

# Euler 방정식의 유량함수(Flux Function)와 제한자(Limiter) 특성 비교 연구

채 은 정,<sup>1</sup> 이 승 수<sup>\*2</sup>

## COMPARATIVE STUDY ON FLUX FUNCTIONS AND LIMITERS FOR THE EULER EQUATIONS

E.J. Chae<sup>1</sup> and S. Lee<sup>\*2</sup>

*A comparative study on flux functions for the 2-dimensional Euler equations has been conducted. Explicit 4-stage Runge-Kutta method is used to integrate the equations. Flux functions used in the study are Steger-Warming's, van Leer's, Godunov's, Osher's(physical order and natural order), Roe's, HLLC, AUSM, AUSM+, AUSMPW+ and M-AUSMPW+. The performance of MUSCL limiters and MLP limiters in conjunction with flux functions are compared extensively for steady and unsteady problems.*

**Key Words :** 이차원 Euler 방정식(2D Euler Equations), 4차 Runge-Kutta 방법(4 stage Runge-Kutta Method), 유량함수(Flux Function), 제한자(Limiter), MUSCL, 다차원 제한 과정(MLP: Multi-dimensional Limiting Process)

### 1. 서 론

전산유체역학에서 주로 사용되는 공간이산화 기법 중 풍상차분법은 FVS(Flux Vector Splitting)와 FDS(Flux Difference Splitting)로 나눌 수 있다. FDS는 Roe[1]와 Osher[2]등의 방법이 있으며 국소적으로 Riemann 문제의 근사해를 이용하여 해를 구한다. FDS는 유량(Flux)의 진행 방향을 제어면에서 모사함으로써 경계층 내에서 적은 격자수로도 정확한 계산을 할 수 있으나, 선형화로 인하여 팽창 충격파, Carbuncle 현상, Kinked Mach Stem 등과 같은 비 물리적 결과가 발생한다. 또한 급격하게 팽창하는 영역에서는 음의 밀도 또는 내부에너지가 발생하는 문제가 발생할 수 있다. FVS는 Steger-Warming[3]과 Van Leer[4]의 방법이 대표적이며, 강건성과 효율성면에서 장점을 가지고 있다. 이 방법은 강한 충격파나 팽창파를 포함하는 유동 해석 시 밀도나 내부 에너지등의 양의 조건(Positivity)을 만족시킨다. 그러나 제어면 기준으로 좌우 유동 상태 간에 정보교환이 전혀 이루어 지지 않기 때문에 제어면과 음속 천이점 위치를 알 수 없어 물리 현상 등을 반

영 하지 못한다. 특히, 점성유동의 해석에 있어 과도한 수치 점성을 지니기 때문에 경계층 내에서의 정확한 수치 계산이 어렵다. Liou와 Steffen은 FVS의 장점인 강건성과 FDS의 장점인 정확성을 이용한 Hybrid기법인 AUSM[5]을 개발하였다. 그러나 충격파 후방이나 벽면에서 압력진동 등의 문제점이 발생하였다. 이러한 AUSM의 문제점을 보완하기 위하여 Liou에 의해 AUSM+[6]이 제안 되었고, Kim 등에 의해 AUSMPW+[7], M-AUSMPW+[8]의 수정 방법이 제안되기도 하였다.

2차원 및 3차원의 다차원 비점성 유동을 해석하기 위해서는 2차 이상의 공간 정확도, 해의 단조성(Monotonicity) 및 다차원성이 필요하게 된다. 그러나 진정한 다차원성을 나타내지 못하는 현 이론의 제약으로 인하여 격자면에 수직한 방향으로 유량함수(Flux Function)를 근사적으로 적용하는 실정이다. 1차의 공간 정확도를 갖는 풍상차분법은 단조성을 유지할 수 있으나, 2차 공간 정확도를 가지며 단조성을 보존하는 수치기법은 Harten의 TVD(Total Variation Diminishing)기법이 있다. 특히, Van Leer의 MUSCL방법[9]은 물리변수를 외삽하여 정확성을 높이고, 제한자(Limiter)를 이용하여 간편하게 TVD 특성을 유지하는 수치기법이다. 그러나 이 방법은 격자면에 수직한 방향으로 외삽이 이루어져 다차원의 특성을 정확히 표현하지 못하고 있다. 최근 다차원 유동특성을 고려한 고차의

접수일: 2007년 1월 10일, 심사완료일: 2007년 3월 19일.

1 학생회원, 인하대학교 대학원 항공공학과

2 정회원, 인하대학교 기계공학과 항공우주전공

\* Corresponding author, E-mail: slee@inha.ac.kr

내삽기법인 MLP(Multi-dimensional Limiting Process)방법이 Kim 등[10]에 의해 개발되었다. 반면에 유량함수의 다차원성을 확보하기 위한 Rotated Upwind Scheme, N Scheme, Fluctuation Splitting 등이 개발되어 사용되고 있다.

본 논문에서는 개발된 다양한 유량함수의 문제점을 파악하고 정량적으로 비교하였으며, MUSCL 방법과 MLP 방법의 특성을 정량적으로 비교하였다. 본 논문에서 사용한 공간 차분은 셀 중심(Cell Centered) 유한 체적법을 사용하였으며 시간 이산화기법으로는 4차 Runge-Kutta방법을 사용하였다.

## 2. 수치 해석 기법

### 2.1 지배 방정식

2차원의 Euler방정식은 보존형 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

여기에서 보존형 변수, 비점성 유량 Vector는 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \epsilon \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\epsilon + p)u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ (\epsilon + p)v \end{bmatrix} \tag{2}$$

본 논문에서는 이상기체의 상태 방정식을 사용하였다.

$$p = (\gamma - 1) \left\{ \epsilon - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right\} \tag{3}$$

### 2.2 수치 기법

수치해석을 위하여 2차원 Euler방정식은 유한체적법에 기초한 공간이산화기법을 적용하였다. 이때 사용된 유량함수로는 Godunov계열의 Godunov[11], HLL[12], Roe, Osher (Natural Order와 Physical Order)과 Steger-Warming, Van Leer와 같은 FVS방법 그리고 AUSM계열의 수치기법인 AUSM, AUSM+, AUSMPW+, M-AUSMPW+이다. 또한, 해의 단조성을 유지하며 2차의 공간이산화 오차를 갖는 MUSCL기법과 함께 Minmod, Van Albada, Van Leer, Superbee 제한자를 사용하였다. 다차원 유동정보를 포함하며 해의 단조성과 2차의 공간이산화 오차를 갖는 MLP기법의 MLP-Minmod, MLP-Van Leer, MLP-Superbee, MLP3, MLP5 제한자도 사용하였다.

시간이산화기법은 시간에 대해 4차의 정확도를 갖는 4차 Runge-Kutta방법을 사용하였다. 정상 해를 구하는 문제에는

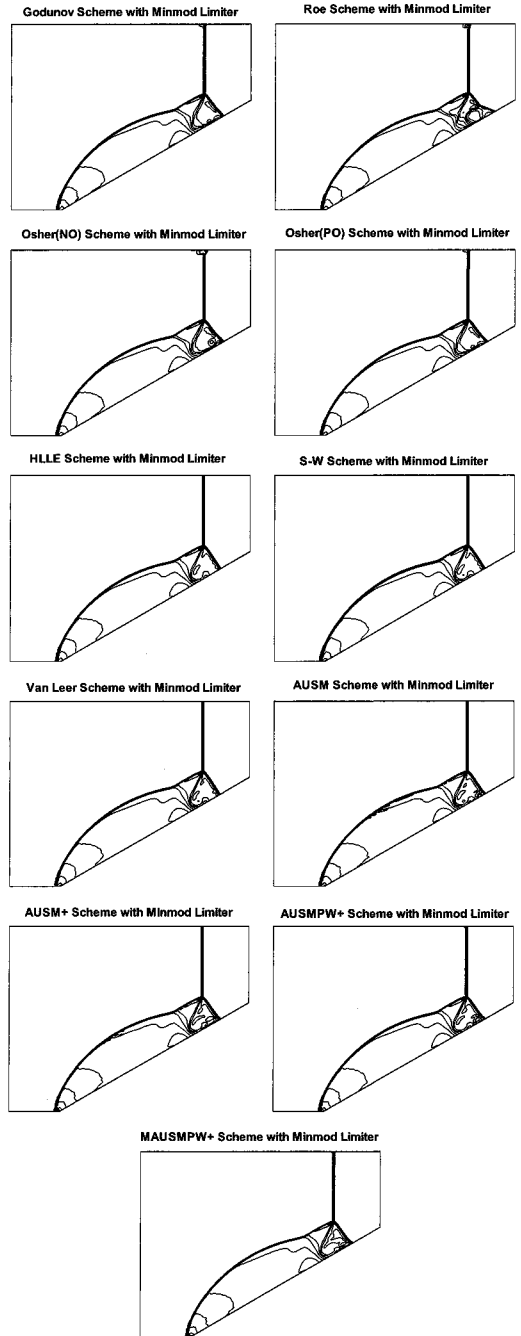


Fig. 1 Density Countours of Double Mach Reflection with Minmod Limiter and Various Flux Functions

국부적 시간전진(Local Time Stepping)을 사용하고 비정상해에서는 전 계산영역에서 같은 시간 간격을 사용하여 시간 정확도를 유지하도록 최소시간간격(Minimum Time Stepping)을 사용하였다.

HLLC Scheme with Minmod Limiter(Fine Grid Solution)

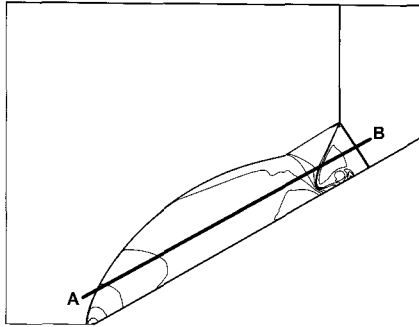


Fig. 2 Fine Grid Solution of DMR

벽면 경계조건은 미끄럼조건(Slip Boundary Condition)으로 2차의 공간 이산화 오차를 갖도록 처리했고, 원방경계 조건으로 특성치 경계법을 적용하였다.

### 3. 수치 해석 결과

#### 3.1 이중 마하 반사 문제

이중 마하 반사(Double Mach Reflection, DMR) 문제는 1984년에 Woodward [13]의 논문에서 처음 제기되었다. 일부의 유량함수를 사용하면 충격파가 벽면 근처에서 찌그러지는 현상인 Kinked Mach Stem이 발생하는 것으로 알려져 있다. 30도의 경사면에 Mach 10의 이동속도를 가진 수직 충격파가 충돌하는 문제이다. 이때 사용된 CFL수는 0.9이고 격자수는  $300 \times 251$ 이다.

Fig. 1은 각각의 유량함수에 Minmod 제한자를 적용한 결과를 도시한 것이다. HLLC, Steger-Warming, Van Leer을 이용한 방법에서는 Kinked Mach Stem 현상이 나타나지 않는다. 그러나 Godunov, Roe, Osher(NO & PO)를 사용하면 Kinked Mach Stem이 발생하고, 입사충격파의 윗부분이 깨지는 현상이 나타난다. 이 현상은 Quirk[14]이 발견한 홀짝분리 현상(Odd Even Decoupling)으로 비 물리적인 현상이다. AUSM, AUSM+, AUSMPW+, M-AUSMPW+을 적용한 방법은 끝부분에서 약간의 Kinked Mach Stem이 발생하나 격자수를 늘리게 되면 그 크기가 커지게 된다. 그리고 AUSM 계열의 AUSM과 AUSM+를 사용하면 충격파 뒤에 진동이 커지지만, AUSMPW+와 M-AUSMPW+를 적용하면 이러한 수치 진동이 제거되어 해의 단조성이 유지되었다.

유량함수들과 제한자들을 정량적으로 비교하고자 높은 밀도의 격자를 이용한 해에 대한 상대적 오차를 파악하여 보았다. Fig. 2에는 격자수를 각 방향으로 4배 키운 조밀격자계(Fine Grid)를 사용하고 Minmod 제한자를 적용한 HLLC의 결

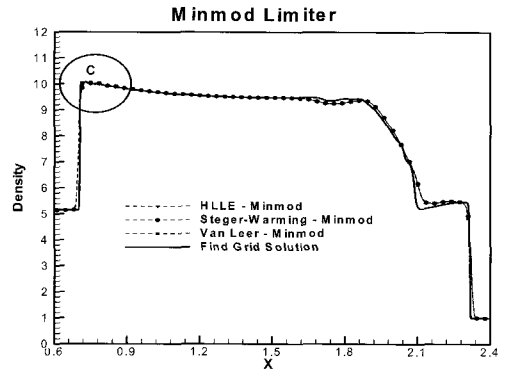


Fig. 3 Comparisons of Density Distributions along A-B

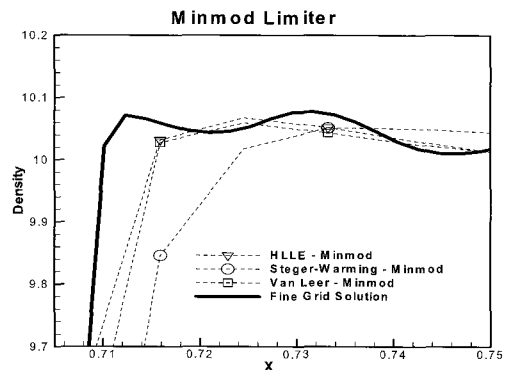


Fig. 4 Comparisons of Density Distributions near C

과를 도시하였다. 정확도를 비교하는 기준점으로 이 결과를 선정하여 유량함수의 특성을 비교 하였다. 여기서 HLLC를 적용하면 Kinked Mach Stem이 발생하지 않았으며 Minmod 제한자는 일반적으로 많이 사용되기 때문이다. Fig. 3에는 여러 가지 유량함수들에 Minmod 제한자를 적용하여 Fig. 2의 A-B 부분에 해당하는 밀도 분포를 도시하였다. 충격파와 접촉불연속면(Contact Discontinuity)을 지나는 곳에서 약간의 차이는 보이지만 대체로 작은 격자수를 가지고 조밀격자해와 유사한 해를 얻을 수 있었다. 보다 정확하게 파악하기 위하여 Fig. 3의 C부분을 확대한 것이 Fig. 4이다. 충격파 뒤에서 Steger-Warming을 사용한 것은 HLLC와 Van Leer을 적용한 결과에 비하여 조밀격자해와 차이를 보였다.

유량함수 들이 가진 문제점을 제한자가 제거할 수 있는지 여부를 확인하기 위해 Kinked Mach Stem이 발생하는 유량함수에 여러 가지 제한자들을 적용하였다. Fig. 5에는 Kinked Mach Stem이 발생한 유량함수인 Roe에 여러 가지 제한자를 적용한 결과를 도시하였다. 그림에서 보듯이 여러 가지 제한자를 적용하였음에도 불구하고 정도의 차이는 있으나 Kinked Mach Stem이 모두 발생한 것을 알 수 있다. 결국, 유량함수가 가진 문제점을 제한자가 완벽히 제거할 수는 없었다. 여러 가

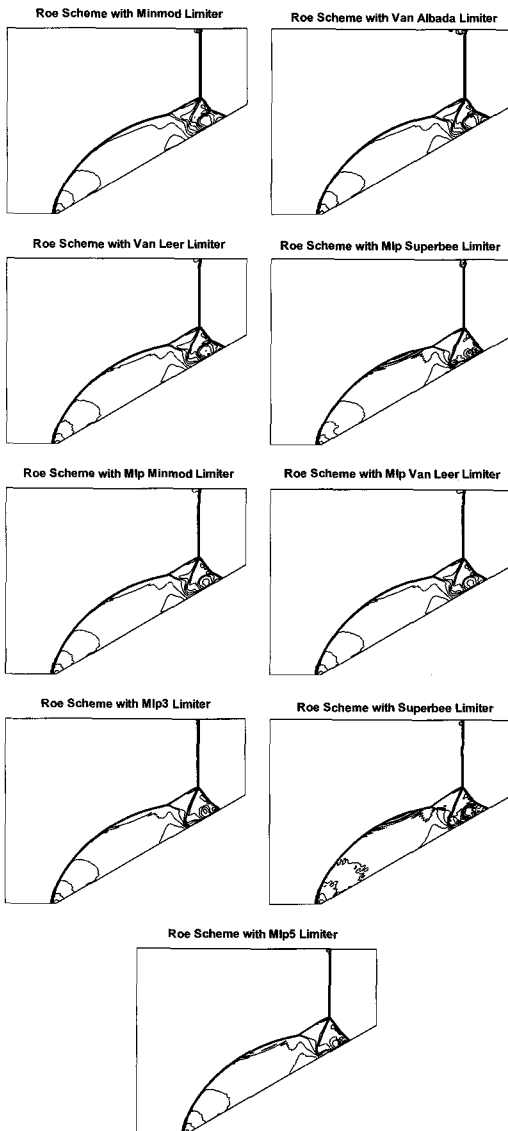


Fig. 5 Density Contours of Double Mach Reflection with Roe Scheme and Various Limiters

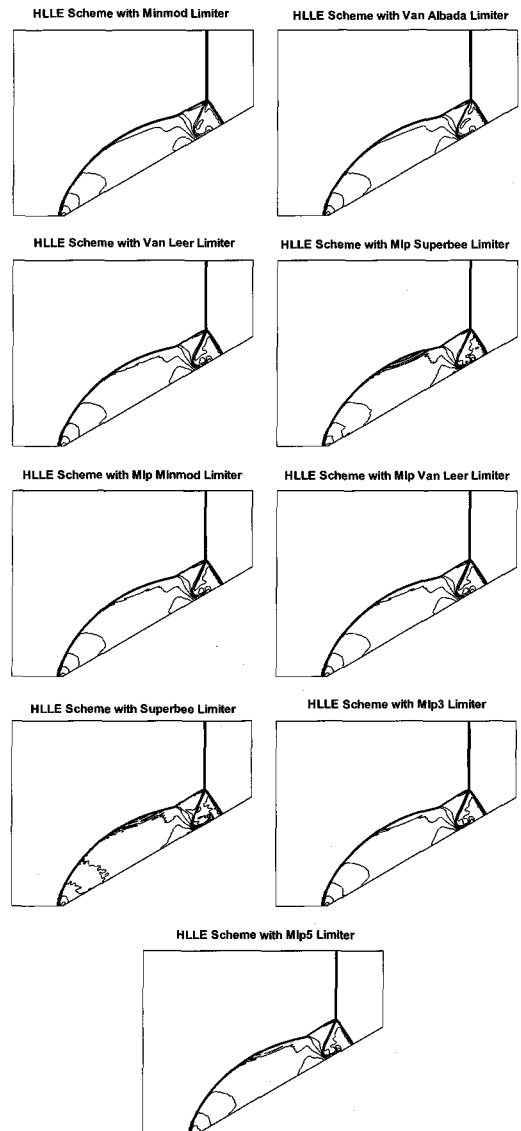


Fig. 6 Density Contours of Double Mach Reflection with HLLC Scheme and Various Limiters

지 제한자들의 특성을 정량적으로 파악하기 위하여 한 가지 유량함수에 각각의 제한자들을 적용하여 보았다. Kinked Mach Stem이 발생하지 않는 HLLC에 각각의 제한자들을 적용한 결과를 Fig. 6에 도시하였다. Superbee와 MLP-Superbee, 그리고 MLP5 제한자를 사용하면 충격파 뒤에 모두 해의 수치진동이 발생하였다. Fig. 7에는 HLLC에 여러 가지 제한자를 적용하여 Fig. 2의 A-B부분에 해당하는 밀도 분포를 도시한 것이다. 앞에서와 마찬가지로 충격파와 접촉불연속면이 지나가는 부근에서 조밀격자해와 약간의 차이를 보인다. 이를 더 정량적으로 비교하기 위하여 Fig. 7의 D부분을 확대한 부분이

Fig. 8이다. Minmod, Van Albada 제한자를 이용한 결과를 살펴보면 접촉불연속면이 조밀격자해에 비하여 또렷하게 잡히지 않고, Superbee 제한자를 적용하면 그 자체가 가진 수치점성 때문에 큰 Overshoot현상이 나타난다. 그러나 나머지 제한자들은 대체로 조밀격자해와 비슷한 결과를 보인다.

### 3.2 이중 충격파 반사 문제

이중 충격파 반사(Double Shock Reflection) 문제는 2004년에 Sutthisak와 Pramote [14]가 제안한 정상 유동 문제이다. 15도의 경사를 가진 2차원 쐐기(wedge)와 수평 평면 사이의 유

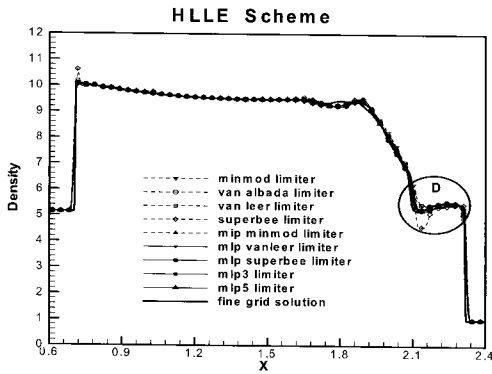


Fig. 7 Comparisons of Density Distributions along A-B

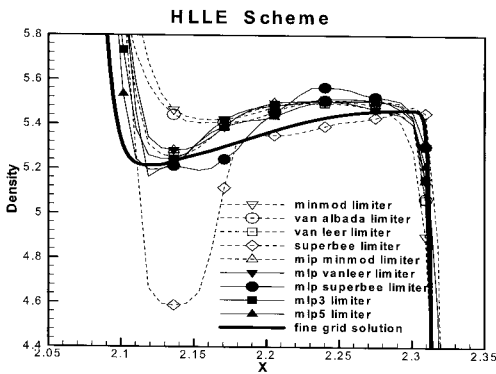


Fig. 8 Comparisons of Density Distributions near D

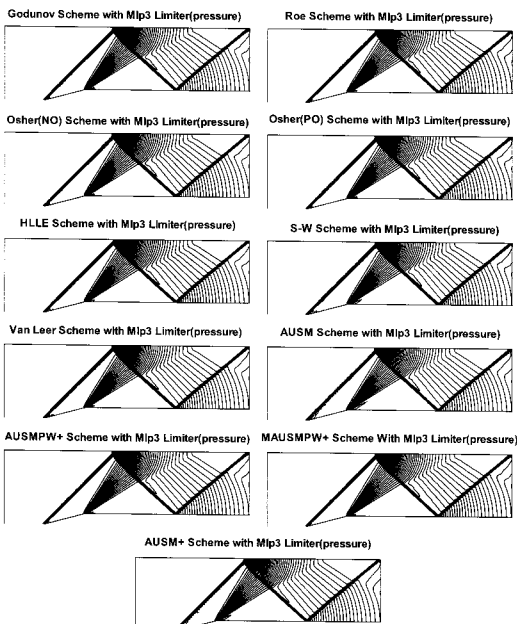


Fig. 9 Isobar Contours of Double Shock Reflection with MLP3 Limiter and Various Flux Functions

Roe Scheme with Minmod Limiter (Fine Grid Solution)

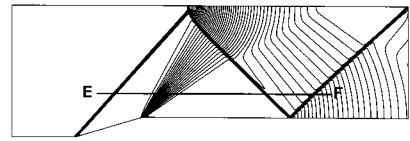


Fig. 10 Fine Grid Solution of Double Shock Reflection

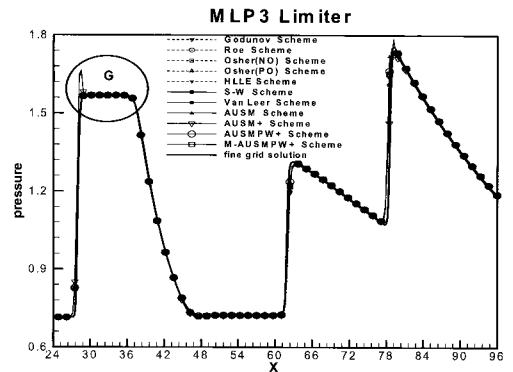


Fig. 11 Comparisons of Pressure Distributions along G-H

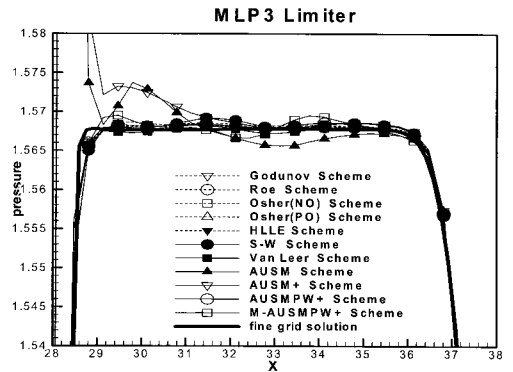


Fig. 12 Comparisons of Pressure Distributions near G

동으로 자유류의 마하수는 2이다. 췌기의 경사면으로 인한 충격파와 이 충격파의 뒷면에 의한 반사충격파 및 경사면이 끝나는 부분에서 발생하는 팽창파의 상호간섭이 발생하는 매우 복잡한 유동이며, 일부의 유량함수를 적용한 해에서 경사충격파 뒤에 충격파후 진동(Post Shock Oscillation)이 발생한다. 본 논문에서는  $300 \times 90$  크기의 격자를 이용하여 계산하였으며 사용된 CFL 수는 0.9이다.

Fig. 9에는 각각의 유량함수에 MLP3 제한자를 적용한 결과를 도시하였다. AUSM, AUSM+를 사용한 결과에서는 경사충격파 뒤에 충격파후 진동이 발생하는 등 단조성을 유지하지 못 하였다. 수치방법에 적용된 압력 센서로 인하여 AUSMPW+, M-AUSMPW+을 이용하면 충격파후 진동이 상당히 완화되었다. 또한 Godunov, Roe, Osher (NO & PO), HLLE,

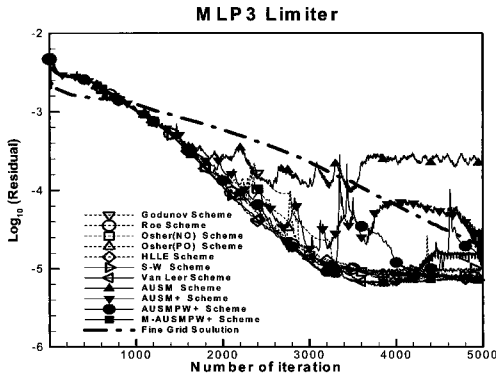


Fig. 13 Convergence Histories with Mlp3 Limiters and Various Flux Functions

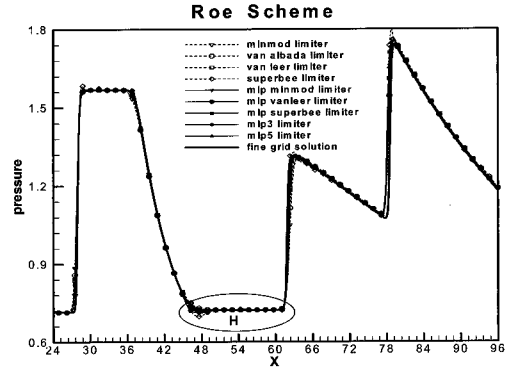


Fig. 15 Comparisons of Pressure Distributions along E-F

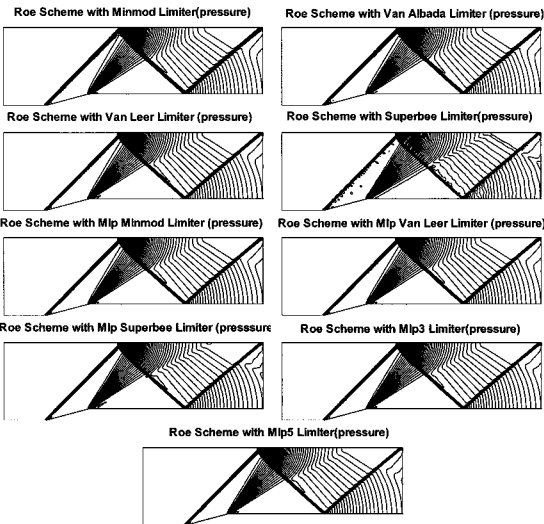


Fig. 14 Isobar Contours of Double Shock Reflection with Roe Scheme and Various Limiters

Steger-Warming, Van Leer를 적용한 결과에서도 충격파후 진동을 볼 수 없었다.

각각의 유량함수와 제한자들을 정확하게 비교 연구하기 위하여 앞에서와 마찬가지로 조밀격자해를 이용하여 결과를 비교하였다. Fig. 10에는 격자수를 각 방향으로 2배 키운 Minmod 제한자와 Roe의 방법으로 구한 압력분포를 도시하였다.

몇몇의 유량함수를 제외하고 결과가 대부분 비슷하여 현재 CFD분야에서 가장 많이 쓰이는 Roe의 방법을 사용하여 조밀 격자해를 계산 하였다. Fig. 11에서는 여러 가지 유량함수와 MLP3 제한자를 적용하여 얻은 압력 분포를 Fig. 10의 E-F부분에서의 압력분포를 도시하였다. 경사충격파가 지나가는 부분에서 조밀격자해와 약간의 차이를 보이지만 비슷한 해석 결과를 보인다. Fig. 12는 Fig. 11의 G부분을 확대한 결과이다.

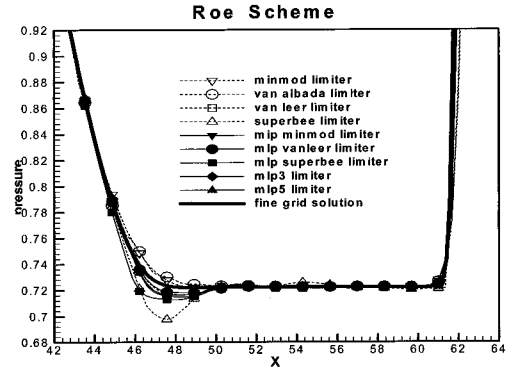


Fig. 16 Comparisons of Pressure Distributions near H

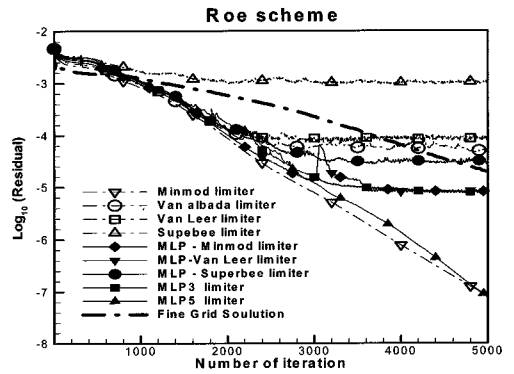


Fig. 17 Convergence Histories with Roe Scheme and Various Limiters

그림에서 보듯이 AUSM과 AUSM+을 사용하면 충격파후 진동을 볼 수 있다. 나머지 대부분의 유량함수들은 조밀격자해와 비슷한 결과를 보여준다. Fig. 13에는 여러 가지 유량함수들에 MLP3 제한자를 적용한 해의 수렴곡선을 도시하였다. 경사충격파 뒤에 진동이 일어나는 AUSM과 AUSM+을 이용하면 수렴성이 저조하였다. 그러나 나머지 대부분의 유량함수들

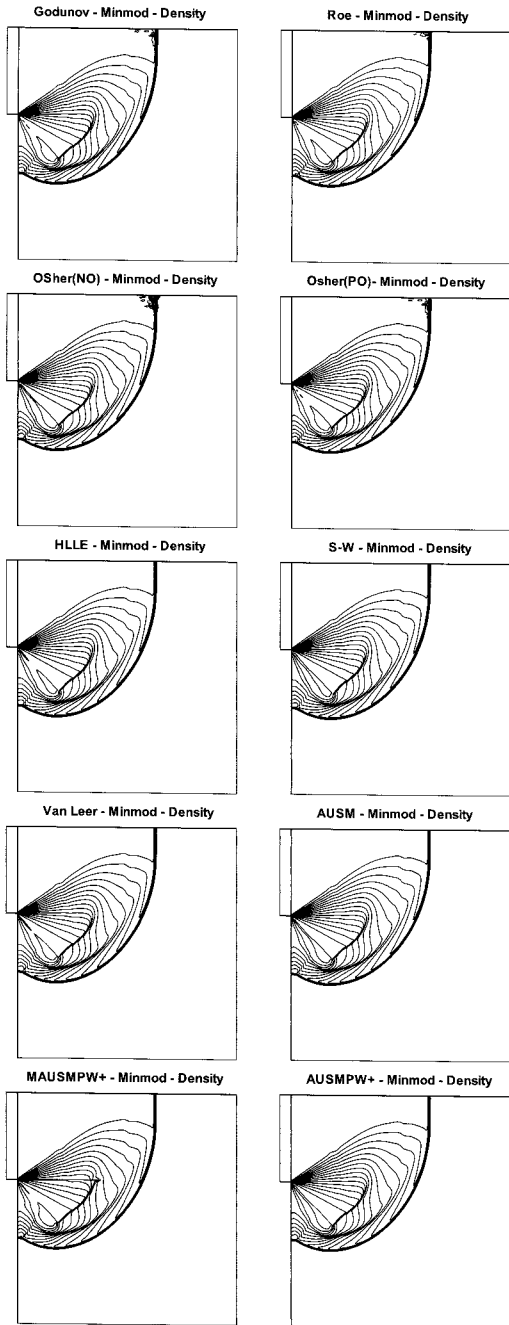


Fig. 18 Density Contours Shock Diffraction with Minmod Limiter and Various Flux Functions

은 비슷한 수렴특성을 보였다.

정상유동에 대하여 각각의 제한자들의 특성을 정량적으로 파악해보자. 이를 위하여 충격파후 진동이 발생하지 않는 Roe Scheme에 각각의 제한자를 적용한 결과를 Fig. 14에 도시하였

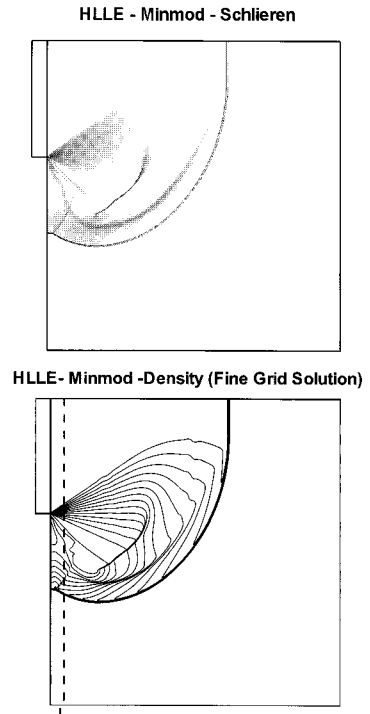


Fig. 19 Fine Grid Solution (Numerical Schlieren and Density Contour)

다. Superbee 제한자를 사용하면 그 자체가 지닌 수치점성으로 인해 경사충격파 뒤에 충격파후 진동이 발생하였다. 이에 비하여 MLP-Superbee 제한자를 이용하면 충격파후 진동이 Superbee 제한자에 비하여 완화되었다. 이는 Superbee 제한자의 특성을 변화시키는 근사적인 다차원성을 고려하였기 때문으로 경사충격파에서 좋은 결과를 얻을 수 있었다고 판단된다.

Fig. 15는 Roe의 방법에 여러 가지 제한자를 적용하여 얻은 결과에서 Fig. 10의 E-F부분에 해당하는 압력 분포를 도시한 것이다. 이 또한 경사 충격파 부근에서 조밀격자해와 차이를 보이지만 대체로 같은 형태를 보이고 있다.

Fig. 16에는 Fig. 15의 H부분을 확대한 것이다. 그림에서 보듯이 팽창파의 끝에서 Superbee 제한자를 적용하면 수치점성으로 인해 Overshoot현상이 보였다. 대부분의 MLP계열의 제한자들은 TVD 제한자보다 조밀격자해와 비슷한 경향을 보였다. Fig. 17에는 Roe에 여러 가지 제한자를 적용한 해의 수렴곡선을 도시하였다. Minmod와 MLP5 제한자를 이용한 경우가 가장 수렴성이 좋고, Superbee 제한자를 사용하면 가장 수렴성이 저조하였다. Van Albada, Van Leer, MLP-Van Leer, MLP-Superbee 제한자를 적용한 경우 수렴성이 좋지 않았다. 또한 MLP-Minmod와 MLP3 제한자를 이용하면 어느 정도 수렴성이 유지 되었다.

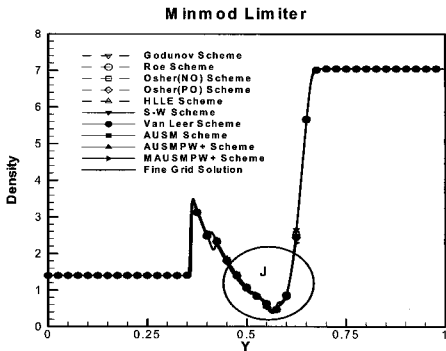


Fig. 20 Comparisons of Density Distributions along I

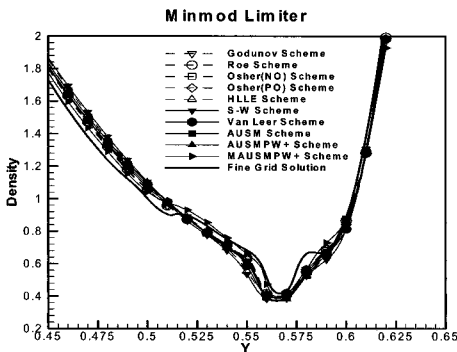


Fig. 21 Comparisons of Density Distributions near J

3.3 충격파 회절

충격파 회절(Shock Diffraction)문제는 마하수 5.09로 이동하는 충격파가 90도 코너에서 회절 할 때의 생성되는 비정상 유동해석 문제이다. 사용된 격자는 2개의 Block을 갖고 있으며 그 크기는 각각 20×150과 380×400이다. 이 문제는 Quirk이 지적하였듯이, 일부의 유량함수를 적용할 때 팽창충격파와 입사충격파(Incipient Shock)의 불안정성이 발생한다. 비교 시의 무차원 시간은  $t=0.1516$ 이고 계산에 사용된 CFL 수는 0.9이다.

Fig. 18에는 각각의 유량함수에 Minmod 제한자를 적용한 등 밀도 선도를 도시하였다. Godunov, Roe, Osher(NO & PO) 방법을 제외한 나머지 유량함수를 적용하면 입사충격파의 홀쭉분리 현상은 발생하지 않는다. 또한 M-AUSMPW+를 이용하면 다른 유량함수에 비하여 팽창충격파와 같은 비 물리적인 해가 나타난다. 앞에서 언급하였듯이, 이 홀쭉분리 현상은 이중 마하 반사에서 발생하는 이상 현상과 동일한 것이다.

Fig. 19에는 Minmod 제한자와 HLL의 방법을 적용하고, 격자수를 각 방향으로 2배 증가시킨 격자계를 이용한 해석 결과이다. 첫 번째 그림은 Numerical Schlieren을 도시하였고, 두 번째는 등밀도 선도를 도시하였다. 그림에는 입사충격파, 회절에 의한 궁형충격파와 팽창파, 궁형충격파 내부의 2차 충

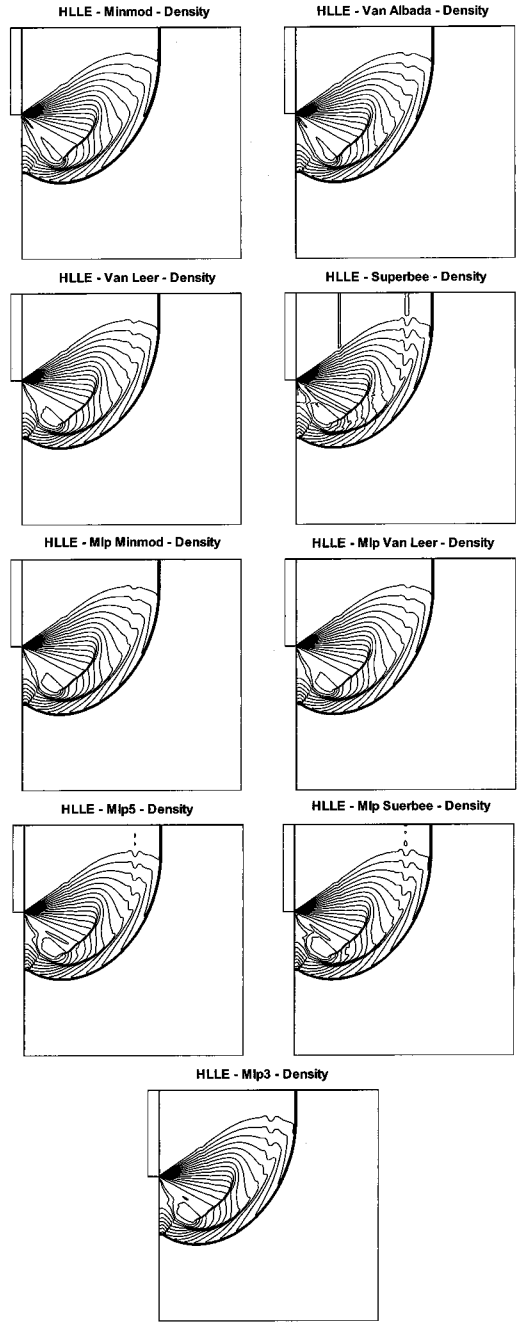


Fig. 22 Density Contours of Shock Diffraction using HLL and various limiters

격파와 접촉 불연속면, 반사충격파 등 매우 복잡한 유동을 자세히 볼 수 있다. 이 결과를 유량함수와 제한자의 특성비교를 위한 기준점으로 이용하였다. Fig. 20은 여러 가지 유량함수들에 Minmod 제한자를 적용하여 얻은 밀도분포를 Fig. 19의 I를



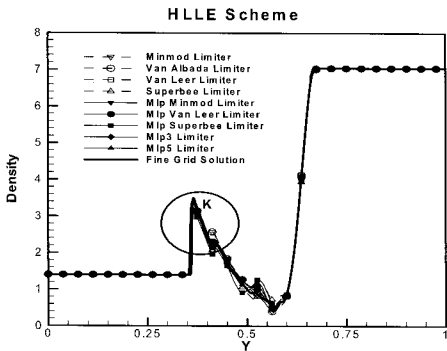


Fig. 23 Comparisons of Density Distributions along I

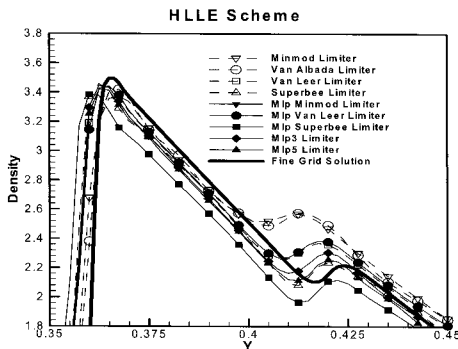


Fig. 24 Comparisons of Density Distributions near K

따라 도시한 그림이다. 대체로 비슷한 해석 결과를 얻을 수 있었다. Fig. 21은 Fig. 20의 J부분을 확대한 부분이다. 여기서 대부분의 유량함수는 조밀격자해와 유사한 형태를 보인다.

비정상 문제에서 여러 가지 제한자들의 특성을 비교하기 위해 HLLE 방법에 각각의 제한자들을 적용한 결과를 Fig. 22에 도시하였다. Superbee와 MLP-Superbee 제한자는 제한자 특성상 큰 수치점성을 지니기 때문에 해의 정확성이 좋지 않았다. Fig. 23은 Fig. 19의 I부분에 해당하는 밀도 분포를 도시한 결과이다. 여기서도 마찬가지로 조밀격자해와 대체로 같은 형상의 결과를 보여준다.

Fig. 24에는 Fig. 23의 K부분을 확대하여 도시하였다. 여기서 MUSCL 제한자를 사용하면 미끄럼 선(Slip Line)영역에서 조밀격자해를 잘 따라가지 못하지만 MLP 제한자를 이용하면 대체로 조밀격자해와 유사하였다.

#### 4. 결 론

유량함수들의 특성과 제한자의 특성과약을 위하여 정상 및 비정상 유동에 대하여 비교연구를 수행하였다. 이중 마하 반

사 문제에서 Godunov, Roe, Osher(NO), Osher(PO), AUSM Type의 유량함수를 적용하면 충격파가 벽면 근처에서 깨지는 현상인 Kinked Mach Stem이 발생한다. 또한, 유량함수 특성상 발생하는 현상인 Kinked Mach Stem을 MUSCL 제한자 및 MLP 기법으로 제거가 불가능 하였다.

이중 충격파 반사 문제에서는 AUSM과 AUSM+의 유량함수를 이용하면 경사충격파 뒤에 충격파후 진동이 발생하였다. 그러나 압력센서를 사용한 AUSMPW+와 M-AUSMPW+를 이용하면 수치진동을 제어함으로써 경사충격파 뒤에 단조성을 유지시켰다. 이 문제에서도 유량함수에 MUSCL 제한자 및 MLP기법을 사용할 때 충격파후 진동이 발생하는 정도의 크기를 줄일 수 있으나 완벽히 제거되지는 않았다.

충격파 회절 문제에서 Godunov, Roe, Osher(NO), Osher(PO)의 유량함수를 적용한 결과에는 입사충격파에 훌쩍분리 현상이 발생하였다. 또한 M-AUSMPW+의 유량함수를 이용하면 팽창 충격파의 비 물리적인 해가 발생하였다. 이들을 제외한 다른 유량함수들을 사용하면 단조성이 유지 되었다.

격자수를 각 방향으로 키운 조밀격자해를 기준으로 비교할 때, 각각의 유량함수를 적용한 결과 대부분 유사한 정확도를 보여주며 제한자들을 적용한 결과 역시 유사한 정확도를 보여준다. 그러나 MUSCL 제한자보다는 MLP 기법을 사용하였을 때 더 나은 결과를 보였다.

#### 후 기

본 논문은 인하대학교 교수연구진흥비(신진)의 지원을 받았으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다. 또한 논문작성 시 MLP와 M-AUSMPW+의 적용에 도움을 주신 김규홍 교수님께도 감사의 말씀드립니다.

#### 참고문헌

- [1] Roe. P.L., 1981, "Approximate Riemann Solver, Parameter Vectors and Difference Scheme," *J. Computational Physics*, Vol.43, pp.135-372.
- [2] Osher. S., and Chakavarthy. S.R., 1983, "Numerical Experiments with Osher Upwind Scheme with Euler Equation," *AIAA J.*, Vol.21, NO.9.
- [3] Steger. J.L. and Warming. R.F., 1981, "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equation with Application to Finite Difference Method," *J. Computational Physics*, Vol.40, pp.263-293.
- [4] Van Leer. B., 1982, "Flux Vector Splitting for the Euler Equations," *Technical Report ICASE 82-30*, NASA Langley

- Research Center, USA.
- [5] Liou. M.S. and Steffen Jr. C.J., 1993, "A New Flux Splitting Scheme," *J. Computational Physics*, Vol.107, pp. 22-39.
- [6] Liou. M.S., 1996, "A Sequel to AUSM : AUSM+," *J. Computational Physics*, Vol.129, pp.364-382.
- [7] Kim. K.H., Kim. C. and Rho. O-H., 2001, "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows 1. AUSMPW+ Scheme," *J. Computational Physics*, Vol.174, pp.38-80.
- [8] Kim. K.H. and Kim. C., 2005, "Accurate, Efficient and Monotonic Numerical Methods for Multi-dimensional Compressible Flows Part 1: Spatial Discretization," *J. Computational Physics*, Vol.208, pp.527-569.
- [9] Van Leer. B., 1974, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme 2. Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order Scheme," *J. Computational Physics*, Vol.14, pp.361-370.
- [10] Kim. K.H. and Kim. C., 2005, "Accurate, Efficient and Monotonic Numerical Methods for Multi-dimensional Compressible Flows Part 2: Multi-dimensional Limiting Process," *J. Computational Physics*, Vol.208, pp.570-615.
- [11] Godunov. S.K., 1959, "A Difference Scheme for Numerical Computation of Discontinuous Solutions of Equations of Fluid Dynamics," *Math. Sb.*, Vol.47, pp.357-393.
- [12] Einfeldt. B., 1988, "On Godunov-type Methods for Gas Dynamics," *SIAM. J. Numer. Anal.*, Vol.25, pp.294-318.
- [13] Woodward. P. and Colella. P., 1984, "The Numerical Simulation of Two-dimensional Fluid Flow with Strong Shocks," *J. Computational Physics*, Vol.54, pp.115-173.
- [14] Quirk. J., 1994, "A Contribution to the Great Riemann Solver Debate," *J. Numerical Methods In Fluids*, Vol.18, pp.555-574.
- [15] Phongthanapanich. S. and Dechaumphai. P., 2004, "Flux-Difference Splitting Scheme with Modified Multidimensional Dissipation on Unstructured Meshes," *J. Chinese Institute of Engineers*, Vol.27, No.7, pp.981-992.
- [16] Toro. E.F., 1997, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer.
- [17] Hirsch. C., 1990, *Numerical Computation of Internal and External at Flows*, John Wiley & Sons., Vol.1, 2.
- [18] Liou. M.S., 1997, "Probing Numerical Fluxes: Mass Flux, Positivity, and Entropy -Satisfying Property," *AIAA Paper.*, 2035, pp.943-954.
- [19] Gressier. J. and Moschetta. J.M., 1997, "On the Pathological Behavior of Upwind Schemes," *AIAA Paper.*, 0110, pp.1-8.
- [20] Lin. H., 1991, "Dissipation Additions to Flux- Difference Splitting," *AIAA Paper.*, 1544, pp.190-198.
- [21] Marie-Claude. D. and Zeitoun. D.E., 2003, "Influence of Numerical and Viscous Dissipation on Shock Wave Reflections in Supersonic Steady Flows," *Computers & Fluids.*, 32, pp.515-533.
- [22] Ren. Y., 2003, "A Robust Shock-Capturing Scheme Based on Rotated Riemann Solvers," *Computers & Fluids.*, 32, pp.1379-1403.