

Hermite 유동함수를 이용한 비압축성 유동계산

김진환*¹

INCOMPRESSIBLE FLOW COMPUTATIONS USING A HERMITE STREAM FUNCTION

J.W. Kim*¹

This paper describes a recent development on the divergence free basis function based on a hermite stream function and verifies its validity by comparing results with those from a modified residual method known as one of stabilized finite element methods. It can be shown that a proper choice of degrees of freedom at a node with a proper arrangement of the hermite interpolation functions can yield solenoidal or divergent free interpolation functions for the velocities. The well-known cavity problem has been chosen for validity of the present algorithm. The comparisons from numerical results between the present and the modified residual showed the present method yields better results in both the velocity and the pressure within modest Reynolds numbers(Re = 1,000).

Key Words : 무발산 요소(Divergence Free Element), 벡터 포텐셜(Vector Potential), 회전 기저 함수(Solenoidal Basis Function), 비회전 기저 함수(Irrotational Basis Function)

1. 서 론

유체, 특히 액체나 저속의 기체 경우에는 밀도 변화를 무시함으로써 유체 운동에 대한 서술을 상당히 단순화할 수 있다. 우리는 이 단순화된 유동 방정식을 비압축성 Navier-Stokes 방정식이라 한다. 이러한 운동 방정식의 단순화는 속도 벡터는 회전(solenoidal)이어야 한다는 구속 조건을 제시하고 있으며, 오히려 이 구속 조건은 단순화된 운동 방정식의 풀이를 더 어렵게 하고 있다.

우리는 Helmholtz 정리로부터 모든 벡터는 회전(solenoidal) 성분과 비회전(irrotational) 성분으로 직교 분리될 수 있음을 안다[1]. 이는 비압축성 Navier-Stokes 방정식도 예외가 아니며, 따라서 다음과 같이 분리된다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = \pi^S(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^S \quad (1.1)$$

$$\nabla p = \pi^I(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{u}) + \underline{f}^I \quad (1.2)$$

여기서, \underline{u} 는 유체 속도 벡터, p 는 압력, ν 는 동점성 계수이다. \underline{f}^S 는 중력항 \underline{f} 의 비보존적 혹은 회전 부분을 의미하며, \underline{f}^I 는 \underline{f} 의 보존적 혹은 비회전 부분을 의미한다. 투사 연산자(projection operator) π^S 와 π^I 는 각각 벡터장의 회전 성분과 비회전 성분을 투사하는 연산자이다.

식 (1.1)은 압력항을 포함하고 있지 않음을 주목한다. Holdeman[2]은 이러한 분리에 대한 물리적 근거로 비압축성 유체에서의 교란의 전파는 순간적이기 때문에 압력 구배항은 비압축성 유동의 지배 방정식에 나타날 수가 없으며, 또 압력은 속도의 함수임으로 유동을 구동하지 않고 유동에 반응할 뿐이라고 주장한다.

회전함수 중에서 가중 함수 \underline{v} 를 취하고, 비회전 함수 중에서 가중 함수 \underline{w} 를 취하여, 식 (1.1)과 (1.2)에 각각 내적을 하면 다음과 같은 변분식을 얻는다.

$$\left(\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} \right) = -(\underline{v}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) - \nu(\nabla \underline{v}, \nabla \underline{u}) + (\underline{v}, \underline{f}^S) \quad (2.1)$$

$$\left(\underline{w}, \nabla p \right) = -(\underline{w}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) - \nu(\nabla \underline{w}, \nabla \underline{u}) + (\underline{w}, \underline{f}^I) \quad (2.2)$$

접수일: 2007년 1월 8일, 심사완료일: 2007년 2월 24일.

1 정회원, 동의대학교 기계공학과

* E-mail: kimjw@deu.ac.kr

여기서, (,)는 내적을 의미한다. 영역 Ω 는 겹치지 않는 (non-overlapping) 소영역들로 나누어지며, 이 소영역들을 요소 (element)라 부른다. 식 (2.1)과 (2.2)는 각각의 요소에 적용되며, 요소 내에서 정의된 기저함수 혹은 형상함수들을 이용하여 식 (2.1)과 (2.2)를 계산하게 된다.

속도 벡터 \underline{u} 가 회전이면 $\underline{u} = \nabla \times \underline{\psi}$ 가 되는 벡터 포텐셜 $\underline{\psi}$ 가 존재하며, 따라서 $\nabla \cdot \underline{u} = \nabla \cdot \nabla \times \underline{\psi} = 0$ 을 항상 만족시킨다. 2차원의 경우, 임의의 벡터 $\underline{\psi}$ 를 취하여 $\underline{\psi} = \psi \hat{k}$ 라 두면, $\nabla \cdot (\nabla \times \psi \hat{k}) = 0$ 이 됨을 쉽게 볼 수 있다. 따라서 속도 벡터 \underline{u} 에 대한 보간 함수는 벡터 포텐셜 $\underline{\psi}$ 를 정의하는 함수의 부공간(subspace)으로부터 취할 수 있다. 그러나 요소 내에서 유동함수 $\underline{\psi}$ 에 대한 보간을 어떻게 정의해야 하는지는 분명하지가 않다. 이를 위해 Holdeman[3,4]은 $\underline{\psi}$ 에 대한 보간 함수로써 hermite 3차 함수의 사용을 제안한 바 있다. 다음 절에서는 hermite 3차 함수를 사용한 회전 및 비회전 유한 요소 기저 함수의 전개 과정을 보인다.

2. 사변형 요소에 대한 보간 함수

2.1 회전(solenoidal) 보간 함수

$\psi^e(x,y)$ 를 사변형 요소 내의 유동 함수 $\psi(x,y)$ 의 근사 값이라 하고 3차 hermite 함수에 의하여 보간된다고 하자. $((\xi,\eta)$ -좌표계를 가지는 master 요소에 대한 hermite 함수는 다음과 같다[5].

$$g_{00i} = (1/8)(1 + \hat{\xi}_i \xi)(1 + \hat{\eta}_i \eta)(2 + \hat{\xi}_i \xi + \hat{\eta}_i \eta - \xi^2 - \eta^2) \quad (3.1)$$

$$g_{10i} = (-1/8)\hat{\xi}_i(1 - \xi^2)(1 + \hat{\xi}_i \xi)(1 + \hat{\eta}_i \eta) \quad (3.2)$$

$$g_{01i} = (-1/8)\hat{\eta}_i(1 - \eta^2)(1 + \hat{\xi}_i \xi)(1 + \hat{\eta}_i \eta) \quad (3.3)$$

여기서, 아래 첨자 'i'는 요소의 절점 번호를 나타내며, $\hat{\xi}_i$ 와 $\hat{\eta}_i$ 는 해당되는 절점 좌표값인 ± 1 을 가진다.

3차 hermite 함수에 대한 자유도는 미지수 그 자신과 각 방향에 대한 도함수들로 구성된다. 임의의 절점 "i"에 대한 자유도를 $(\Psi_i, \partial\Psi_i/\partial x, \partial\Psi_i/\partial y)$ 라 하면, 요소 내에서 유동 함수는 다음과 같이 구한다.

$$\psi^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 \left(\Psi_i g_{0i} + \frac{\partial\Psi_i}{\partial x} g_{xi} + \frac{\partial\Psi_i}{\partial y} g_{yi} \right) \quad (4)$$

여기서,

$$g_{0i} = g_{00i} \quad (5.1)$$

$$g_{xi} = g_{10i} \frac{\partial x}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (5.2)$$

$$g_{yi} = g_{10i} \frac{\partial y}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (5.3)$$

(x, y) 좌표계와 (ξ, η) 좌표계 사이에서 기저 함수의 변환은 다음과 같다.

$$\underline{g}_i = \hat{g}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^t \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 $\underline{g}_i = (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi})$, $\hat{g}_i = (g_{00i} \ g_{10i} \ g_{01i})$ 이다. 변환 도함수 행렬(Jacobian) \mathbf{J} 은 아래와 같이 정의한다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

우리는 Hermite 보간 함수에서 x 및 y 도함수에 대한 함수들의 위치를 바꾸고 \pm 부호를 바꾸더라도 유동 함수의 보간에는 이상이 없음을 주목한다. 따라서 절점 "i"에 대한 자유도가 $(\Psi_i, \partial\Psi_i/\partial y, -\partial\Psi_i/\partial x)$ 혹은 (Ψ_i, U_i, V_i) 가 되도록 기존 hermite 함수들에서 순서와 부호를 바꿀 수 있다. 그러하면 요소 내의 유동 함수에 대한 보간 함수는 다음과 같다.

$$\psi^e(x,y) = \sum_{i=1}^n (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \underline{\Psi}_i^e \quad (8.1)$$

여기서, $\underline{\Psi}_i^e$ 는 요소 절점의 자유도를 의미하며 다음과 같다.

$$\underline{\Psi}_i^e = (\Psi_i \ U_i \ V_i)^t \quad (8.2)$$

여기서, Ψ_i 는 유동 함수 ψ 자신에 대한 자유도, U_i 는 x 방향의 속도 u 그리고 V_i 는 y 방향의 속도 v 에 대한 자유도이다.

회전 속도(solenoidal velocity) 벡터 $\underline{u}^e(x,y)$ 는 $\psi^e(x,y)$ 에 대한 curl을 취함으로써 얻어진다. 따라서

$$\underline{u}^e(x,y) = \nabla \times \psi^e(x,y) \hat{k} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y} (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) - \frac{\partial}{\partial x} (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \right) \underline{\Psi}_i^e \quad (9)$$

회전 속도에 대한 보간 함수를 $\mathbf{S}_i(x, y)$, $i = 1, \dots, 4$ 는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{S}_i(x, y) = \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ S_{11i} & S_{12i} & S_{13i} \\ S_{21i} & S_{22i} & S_{23i} \end{pmatrix} \quad (10)$$

여기서, S_{11i}, \dots, S_{23i} 는 부록에 이들의 도함수들과 함께 나타내었다. 따라서 요소 내의 속도 $\underline{u}^e(x, y)$ 는 아래와 같이 구해진다.

$$\underline{u}^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{S}_i(x, y) \underline{\Psi}_i^e \quad (11)$$

이렇게 구해진 속도 $\underline{u}^e(x, y)$ 가 무발산임을 검증하는 것은 어렵지 않다. 이를 보기 위하여 식들을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{u}^e(x, y) &= \nabla \cdot \sum_{i=1}^4 \mathbf{S}_i(x, y) \underline{\Psi}_i^e \\ &= \sum_{i=1}^4 \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ -\frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ \Psi_{1i}^e \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{-\partial}{\partial x}(g_{0i} & g_{yi} & -g_{xi}) \end{pmatrix} \underline{\Psi}_i^e \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

약간의 수고를 하여 두 요소의 인접 경계면에서 외향 법선 성분들은 서로 크기가 같고 방향이 반대임을 확인할 수 있다. 즉, 요소 경계에서 수직 방향 속도 성분은 연속적이다. 또, 접선 성분에 대하여 살펴보면 연속적이지 못함을 알 수 있다. 그러나 속도 함수가 회전적(solenoidal)이기 위한 최소 요구 조건은 요소 경계에서 수직 성분이 연속이어야 하기 때문에 접선 성분의 불연속은 무발산에 영향을 미치지 않는다.

2.2 비회전(irrotational) 보간 함수

비회전 속도 성분들은 스칼라 포텐셜($\phi(x, y)$)의 구배(gradient)로부터 얻을 수 있다. 스칼라 포텐셜($\phi(x, y)$)의 보간 함수는 식 (5)와 (6)에서 보인 3차 hermite 함수 $g_i(x, y)$ 이다. 임의 사변형에서 $\phi^e(x, y)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \underline{\Phi}_i^e \quad (13)$$

여기서 $\underline{\Phi}_i^e$ 는 스칼라 포텐셜의 자유도로서 다음과 같다.

$$\underline{\Phi}_i^e = (\Phi_i \ \partial\Phi_i/\partial x \ \partial\Phi_i/\partial y)^t \quad (14)$$

비회전 기저 함수, $\mathbf{I}_i(x, y)$, 는 스칼라 포텐셜, $\phi^e(x, y)$, 의 구배(gradient)를 취하여 구하면 된다. 따라서,

$$\begin{aligned} \nabla \phi^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \nabla (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \underline{\Phi}_i^e \\ &= \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} & g_{xi} & g_{yi}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} & g_{xi} & g_{yi}) \end{pmatrix} \underline{\Phi}_i^e \end{aligned} \quad (15)$$

요소 내에서 $\nabla \phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{I}_i(x, y) \underline{\Phi}_i^e$ 로 근사화되기 때문에 비회전 기저 함수, $\mathbf{I}_i(x, y)$, 는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{I}_i(x, y) = \begin{pmatrix} I_{11i} & I_{12i} & I_{13i} \\ I_{21i} & I_{22i} & I_{23i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} & g_{xi} & g_{yi}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} & g_{xi} & g_{yi}) \end{pmatrix} \quad (16)$$

$\mathbf{I}_i(x, y)$ 와 $\nabla \mathbf{I}_i(x, y)$ 의 구체적인 수식화는 회전 기저 함수의 경우와 유사하기 때문에 생략한다.

3. 수치 계산

3.1 무발산 요소의 정식화

임의 사변형 요소에서 식 (2.1)과 (2.2)에 대하여 Galerkin 잔여치법을 적용하기로 한다. 식 (2.1)의 시간항 (\underline{v} , $\frac{\partial}{\partial t} \underline{u}$) 에 대한 요소 행렬을 \mathbf{M}_{ij}^e , 대류항 (\underline{v} , $\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}$) 에 대한 요소 행렬을 \mathbf{C}_{ij}^e , 소산항 ($\nabla \underline{v}$, $\nabla \underline{u}$) 에 대한 요소 행렬을 \mathbf{D}_{ij}^e , 그리고 외력의 회전(solenoidal) 성분을 \mathbf{f}_i^e 라 하면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_j d\Omega_e \quad (17.1)$$

$$\mathbf{C}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i^T \left(u \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (17.2)$$

$$\mathbf{D}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nu \left(\frac{\partial \mathbf{S}_i^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}_i^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (17.3)$$

$$\mathbf{f}_i^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i^T \mathbf{f}^S d\Omega_e \quad (17.4)$$

여기서 위점자 T 및 S 는 각각 전치 행렬과 회전 성분을 의미하며, 요소의 자유도, \mathbf{u}_i^e ,는 식 (8-2)와 같다.

식 (2.2)에 대한 유한 요소 전개를 위하여 압력항 ($\underline{w}, \nabla p$)에 대한 요소 행렬을 $\overline{\mathbf{M}}_{ij}^e$, 대류항 ($\underline{w}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}$)에 대한 요소 행렬을 $\overline{\mathbf{C}}_{ij}^e$, 소산항 $\nu(\nabla \underline{w}, \nabla \underline{u})$ 에 대한 요소 행렬을 $\overline{\mathbf{D}}_{ij}^e$, 그리고 외력 ($\underline{w}, \mathbf{f}^i$)의 비회전 성분을 $\overline{\mathbf{f}}_i^e$ 라 하면 다음과 같이 된다.

$$\overline{\mathbf{M}}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{I}_i^T \mathbf{I}_j d\Omega_e \quad (18.1)$$

$$\overline{\mathbf{C}}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{I}_i^T \left(u \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (18.2)$$

$$\overline{\mathbf{D}}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nu \left(\frac{\partial \mathbf{I}_i^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{I}_i^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{S}_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (18.3)$$

$$\overline{\mathbf{f}}_i^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{I}_i^T \mathbf{f}^I d\Omega_e \quad (18.4)$$

여기서 $\mathbf{I}_i(x, y)$ 는 비회전 기저 함수이다.

식 (17)과 (18)을 이용하여 요소 방정식에 대한 무발산 유한 요소 정식화 과정을 수행하고, 이들을 조합하여 전체 행렬 방정식을 구성하게 된다.

3.2 덮개 움직임에 의한 공동(lid driven cavity) 유동

유동 해석의 새로운 기법들은 대체로 Ghia 등[6]의 공동(cavity) 유동에 대한 수치 결과들과 비교하여 종종 검증하는 관계로 본 연구에서도 이 문제에 대하여 살펴보기로 하였다. 요소의 수는 32 x 32의 균일 요소로 하였으며, 비교할 레이놀즈(Re) 수는 400, 1,000 그리고 3,200 이다. 그리고 무발산 요소의 계산 결과를 Illinca 등[7]이 제시한 수정 잔여치법의 결과와 비교 검토하기로 한다.

수정 잔여치법은 본 학회지[8]에 다단계 부분구조법과 함께 소개된 바가 있으며, 이는 비압축성 유동 방정식의 유한 요소 계산에서 잔여치(residual)의 섭동을 이용하여 무발산 혹은 연속 방정식의 구속 조건을 완화하고자 하는 방법이다. 이 알고리즘은 잘 알려진 Hughes와 Brooks[9]의 Streamline Upwind Petrov Galerkin(SUPG)과 일맥상통하며 Illinca 등은 이

를 토대로 압력 방정식의 좌변 행렬을 유도하여 비압축성 유동 계산에 적용하였다.

현재의 연구에서는 1) 중심 수직선을 따른 수평 방향의 속도, 2) 압력 분포, 그리고 3) 유선 분포를 통하여 무발산 요소법의 수행을 보기로 한다. 위 1)과 2)의 결과들은 수정 잔여치법과 무발산 요소법 모두에 대하여 제시하였으므로 상호간의 비교가 가능하고, 3)에 대하여는 무발산 요소법에 의한 결과만을 제시하였다.

- 1) 중심 수직선을 따른 수평 방향의 속도 : 레이놀즈 수(Re)가 400일 경우(Fig. 1), 수정 잔여치법과 무발산 요소법에 의한 결과들은 모두 Ghia 등이 제시한 결과들과 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 이 경우 두 방법사이의 우열을 가리기가 어렵다. Re = 1,000일 경우(Fig. 2), 완만하게 변하는 부분(0.2 < y < 0.9)에서는 두 방법 모두 Ghia 등의 값들에 근접하고 있으나, 그 이외의 부분에서는 무발산 요소에 의한 값들이 더 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. Re = 3,200인 경우(Fig. 3), 완만하게 변하는 부분(0.1 < y < 0.9)에서는 무발산 요소에 의한 값들이 더 잘 일치함을 볼 수 있고, 아래 부분(0 < y < 0.1)에서는 수정 잔여치법에 의한 값들이, 윗 부분(0.9 < y < 1.0)에서는 무발산 요소에 의한 값들이 더 잘 일치함을 볼 수 있다. 레이놀즈 수가 증가함에 따라 (Re > 3,200), 유동이 빠른 부분에서는 해가 잘 일치하지 않기 때문에 더 많은 수의 요소(64 x 64)에 의한 값들을 도시하여 Ghia 등의 해에 수렴하는지를 보기로 한다. Fig. 4에 64 x 64 요소를 이용한 레이놀즈 수 3,200에 대한 해를 나타내었으며, 이 경우 두 방법들에 의한 해들은 Ghia 등의 해들에 잘 근접하고 있음을 볼 수 있다. 따라서 수정 잔여치법과 무발산 요소법은 적절한 알고리즘이 되기 위한 최소한의 조건은 만족시킴을 알 수 있다.
- 2) 압력 분포 : 수정 잔여치법과 무발산 요소법에 의한 압력 분포를 30개의 등간격 등고선도를 이용하여, 레이놀즈 수가 1,000과 3,200에 대하여 나타내었다. Fig. 5와 Fig. 6에는 Re = 1,000에 대한 압력 분포를, 그리고 Fig. 7과 Fig. 8에는 Re = 3,200에 대한 압력 분포를 나타내었다. 여기서 우리는 수정 잔여치법에 의한 압력 분포는 무발산 요소의 것보다 더 평탄함을 알 수 있다. 즉, 무발산 요소법에 의한 압력값들이 더 자세함을 의미한다. 또 Re = 1,000의 경우, 수정 잔여치법은 좌측 상단에 위글(wiggle)을 보여주고, Re = 3,200의 경우에는 두 방법 모두 좌측 상단에 약간의 위글(wiggle) 현상을 보여준다.
- 3) 유선 분포 : Fig. 9와 10의 등고선도는 무발산 요소법에 의한 유동 함수를 Re = 1,000과 3,200에 대하여 나타낸 것들이다. Re = 1,000의 경우, 주 유동, 좌우 하단의 이차 유동 그리고 좌측 상부의 이차 유동의 시작들은 Ghia 등의 결과

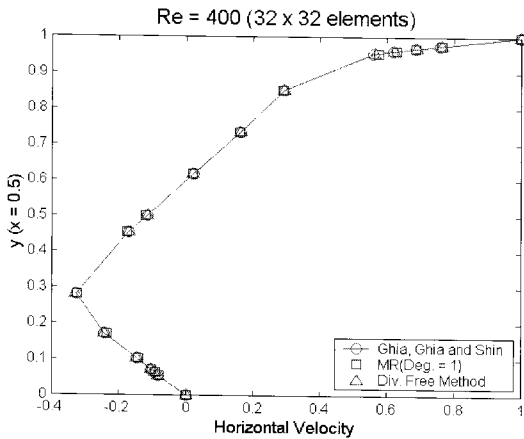


Fig. 1 Horizontal velocities at Re = 400.

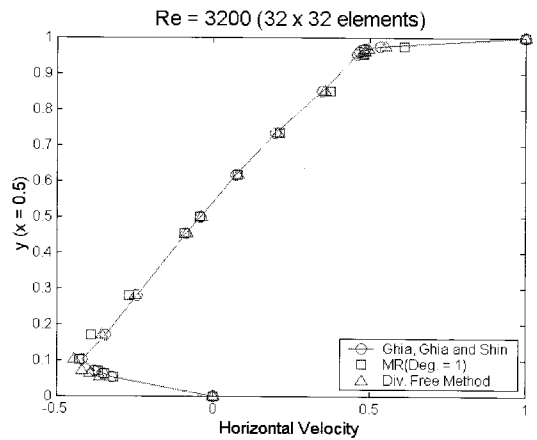


Fig. 3 Horizontal velocities at Re = 3,200.

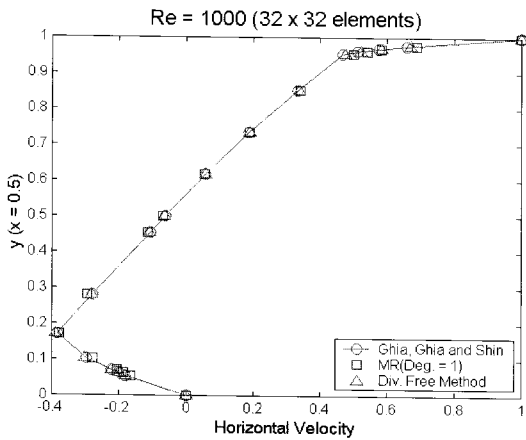


Fig. 2 Horizontal velocities at Re = 1,000.

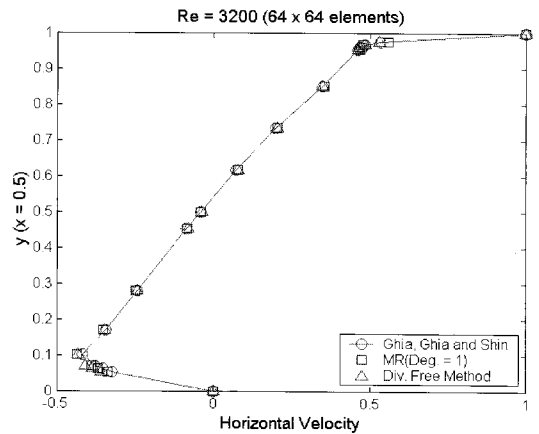


Fig. 4 Horizontal velocities at Re = 3,200 for 64x64 elements.

와 매우 잘 일치하고 있음을 보인다. $Re = 3,200$ 인 경우, 전체적으로 Ghia 등의 결과와 매우 유사하지만 좌측 상단의 이차 유동 형태는 약간 차이가 있음을 알 수 있다. 이는 좌측 상단 꼭지점이 특이적인 관계로 보다 많은 수의 격자점이 요구되지만 현재의 수치 실험에서는 32×32 균일 요소를 사용했기 때문으로 보인다.

4. 결 론

1981년 Griffiths[10]와 Fortin[11]의 연구 이후 무발산 요소의 개발은 거의 중단되었으며, 더구나 이들의 연구는 요소 전체에 대한 평균적 개념의 무발산 요소들이었다. 최근 Holdeman[2,3,4]은 hermite 벡터 포텐셜의 사용을 통한 무발산 요소를 제시하였으며, 본 연구는 벡터 포텐셜의 도입과 절점 자유도의 선택은 항상 무발산 속도 보간 함수를 줄 수 있음에 주목하고 이를 재조명하였다. 이는 적절한 C^1 함수를 취하

여 고차의 무발산 요소를 개발할 수 있음을 보이며, 이는 추후 진행하여야 할 사항이다.

최근에는 무발산 구속 조건이 야기하는 부정형 행렬의 어려움을 극복하기 위하여 잔여치의 섭동을 이용한 안정화된 유한 요소법의 연구가 진행되고 있으며, 본 연구에서는 잘 알려진 정사각형 공동(cavity) 문제를 통하여 두 기법들에 의한 결과들을 비교하여 보았다. 그 결과, 현재의 무발산 요소에 의한 방법은 높은 레이놀즈 수에서의 사용은 보다 세밀한 격자 구조를 요구하거나 혹은 안정화 기법의 도입이 필요할 것으로 보이나, 층류 유동에는 안정화 유한 요소법보다 더 잘 수행한다고 볼 수 있다. 특히, 안정화 유한 요소법들은 모두 내재적 시간 변수값의 결정을 요구하며 이는 쉽지 않다.

현재의 방법은 비압축성 유동 해석 뿐 아니라 전자장 해석과 같은 분야에도 적용 가능하기 때문에 더 심도있는 연구가 필요하며, 고차 요소 및 3차원에서 적용 가능하도록 개발할 필요가 있다고 하겠다.

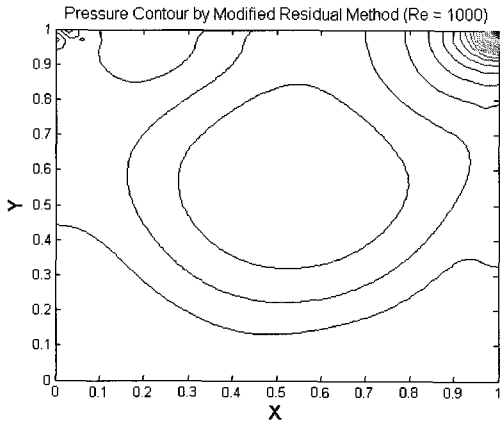


Fig. 5 Pressure Contour by Modified Residual method for Re=1,000.

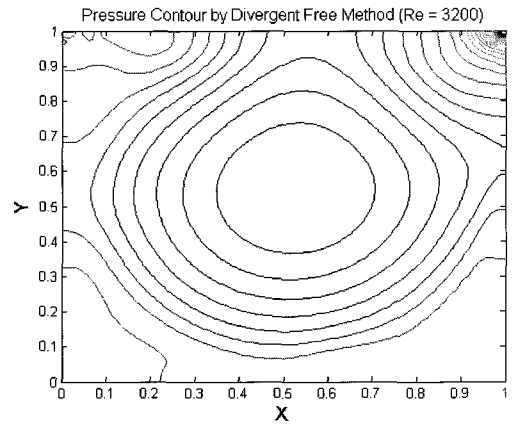


Fig. 8 Pressure Contour by Divergent Free method for Re=3,200.

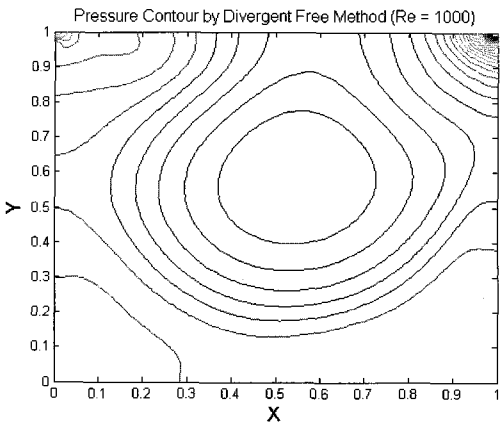


Fig. 6 Pressure Contour by Divergent Free method for Re=1,000.

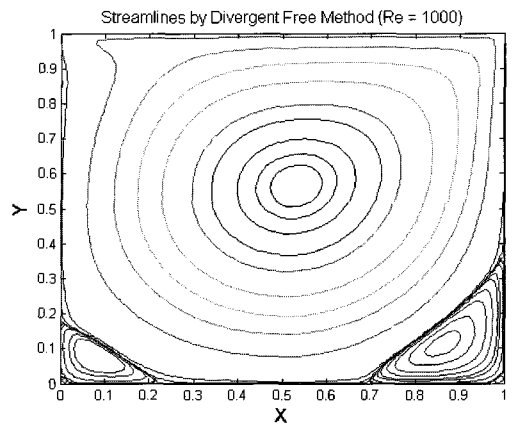


Fig. 9 Streamlines by Divergent Free method for Re=1,000.

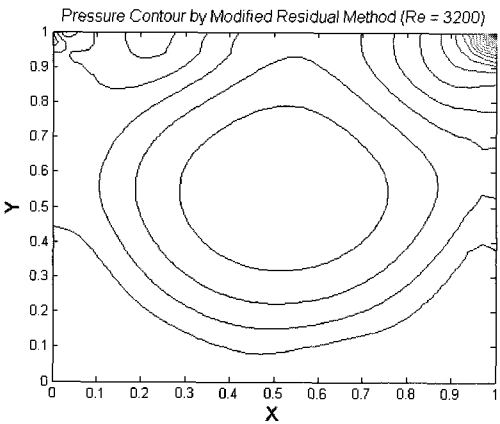


Fig. 7 Pressure Contour by Modified Residual method for Re=3,200.

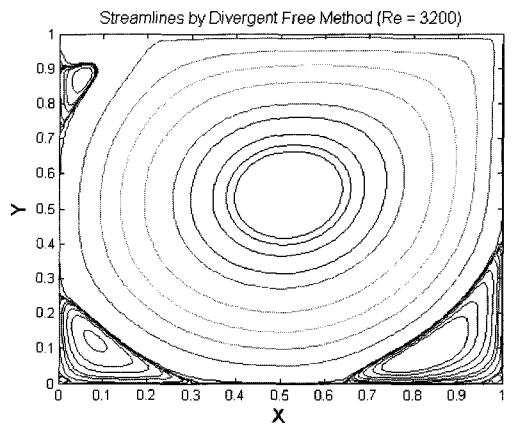


Fig. 10 Streamlines by Divergent Free method for Re=3,200.

부록 : 회전 기저 함수와 이의 도함수들

(x, y) 좌표계와 (ξ, η) 좌표계 사이의 Jacobian 행렬 \mathbf{J} 는 식 (7)에서 정의한 바와 같다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

따라서 \mathbf{J}^{-1} 는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (A1)$$

여기서, $\Delta = \det \mathbf{J} = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12}$ 이다.

$\hat{\mathbf{S}}_i(\xi, \eta)$ 를 (ξ, η) 좌표계의 회전 기저 함수라 하면, $\hat{\mathbf{S}}_i(\xi, \eta) = \nabla(\xi, \eta) \times (g_{00i} \ g_{01i} \ -g_{10i})$ 로부터 다음과 같이 된다.

$$\hat{\mathbf{S}}_i(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta}(g_{00i} \ g_{01i} \ -g_{10i}) \\ \frac{\partial}{\partial \xi}(g_{00i} \ g_{01i} \ -g_{10i}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{11i} & \hat{S}_{12i} & \hat{S}_{13i} \\ \hat{S}_{21i} & \hat{S}_{22i} & \hat{S}_{23i} \end{pmatrix} \quad (A2)$$

여기서

$$\begin{aligned} \hat{S}_{11i} &= \frac{\partial g_{00i}}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{8} \hat{\eta}_i (1 + \hat{\xi}_i \xi) (\hat{\xi}_i \xi - \xi^2 + 3 - 3\eta^2) \\ \hat{S}_{12i} &= \frac{\partial g_{01i}}{\partial \eta} = \frac{1}{8} (1 + \hat{\xi}_i \xi) (2\hat{\eta}_i \eta + 3\eta^2 - 1) \\ \hat{S}_{13i} &= \frac{-\partial g_{10i}}{\partial \eta} = \frac{1}{8} \hat{\xi}_i \hat{\eta}_i (1 - \xi^2) (1 + \hat{\xi}_i \xi) \\ \hat{S}_{21i} &= \frac{-\partial g_{00i}}{\partial \xi} \\ &= -\frac{1}{8} \hat{\xi}_i (1 + \hat{\eta}_i \eta) (\hat{\eta}_i \eta - \eta^2 + 3 - 3\xi^2) \\ \hat{S}_{22i} &= \frac{-\partial g_{01i}}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \hat{\xi}_i \hat{\eta}_i (1 + \hat{\eta}_i \eta) (1 - \eta^2) \end{aligned}$$

$$\hat{S}_{23i} = \frac{\partial g_{10i}}{\partial \xi} = \frac{1}{8} (1 + \hat{\eta}_i \eta) (-1 + 2\hat{\xi}_i \xi + 3\xi^2)$$

이다. $\mathbf{S}_i(x, y) = \nabla \times (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi})$ 로부터 $\mathbf{S}_i(x, y)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \\ -\frac{\partial}{\partial x}(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_{11i} & S_{12i} & S_{13i} \\ S_{21i} & S_{22i} & S_{23i} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (A3)$$

로 정의하면, 각 항들, S_{11i}, \dots, S_{23i} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_{11i} &= \frac{\partial g_{0i}}{\partial y} = (J_{11} \hat{S}_{11i} + J_{12} \hat{S}_{21i}) / \Delta \\ S_{12i} &= \frac{\partial g_{yi}}{\partial y} = (J_{11} (\hat{S}_{12i} J_{22} - \hat{S}_{13i} J_{21}) \\ &\quad + J_{12} (\hat{S}_{22i} J_{22} - \hat{S}_{23i} J_{21})) / \Delta \\ S_{13i} &= \frac{-\partial g_{xi}}{\partial y} = (J_{11} (-\hat{S}_{12i} J_{12} + \hat{S}_{13i} J_{11}) \\ &\quad + J_{12} (-\hat{S}_{22i} J_{12} + \hat{S}_{23i} J_{11})) / \Delta \\ S_{21i} &= \frac{-\partial g_{0i}}{\partial x} = (J_{21} \hat{S}_{11i} + J_{22} \hat{S}_{21i}) / \Delta \\ S_{22i} &= \frac{-\partial g_{yi}}{\partial x} = (J_{21} (\hat{S}_{12i} J_{22} - \hat{S}_{13i} J_{21}) \\ &\quad + J_{22} (\hat{S}_{22i} J_{22} - \hat{S}_{23i} J_{21})) / \Delta \\ S_{23i} &= \frac{\partial g_{xi}}{\partial x} = (J_{21} (-\hat{S}_{12i} J_{12} + \hat{S}_{13i} J_{11}) \\ &\quad + J_{22} (-\hat{S}_{22i} J_{12} + \hat{S}_{23i} J_{11})) / \Delta \end{aligned}$$

변환 행렬 \mathbf{T} 는 $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$ 임을 이용하면 회전 기저 함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{S}_i(x, y) = \mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{S}}_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (A4)$$

(ξ, η) 좌표계에서의 회전 기저 함수의 도함수들, $\partial \hat{\mathbf{S}}_i(\xi, \eta) / \partial \xi$ 와 $\partial \hat{\mathbf{S}}_i(\xi, \eta) / \partial \eta$,은 아래와 같다.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{S}}_i}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \hat{S}_{11i} & \hat{S}_{12i} & \hat{S}_{13i} \\ \hat{S}_{21i} & \hat{S}_{22i} & \hat{S}_{23i} \end{pmatrix} \quad (A5)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{S}}_i}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \begin{pmatrix} \hat{S}_{11i} & \hat{S}_{12i} & \hat{S}_{13i} \\ \hat{S}_{21i} & \hat{S}_{22i} & \hat{S}_{23i} \end{pmatrix} \quad (\text{A6})$$

(x, y) 좌표계에서의 도함수들, $\partial \mathbf{S}_i(x, y) / \partial x$ 와 $\partial \mathbf{S}_i(x, y) / \partial y$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}_i(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{S}}_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\mathbf{T}^{-1}}{\Delta} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{S}}_i}{\partial \xi} J_{22} - \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}_i}{\partial \eta} J_{21} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}_i(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{S}}_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\mathbf{T}^{-1}}{\Delta} \left(-\frac{\partial \hat{\mathbf{S}}_i}{\partial \xi} J_{12} + \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}_i}{\partial \eta} J_{11} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

후 기

본 논문은 2006학년도 동의대학교 학술연구조성비의 지원에 의하여 수행되었으며, 이에 감사드립니다. 또 Holdeman 박사님(1056 Lovell Rd., Knox, TN USA 37932-3060)의 많은 가르침에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] C. Pozrikidis, 1977, Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Oxford University Press.
- [2] Holdeman, J.T., 2002, "Recent Advances in the Finite Element Method for Incompressible Flow," USNCTAM14 Conference, Blacksburg, VA.
- [3] Holdeman, J.T., 2004, "I. Some Lagrange Interpolation

functions for solenoidal and irrotational vector fields," manuscript, submitted to Mathematics of Computation, <http://j.t.holdeman.home.att.net>

- [4] Holdeman, J.T., 2004, "II. Some Hermite Interpolation functions for solenoidal and irrotational vector fields," manuscript, submitted to Mathematics of Computation, <http://j.t.holdeman.home.att.net>
- [5] Lapidus, L. and Pinder, G.F., 1982, Numerical solution of Partial Differential Equations in Sciences and Engineering, John Wiley & Sons, Inc.
- [6] Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," J. of Comp. Physics, Vol.48, pp.387-411.
- [7] Ilinca, F., Hetu, J.F. and Pelletier, D., 2000, "On stabilized finite element formulations for incompressible advective-diffusive transport and fluid flow problems," Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.188, pp.235-255.
- [8] 김진환, 2005, "유동계산을 위한 다단계 부분 구조법에 대한 연구," 한국전산유체공학회, 제10권, 제2호, pp.38-47.
- [9] Hughes, T.J.R. and Brooks, A.N., 1979, "A Multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion," Hughes, T.J.R. (Ed.), Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, Vol.34, ASME, New York, pp.19-35.
- [10] Griffiths, D.F., 1981, "An Approximately Divergence-Free 9-Node Velocity Element (With Variations) For Incompressible Flows," Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol.1, pp.323-346.
- [11] Fortin, M., 1981, "Old and New Finite Elements for Incompressible Flows," Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol.1, pp.347-364.