일종의 비선형 시간 지연 시스템에 대한 광역 점근적 안정성

Global Asymptotic Stability of a Class of Nonlinear Time-Delay Systems

최 준 영*
(Joon-Young Choi)

Abstract : We analyze the stability property of a class of nonlinear time-delay systems. We show that the state variable is bounded both below and above, and the lower and upper bounds of the state are obtained in terms of a system parameter by using the comparison lemma. We establish a time-delay independent sufficient condition for the global asymptotic stability by employing a Lyapunov-Krasovskii functional obtained from a change of the state variable. The simulation results illustrate the validity of the sufficient condition for the global asymptotic stability.

Keywords : nonlinear systems, time-delay systems, global asymptotic stability

I. 서론

인터넷 혼잡 제어는 정해진 규칙에 따라 망의 대역폭을 다수의 동시 사용자에게 할당해 주는 분산 피드백 제어 알고리즘이다. 1987년 최초로 소개된 이후[1], 망의 규모와 성능의 발전에 따라 TCP Reno, TCP Vegas, HSTCP, STCP, BIC TCP, FAST TCP [2-4]등 다양한 특성의 혼잡 제어 알고리즘들이 개발되어 사용되어 왔다. 이러한 과정 속에서 1990년대 후반부터 혼잡제어 알고리즘들의 동역학적 특성을 분석하고, 그 결과를 새로운 혼잡 제어 알고리즘을 설계할 때 활용하고자 하는 노력이 시도 되었다[5].

본 논문에서 다루는 비선형 시간 지연 시스템은 [4]에서 FAST TCP의 동역학적 특성을 표현하기 위하여 제안된 모델에 불확실성을 포함시켜 일반화한 시스템이다. [4]에서는 제안된 모델 중 이산 시간 시스템 만을 분석하고 있고, 연속 시간 시스템에 대하여는 모델의 소개만 할 뿐 아무런 분석을 수행하고 있지 않다.

일반적으로 시간 지연 시스템을 이론적으로 분석하기 위한 도구로는 Krasovskii 안정성 이론과 Razumikhin 안정성 이론이 알려져 있는데[6,7], 본 논문에서는 다루고자 하는 비선형 시스템에 적합한 Krasovskii 안정성 이론을 선택하여 적용한다. Krasovskii 안정성 이론을 적용하기 위하여는 분석 대상 시스템에 적절한 Lyapunov-Krasovskii functional을 찾아야 하는데, 이는 비선형 시스템인 경우에는 일반적으로 어려운 작업으로 알려져 있다[6].

본 논문에서 다루고자 하는 시스템에 적절한 Lyapunov-Krasovskii functional을 제시하기 위하여 시스템의 고유 특성을 적절히 이용한다. 즉, 일종의 비선형 상태 변수 변환을 제안하고 그 변환을 통하여 생성된 새로운 시스템에 대한 Lyapunov-Krasovskii functional을 찾아 시스템의 안정성을 분석한다. 이러한 방법으로 시스템의 광역 점근적 안정성에 대한 충분조건을 시스템 매개변수의 크기에 대한 조건으로 제시한다. 또한, 시스템의 상태변수의 유계성에 관하여 분석을 하고, 상태변수의 상계 및 하계를 시스템 매개 변수의 함수로 제시한다.

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2006. 10. 14., 채택확정 : 2007. 2. 2.
최준영 : 부산대학교 전자전기통신공학부 컴퓨터및정보통신연구소
(jyc@pusan.ac.kr)
※ 이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

II. 문제 정의

본 논문에서 다루는 비선형 시간지연 시스템은 다음과 같이 유도된다. [4]에서 제시된 다중 링크 다중 전송자 네트워크 환경에서 FAST TCP 전송자의 혼잡 윈도우 모델로부터 단일 링크 단일 전송자 네트워크 환경에서의 혼잡 윈도우 모델을 선택한다. 이러한 단일 링크 단일 전송자 네트워크의 모델에 [4]에서 사용된 정적 링크 모델을 일반화하여 확장하면 다음과 같은 단일 상태변수를 갖는 비선형 시간 지연 시스템이 얻어진다.

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \frac{d}{d + f(x(t-\tau))}x(t) + \alpha \tag{1}$$

위 식의 초기조건은 다음과 같이 가정한다.

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta) > 0, \quad \theta \in [-\tau, 0] \tag{2}$$

위 식에서 $x(t) \in R$ 는 상태 변수, d 는 양의 상수, α 는 양의 제어 매개 변수, τ 는 시간 지연 상수, $\phi(\cdot) \in R$ 는 연속 함수, $f(\cdot) \in R$ 는 미분 가능한 연속 함수로서 정확하게 알려져 있지 않고 대신 다음과 같은 특성을 만족한다고 가정한다.

특성 1: 함수 $f(\cdot)$ 의 독립변수에 관한 미분 값과 $f(0)$ 값은 아래와 같은 유계특성을 나타낸다.

(i) $0 < l \le \dfrac{df(x)}{dx} \le L$

(ii) $f(0) \ge -d$

본 논문의 문제를 정확하게 기술하면, (2)의 초기조건을 갖는 비선형 시간 지연 시스템 (1)이 광역 점근적 안정성을 갖도록 하는 제어 매개변수 α 의 조건을 구하는 것이다.

III. 상태 변수의 유계성

상태 변수 $x(t)$ 의 유계성에 관하여 분석을 하는데, 우선 아래의 보조정리에서는 $x(t)$ 와 $f(x(t-\tau))$ 의 하계를 제시한다.

보조정리 1: (1)과 (2)로 정의되는 시스템의 상태변수 $x(t)$

는 다음과 같이 하계 0을 갖는다.

$$x(t) > 0 \quad \text{for all} \quad t \geq t_0 - \tau \tag{3}$$

또한, $f(x(t-\tau))$ 도 다음과 같이 하계 $-d$ 을 갖는다.

$$f(x(t-\tau)) > -d \quad \text{for all} \quad t \geq t_0 \tag{4}$$

증명: 시간 t_1 에서 $x(t)$ 가 0, 즉 $x(t_1) = 0$ 이라고 가정을 하면 다음과 같은 식을 (1)로부터 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t_1) = -x(t_1) + \frac{d}{d + f(x(t_1 - \tau))} x(t_1) + \alpha = \alpha > 0 \tag{5}$$

시간 t_1 에서의 $x(t)$ 의 기울기가 항상 양수이므로, $x(t)$ 는 항상 양의 값이라고 할 수 있다. 이러한 성질과 특성 1로부터 모든 $t \geq t_0$ 에 대하여 $f(x(t-\tau)) > -d$ 임을 알 수 있다.■

보조정리 1을 근거로 하여 상태 변수 $x(t)$ 와 $f(x(t-\tau))$ 의 더욱 강화된 궁극적 하계 값을 아래의 보조정리에서 제시한다.

보조정리 2: (1)과 (2)로 정의되는 시스템의 상태변수 $x(t)$ 는 다음과 같이 궁극적 하계 α 를 갖는다.

$$x(t) > \alpha \quad \text{for all sufficiently large} \quad t \tag{6}$$

또한, $f(x(t-\tau))$ 도 다음과 같이 궁극적 하계를 갖는다.

$$f(x(t-\tau)) > l\alpha - d \quad \text{for all sufficiently large} \quad t \tag{7}$$

증명: 보조정리 1로부터 $\frac{d}{d+f} x(t) > 0$ 가 성립함을 알 수 있고, 이를 이용하면 다음과 같은 부등식을 (1)로부터 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) > -x(t) + \alpha \tag{8}$$

위 식에 대하여 Comparison lemma[8]를 적용하면 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있고, 이는 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $x(t) > \alpha$ 임을 증명한다.

$$x(t) > \alpha + (x(t_0) - \alpha)\exp(-(t - t_0)) \tag{9}$$

이러한 결과에 특성 1을 적용하면 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $f(x(t-\tau)) > l\alpha - d$ 임을 알 수 있다. ■

아래의 보조정리는 상태 변수 $x(t)$ 의 상계를 제시한다.

보조정리 3: (1)과 (2)로 정의되는 시스템에서 $\alpha > \frac{d}{l}$ 이면, 상태변수 $x(t)$ 는 다음과 같이 궁극적 상계를 갖는다.

$$x(t) < \frac{\alpha^2}{\alpha - \frac{d}{l}} \quad \text{for all sufficiently large} \quad t \tag{10}$$

증명: 보조정리 2로부터 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $\frac{d}{d+f} x(t) < \frac{d}{l\alpha} x(t)$ 가 성립함을 알 수 있고, 이를 이용하면 다음과 같은 부등식을 (1)로부터 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) < -x(t) + \frac{d}{l\alpha} x(t) + \alpha \tag{11}$$

위 식에 대하여 본 보조정리의 조건과 Comparison lemma를 적용하면 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있고, 이는 증명을 완결한다.

$$x(t) < \frac{\alpha^2}{\alpha - \frac{d}{l}} + \left(x(t_0) - \frac{\alpha^2}{\alpha - \frac{d}{l}} \right) \exp(-(t - t_0)) \tag{12}$$

■

IV. 광역 점근적 안정성

Krasovskii 안정성 이론을 이용하여 광역 점근적 안정성을 보장하는 충분조건을 구하려고 하는데, 이를 위하여는 적절한 Lyapunov-Krasovskii functional을 찾아야 한다. 이러한 접근 방법을 용이하게 하기 위하여 아래와 같이 상태 변수를 변환한다.

$$y(t) := \ln \frac{1}{x(t)} \Leftrightarrow x(t) := \exp(-y(t)) \tag{13}$$

상태변수 $x(t)$ 의 평형점을 x^* 라 하면 (1)로부터 다음 등식을 얻을 수 있다.

$$-x^* + \frac{d}{d + f(x^*)} x^* + \alpha = 0 \tag{14}$$

또한, 상태변수 $y(t)$ 의 평형점을 y^* 라 하고, $\tilde{x}(t) := x(t) - x^*$ 와 $\tilde{y}(t) := y(t) - y^*$ 라 정의하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$1 - \exp(\tilde{y}) = \frac{\tilde{x}}{x} \tag{15}$$

(14)와 (15)를 이용하면 $\tilde{y}(t)$ 에 대한 미분방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \frac{\alpha}{x^*}(1 - \exp(\tilde{y}(t))) + \frac{d}{(d + f^*)(d + f(x(t-\tau)))} \tilde{f}(x(t-\tau)) \tag{16}$$

위 식에서 $f^* := f(x^*)$, $\tilde{f}(x(t-\tau)) := f(x(t-\tau)) - f(x^*)$ 이다. (16)의 광역 점근적 안정성에 대한 충분 조건을 구하기 위하여 다음 보조정리를 제시한다.

보조정리 4: (16)에서 $\tilde{f}(x(t-\tau))$ 과 $f(x(t-\tau))$ 는 다음 부등식을 만족한다.

(i) $|\tilde{f}(x(t-\tau))| < L|\tilde{x}(t-\tau)|$

(ii) $f(x(t-\tau)) > lx(t-\tau) - d$

증명: 특성 1의 (i)과 중간 값의 정리[9]를 이용하면 본 보조정리의 (i)은 쉽게 증명이 된다. 또한 (ii)도 특성 1로부터 쉽게 얻을 수 있다. ■

(16)의 광역 점근적 안정성은 $\tilde{y}(t)$ 가 0으로 수렴하는 것을 나타내고, 이는 (15)에 의하여 $\tilde{x}(t)$ 가 0으로 수렴하는 것을

내포하고, 결국 (1)의 광역 점근적 안정성을 의미한다. 따라서 (1)의 광역 점근적 안정성을 증명하기 위해서는 (16)의 광역 점근적 안정성을 증명하는 것으로 충분하다. 다음의 정리는 시스템 (16)의 광역 점근적 안정성을 보장하는 충분 조건을 제시하는데, 그 조건은 시간 지연에 독립적인 특성을 갖는다.

정리 1: (16)에서 $\alpha > \frac{Ldx^*}{l(d+f^*)}$ 이면, (16)은 광역점근적으로 안정하다.

증명: 우선 아래와 같은 Lyapunov-Krasovskii functional을 정의한다.

$$V(\tilde{y},t) = |\tilde{y}(t)| + \frac{Ld}{l(d+f^*)}\int_{-\tau}^{t} |\exp(\tilde{y}(\theta))-1| d\theta \qquad (17)$$

위 식의 오른쪽 도함수를 (16)의 해를 따라서 구하면 다음과 같이 전개 된다.

$$\begin{aligned}
&D^+V(\tilde{y},t)\\
&= \dot{\tilde{y}}(t)\mathrm{sgn}(\tilde{y}(t)) + \frac{Ld}{l(d+f^*)}\left(|\exp(\tilde{y}(t))-1| - |\exp(\tilde{y}(t-\tau))-1|\right)\\
&= -\frac{\alpha}{x^*}|\exp(\tilde{y}(t))-1|\\
&-\left(\frac{d}{(d+f^*)(d+f(x(t-\tau)))}\tilde{f}(x(t-\tau))\right)\mathrm{sgn}(\tilde{y}(t))\\
&+\frac{Ld}{l(d+f^*)}\left(|\exp(\tilde{y}(t))-1| - |\exp(\tilde{y}(t-\tau))-1|\right)\\
&\le -\frac{\alpha}{x^*}|\exp(\tilde{y}(t))-1|\\
&+\left|\frac{d}{(d+f^*)(d+f(x(t-\tau)))}\tilde{f}(x(t-\tau))\right|\\
&+\frac{Ld}{l(d+f^*)}\left(|\exp(\tilde{y}(t))-1| - |\exp(\tilde{y}(t-\tau))-1|\right)\\
&\le -\frac{\alpha}{x^*}|\exp(\tilde{y}(t))-1| + \left|\frac{dL}{(d+f^*)}\frac{\tilde{x}(t-\tau)}{x(t-\tau)}\right|\\
&+\frac{Ld}{l(d+f^*)}\left(|\exp(\tilde{y}(t))-1| - |\exp(\tilde{y}(t-\tau))-1|\right)\\
&\text{(보조정리4를 이용)}\\
&= -\frac{\alpha}{x^*}|\exp(\tilde{y}(t))-1| + \frac{Ld}{(d+f^*)}|\exp(\tilde{y}(t-\tau))-1|\\
&+\frac{Ld}{l(d+f^*)}\left(|\exp(\tilde{y}(t))-1| - |\exp(\tilde{y}(t-\tau))-1|\right)\\
&\text{((15)를 이용)}\\
&= -\frac{\alpha}{x^*}|\exp(\tilde{y}(t))-1| + \frac{Ld}{l(d+f^*)}|\exp(\tilde{y}(t))-1|\\
&= -\frac{1}{x^*}\left(\alpha - \frac{Ldx^*}{l(d+f^*)}\right)|\exp(\tilde{y}(t))-1| \qquad (18)
\end{aligned}$$

위 식에서 α 가 본 정리의 조건을 만족하고 $\tilde{y}(t)\neq 0$ 이면 $|\exp(\tilde{y}(t))-1|>0$ 이므로, Krasovskii 이론에 의하여 (16)의 평형점은 광역 점근적 안정성 특성을 나타낸다[10]. ■

정리 1에 의하면 제어매개변수 α 를 충분히 큰 값으로 정하면 (16)은 광역 점근적으로 안정하고, 이는 원래의 시스템 (1)이 광역 점근적으로 안정한 것을 의미한다. 이런 결과를 얻게 되는 원인은 (1)에서는 설명하기 어려우나 (13)의 상태변수 변환을 통하여 생성된 (16)을 보면 쉽게 설명할 수 있다. (16)의 $\frac{\alpha}{x^*}(1-\exp(\tilde{y}(t)))$ 항은 제어 매개 변수 α 에 비례하고, 이 항은 (18)에서 알 수 있듯이 Lyapunov-Krasovskii functional의 도함수를 음으로 만들어 주는 항이므로, α 가 크면 클수록 (16)은 더욱 안정하게 되는 것을 추론할 수 있다. 또한, 시간 지연에 독립적인 충분 조건을 얻을 수 있는 이유는 Krasovskii 이론에 의하여 (17)과 같은 Lyapunov-Krasovskii functional이 존재하고 발견할 수 있었기 때문이다[6,7].

따름정리 1: (16)에서 $\alpha > \frac{Ld}{l^2}$ 이면, (16)은 광역 점근적으로 안정하다.

증명: 보조정리 4의 (ii)로부터 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$1 > \frac{lx^*}{f^*+d} \qquad (19)$$

이 부등식을 정리 1의 조건에 적용을 하면 다음과 같은 논리관계를 얻을 수 있고 이는 본 따름정리를 증명한다.

$$\alpha > \frac{Ld}{l^2} \Rightarrow \alpha > \frac{Ld}{l^2}\frac{lx^*}{(d+f^*)} \qquad (20)$$

■

V. 모의 실험

따름정리 1에서 제시된 광역 점근적 안정성에 대한 충분조건을 예증하기 위하여 모의 실험을 실행한다. 함수 $f(\cdot)$ 는 다음과 같이 선택 한다.

$$f(x(t-\tau)) = \frac{1}{3}x(t-\tau) - 2$$

위의 식에서 지연시간 τ 는 10으로 설정한다. 특성 1의 (i)에서 정의된 l 과 L 은 각각 $l=\frac{1}{4}$, $L=\frac{1}{2}$ 로 알려져 있다고 가정하고, d 는 3으로 설정한다. 이러한 설정에서 보조정리 1의 α 에 대한 조건은 $\alpha > 24$ 로 계산되고 모의 실험에서는 $\alpha = 24.1$ 로 설정하였다. 이러한 설정에 대한 결과는 그림 1에 나타나 있으며, 그림에서 보면 알 수 있듯이 상태 변수 $x(t)$ 는 평형점으로 수렴하고 있고, 이는 따름정리 1을 예증한다.

또한, 따름정리 1에서 제시된 충분조건이 시간 지연에 독립적인 특성을 확인하기 위하여 위에서 사용한 $f(\cdot)$ 에 대하여 다음과 같은 설정으로 모의실험을 다시 실행하였다. $l=L=\frac{1}{3}$, $d=2$ 로 설정하면 보조정리 1의 α 에 대한 조건은 $\alpha > 6$ 로 계산되고 모의 실험에서는 $\alpha = 6.1$ 로 설정하였다. 이러한 조건에서 시간 지연 τ 는 20, 30, 40으로 설정하고, 각각의 결과는 그림 2, 3, 4에 나타나 있다. 그림에서 알 수

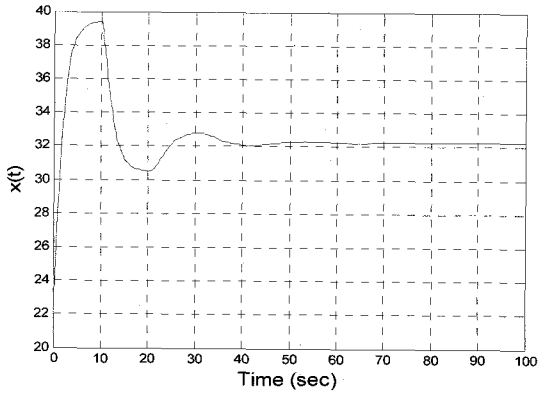


그림 1. $\alpha = 24.1$, $\tau = 10$ 일 때의 모의실험 결과.

Fig. 1. Simulation result when $\alpha = 24.1$ and $\tau = 10$.

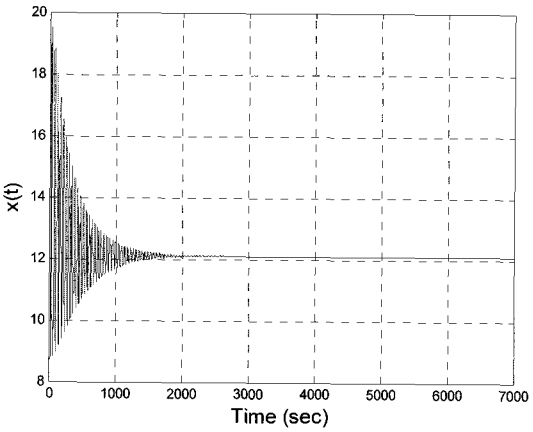


그림 2. $\alpha = 6.1$, $\tau = 20$ 일 때의 모의실험 결과.

Fig. 2. Simulation result when $\alpha = 6.1$ and $\tau = 20$.

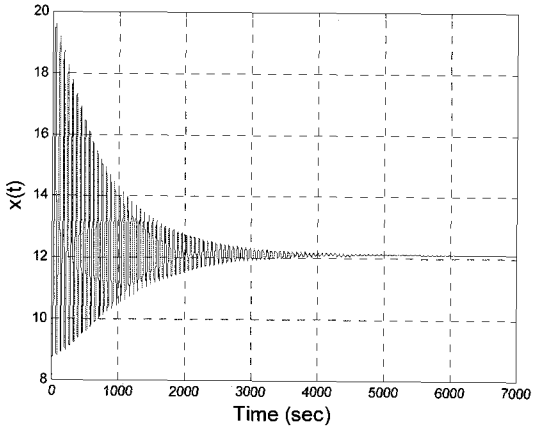


그림 3. $\alpha = 6.1$, $\tau = 30$ 일 때의 모의실험 결과.

Fig. 3. Simulation result when $\alpha = 6.1$ and $\tau = 30$.

있듯이 시간 지연이 증가함에 따라 비록 수렴 시간 도 증가하지만 결국 상태 변수가 평형점으로 수렴하고 있으므로, 이는 따름 정리 1의 충분조건이 시간지연에 독립적이라는 것을 예증하고 있다. 또한, 따름정리 1에서 제시된 충분조건이 필요충분조건과 얼마나 차이가 있는가에 관련된 보수성을 확인하기 위하여 시간 지연 τ 가 40인 경우에 대하여 $\alpha = 5.9$

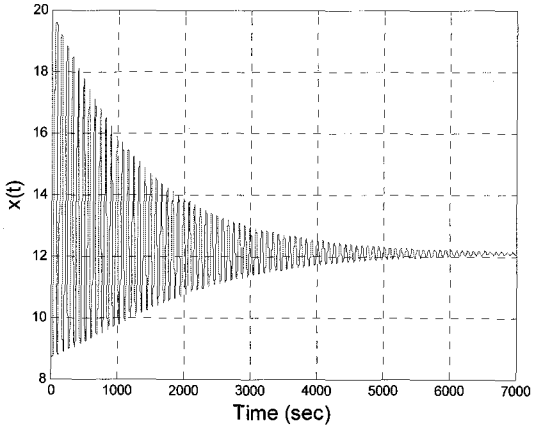


그림 4. $\alpha = 6.1$, $\tau = 40$ 일 때의 모의실험 결과.

Fig. 4. Simulation result when $\alpha = 6.1$ and $\tau = 40$.

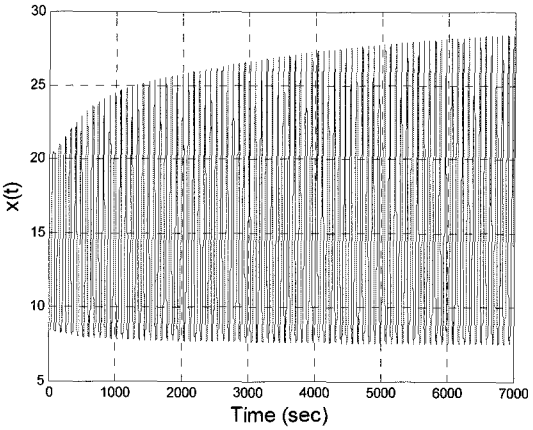


그림 5. $\alpha = 5.9$, $\tau = 40$ 일 때의 모의실험 결과.

Fig. 5. Simulation result when $\alpha = 5.9$ and $\tau = 40$.

로 설정하여 모의실험을 실행하였다. 이 경우에 대한 결과는 그림 5에 나타나 있다. $\alpha = 6.1$ 일 때 즉, 그림 4에서는 $x(t)$ 가 수렴하고 $\alpha = 5.9$ 에서는 수렴하지 않고 진동 하는 것을 알 수 있고, 이는 따름정리 1의 충분조건은 보수적이지 않은 것을 예증하고 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 일종의 비선형 시간 지연 시스템에 대한 안정성 특성을 분석하였다. 상태변수의 상계 및 하계 값을 시스템 매개변수의 함수로서 제시하였다. 또한, 시스템의 고유특성을 이용한 상태 변수 변환을 통하여 Lyapunov-Krasovskii functional을 제시하고 시스템의 광역 점근적 안정성을 보장하는 지연시간에 독립적인 충분조건을 제시하고 이를 수학적으로 증명하였다. 충분조건의 유효성은 모의 실험을 통하여 예증되었다. 본 논문에서 분석된 시스템은 FAST TCP의 모델의 일반화된 형태를 취하고 있어 FAST TCP이외의 다른 TCP의 동역학적 특성 분석에 이용될 수 있다.

참고문헌

[1] R. Jain, K. K. Ramakrishnan, and D.-M. Chiu, "Congestion avoidance in computer networks with a connectionless network

layer," *Technical Report DEC-TR-506*, Digital Equipment Corporation, August 1987.

[2] V. Jacobson, "Congestion avoidance and control," *Proceedings of ACM SIGCOMM '88*, August 1988.

[3] L. S. Brakmo and L. L. Peterson, "TCP vegas: End to end congestion avoidance on a global internet," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 13, no. 8, pp. 1465-1480, 1995.

[4] J. Wang, D. X. Wei, and S. H. Low, "Modelling and stability of FAST TCP," *Proceedings of IEEE Infocom*, April 2005.

[5] F. Paganini, Z. Wang, J. C. Doyle, and S. H. Low, "Congestion control for high performance, stability and fairness in general networks," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 13, no. 1, pp. 43-56, February 2005.

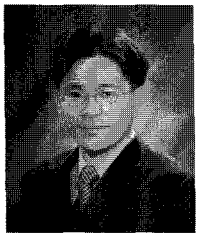
[6] S.-I. Niculescu, *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, Springer, London, 2001.

[7] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[8] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed., Prentice Hall, New York, 2002.

[9] J. E. Marsden and M. J. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, 2nd ed., W. H. Freeman and Company, New York, 1993.

[10] X.-Z. He, "Stability and delays in a predator-prey system," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 198, pp. 355-370, 1996.



최 준 영

1994년 포항공과대학교 전자전기공학과 졸업. 1996년 동 대학 석사. 2002년 박사. 2005년~현재 부산대학교 전자전기통신공학부 조교수. 관심분야는 비선형 제어 이론, 인터넷 혼잡 제어, 임베디드 시스템, 공장자동화.