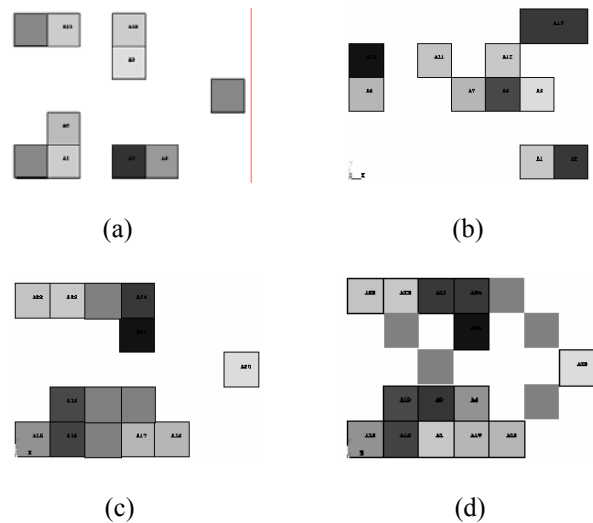


Fig. 8 Results by the sequential DOE; after (a) 1st DOE, (b) 2nd DOE (c) 3rd DOE and (4) Last DOE

하여 4차 DOE를 실시한다. 이 때 제한 조건의 체적 분률을 만족하는 조건하에서 요소연결성을 고려하여 설계변수를 31개를 초과할 수 없도록 설정한다. 이는 체적 분률을 50% 초과할 수 없는 제한조건과 동일하다. Fig.8은 Fig.3에 제시된 설계 문제에 대해 순차적 실험계획법을 적용하였을 때 각 단계에서 얻어지는 위상최적화의 결과를 보여주고 있다. Fig.9 에서 알 수 있듯이 체적 분률 만을 고려할 경우 요소간의 단절이 생기는 경우가 발생할 수도 있다. 그래서 요소의 연결성을 고려하기 위하여 일정한 기준을 선정한다.

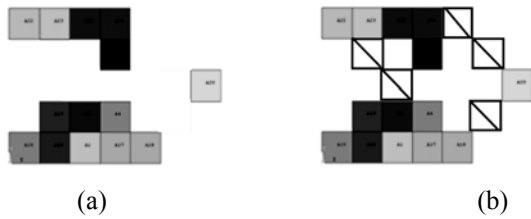


Fig. 9 Optimization results; (a)without the connectivity, (b) with connectivity

그 기준은 첫째, 체적 분률의 제한 조건을 만족해야 하고, 둘째, 최단거리 영역을 선정하고 마지막으로 순차적 실험계획법의 민감도를 고려한다. 위의 기준에 근거하여 최종 선택된 영역은 Fig. 9(b)와 같이 나타난다. 최종적인 위상최적화의 결과는 Fig. 6에 제시된 밀도법에 의한 결과에 근접함을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 설계자가 위상 최적설계를 하기 위한 수학적 배경이나 이론적인 바탕을 충분히 갖추지 못한 경우라도 기본적인 유한요소 해석을 할 수 있는 상용 패키지 활용 능력을 가졌다면 실험계획법과 민감도 해석 결과를 이용하여 위상 최적화 설계를 할 수 있도록 하는 순차적 실험계획법에 의한 위상최적화의 방법을 제안하였다.

이 방법에서는 설계영역을 몇 개의 그룹으로 나눠 각 영역을 설계 변수로 지정한 후에 실험 계획법에 의거하여 유한 요소 해석을 수행하고, 그 결과를 바탕으로 민감도 해석과정을 거쳐서 각 영역별 설계 변수의 민감도를 알 수 있게 된다. 민감도에 정도에 따라 설계 영역을 3개의 다른 레벨로 설정하고 순차적 실험계획법에 의한 위상최적화 방법을 적용시켜 최적의 위상을 구하였다. 외팔보에 대한 최적화 과정의 적용을 통하여 제시된 방법에 의한 위상최적화의 결과가 기존의 방법에 의한 결과와 유사함을 확인할 수 있다.

후 기

본 연구는 한국 과학재단 목적기초연구(과제 번호: R01-2006-000-10074-0)의 지원으로 이루어진 것으로, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

[1] J. Yoo, 2003, "A Study on the Topology Optimization of a Solid Structure", Transactions of

Computational Structure Engineering Institute, Vol.16(1), pp.77~85
 [2] S. Lee, 2000, "Schematic concept of fully integrated design optimization for shells", in the Proceeding of the 6th Asian Pacific Conference on Shell and Spartial Structures, Seoul.
 [3] M. P. Bendsøe, N. Kikuchi, 1988, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, pp. 197~224.
 [4] K. Suzuki, N. Kikuchi, 1991, "A homogenized method for shape and topology optimization", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 93(3) pp. 291-318.
 [5] S. Park., 2005. "Design of Experiments", Minyongsa, pp. 406-407.
 [6] O. Sigmund, 2001, "99-Line Topology Optimization Code Written in Matlab", Structural Multidiscipline Optimization, Vol. 21, pp. 120~127.
 [7] C. Lee, J. Yoo, S. Min, 2005, "Design of a Swing-arm Actuator using the Compliant Mechanism", Transactions of The Korean Society of Mechanical Engineers, Vol. 30, pp. 128~134.