

움직이는 스핀입자를 이용한 양자얽힘 생성 방법

이혁재*

국민대학교 나노전자물리학과, 서울 136-702

(2007년 1월 17일 받음, 2007년 2월 5일 최종수정본 받음)

양자얽힘 상태를 만들어내는 것은 매우 중요하다. 근거리에서 두 계를 양자얽힘 상태로 만드는 것은 그리 어렵지 않으나 직접 상호작용이 불가능 할 정도로 멀리 떨어져서 고정되어 있는 계들을 양자적으로 얽히게 하는 것은 어려운 문제 중의 하나이다. 본 논문에서는 먼 거리에 떨어져있는 스핀-1/2 입자들 사이에 양자얽힘 상태를 직접적인 상호작용이 아니라 제 삼의 스핀-1/2를 이용하여 생성할 수 있다는 것을 보였다. 상호작용으로는 Förster 상호작용과 스핀스핀 교환 상호작용을 사용하였다.

주제어 : 스핀-1/2 입자, 양자얽힘, 유니버설 게이트, 양자컴퓨터

I. 서 론

양자컴퓨터와 양자정보는 최근 중요한 분야로 대두되기 시작했다. 특히 1994년 Shor[1]가 제안한 양자 알고리즘이 큰 합성수의 소인수분해를 고전 알고리즘보다 기하급수적으로 빠르게 수행할 수 있다는 것이 발표되면서 두 분야에 대한 연구가 확산되기 시작하였다. 그전에 Deutsch는 양자컴퓨터의 효율은 양자상태의 중첩과 양자 게이트 역할을 하는 유니타리 변환이 병렬처리를 가능케 한다는 제안을 하여 주목을 받았으나 그가 제안한 알고리즘의 효율성이 높지 않아 실질적인 면에서 의문시 되었다[2]. 그러나 Shor가 제시한 알고리즘은, 기존의 암호체계가 큰 합성수 소인수분해를 이용한 알고리즘으로 구현되어 있는데 양자컴퓨터를 이용하여 이러한 암호체계를 무용지물로 만들 수 있다는 것이 알려지고 그 효율성에서 크다는 것이 알려지면서 본격적으로 주목을 받기 시작하였다. 또한 1997년 최초의 양자컴퓨터가 NMR[3]을 이용한 원시적 모습으로 구현됨으로서 더 이상 양자컴퓨터나 양자정보가 꿈이 아니라는 사실이 밝혀져 물리학을 포함한 다른 학문에서도 깊은 관심을 갖게 되었다. 양자컴퓨터 및 양자정보가 고전적인 것보다 효과적이고 병렬처리가 가능한 것은 양자역학만이 갖는 양자얽힘 현상이 주요한 역할을 한다.

양자 얽힘은 양자역학의 시작 시기부터 연구되어 왔다. 처음에는 양자얽힘이 상대론적 국소성의 모순을 유도하므로 양자역학을 부정하는 도구로 쓰였다[4]. 그러나 Bell의 부등식을 어기는 상태가 반드시 존재하고, 그 상태가 양자얽힘 상태라는 것이 밝혀진 뒤로 양자얽힘에 대한 연구는 양자역학의 중요한 분야가 되어왔다[5]. 최근 양자컴퓨터 및 양자 정보처리에 관한 연구가 진행 되면서 양자 얽힘의 중요성이 더

욱더 대두되고 있다. 양자얽힘상태 대한 수학적 연구 또는 물리적 현상으로서의 연구뿐만 아니라 다양한 응용성에 대한 연구까지 진행되고 있는 상황이다[6-8].

양자얽힘의 연구가 진행되면서 중요한 연구 과제 중의 하나는 어떻게 양자얽힘 상태를 만들어 낼 수 있는가에 대한 것이다. 양자얽힘은 이론적으로는 Hadamard 게이트와 XOR 게이트의 조합을 통하여 만들어 낼 수 있다[9]. 실험적으로 이것을 구현하는 것은 근거리에서 존재하는 입자들 사이에 가능한 일이다. 두 개의 스핀-1/2 입자로 구성된 계에서 두 스핀 간의 스핀-스핀 교환 상호작용은 처음 두 스핀이 분리 가능한 상태로 준비된 계를 양자얽힘 상태로 바꾸어 준다. 또한 간접적으로 두 스핀이 상호작용을 하는 경우 역시 양자얽힘이 생성된다. 두 개의 스핀-1/2 입자들이 열적으로 평형상태에 있는 주변 환경 또는 단일모드 조화진동자들과 상호작용을 하고, 두 입자 사이에 직접적인 상호작용이 없는 경우 두 스핀 입자들은 양자 얽힘 상태가 될 수 있다[10, 11]. 이 두 경우는 모두 두 스핀 입자가 서로 가까이 존재해야만 가능하다.

그러나 멀리 떨어져서 고정되어 있는 두 입자들을 양자 얽힘 상태로 만드는 것은 쉽지 않다. 멀리 떨어진 입자들 사이의 양자얽힘 상태로 만드는 것은 양자컴퓨터의 구현과 관련이 있다. 양자 컴퓨터는 현재 몇 개의 큐비트들로 구성된 형태가 구현되어 있다. 그러나 실제 필요한 계산을 위한 양자컴퓨터는 수천 개 이상으로 구성된 큐비트들의 집합이 필요하다. 이 정도 큐비트 수를 갖는 양자컴퓨터를 구현하기 위해서는 현재의 트랜지스터 컴퓨터처럼 고체물리를 기반으로 한 형태가 되어야 큐비트 개수를 늘리는데 문제가 없을 것으로 보고 있다. 이 때 가까이 있는 큐비트들 사이뿐만 아니라 멀리 떨어져 고정되어 있는 큐비트들 사이에 양자얽힘을 구현해야만 하는데 본 논문은 이것을 해결할 있는 방법을 간단한 스핀 계에서 제시

*Tel: (02) 910-5462, E-mail: lhjae@kookmin.ac.kr

하려고 한다.

II. 상호작용에 의한 양자 얽힘 생성

공간상으로 충분히 멀리 떨어져 있어서 서로 간에 직접적인 상호작용을 할 수 없는 두 개의 스핀-1/2 입자들을 생각 한다. 큐비트는 스핀-1/2의 z-방향의 Pauli 행렬의 고유벡터를 이용하여 표시할 것이다. 두 개의 고유벡터 $| -1/2 \rangle$, $| 1/2 \rangle$ 은 표현을 간단히 하기 위하여 각각 $| 0 \rangle$ 과 $| 1 \rangle$ 로 표시할 것이다. 그리고 편의를 위하여 두 입자들에 각각 1과 2로 표시한다. 두 입자들은 서로 상호작용이 없기 때문에 양자상태는 초기 상태로 유지될 것이다. 초기상태는 두 입자의 양자상태의 텐서곱 상태 $| 0 \rangle_1 \otimes | 0 \rangle_2$ 로 준비 되었다고 가정하자. 이러한 상태를 준비하는 것은 항상 가능하다.

세 번째 스핀-1/2 입자를 도입하고 그 입자를 3으로 이름을 붙이고 초기 상태는 $| 1 \rangle$ 로 준비한다. 이 입자는 자유롭게 이동할 수 있다고 가정하자. 세 개의 입자들로 준비된 이러한 계의 양자상태는

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 \quad (1)$$

로 나타낼 수 있다.

두 입자들 사이에 Förster 형태의 상호 작용,

$$H_{ij} = J(\sigma_i^+ \sigma_j^- + \sigma_i^- \sigma_j^+) \quad (2)$$

을 줄 것이다. 여기서 J 는 결합 상수 그리고 σ^+ , σ^- 는 각각 생성 연산자와 소멸연산자를 표시한다. 이러한 상호작용은 양자상태들에서 다음과 같이 작용한다.

$$\begin{aligned} H_{ij}|0\rangle_i |0\rangle_j &= H_{ij}|1\rangle_i |1\rangle_j = 0, \\ H_{ij}|0\rangle_i |1\rangle_j &= J|1\rangle_i |0\rangle_j \\ H_{ij}|1\rangle_i |0\rangle_j &= J|0\rangle_i |1\rangle_j. \end{aligned} \quad (3)$$

상호작용 (2)가 t 시간 동안 작용하고 있으면, 양자상태는 유니타리 연산자 $U_{ij}(t) = e^{-iH_{ij}t/\hbar}$ 에 의하여 초기상태는 다른 양자상태로 변환된다.

$$\begin{aligned} U_{ij}(t)|0\rangle_i |0\rangle_j &= |0\rangle_i |0\rangle_j, \\ U_{ij}(t)|1\rangle_i |1\rangle_j &= |1\rangle_i |1\rangle_j, \\ U_{ij}(t)|0\rangle_i |1\rangle_j &= \cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right)|0\rangle_i |1\rangle_j - i\sin\left(\frac{Jt}{\hbar}\right)|1\rangle_i |0\rangle_j \\ U_{ij}(t)|1\rangle_i |0\rangle_j &= \cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right)|1\rangle_i |0\rangle_j - i\sin\left(\frac{Jt}{\hbar}\right)|0\rangle_i |1\rangle_j \end{aligned} \quad (4)$$

입자 3이 입자 1로 다가가서 t_1 시간 동안 상호작용을 하고, t_1 이후에는 작용을 끊고 떨어져 있는 입자 2로 날아간다. 입자 2에 가서는 t_2 시간동안 역시 같은 상호작용을 하게 한

다. 그리고 입자 3은 입자 2로부터 멀어지게 한다. t_1 시간 동안의 상호작용은

$$H_{13} = J(\sigma_1^+ \sigma_3^- + \sigma_1^- \sigma_3^+) \quad (5)$$

으로 표현되고 t_1 후에 상태는 $U_{13}(t_1) = e^{-iH_{13}t_1/\hbar}$ 연산자로 결정된다. t_2 시간 동안의 상호작용은

$$H_{23} = J(\sigma_2^+ \sigma_3^- + \sigma_2^- \sigma_3^+) \quad (6)$$

으로 쓸 수 있고, 그 시간동안 상태 변화는 $U_{23}(t_2) = e^{-iH_{23}t_2/\hbar}$ 에 의하여 변환된다. 이러한 상황에서 전체 시간 진행 연산자는 $U(t_1 + t_2) = e^{-iH_{23}t_2/\hbar} e^{-iH_{13}t_1/\hbar}$ 로 쓸 수 있다. 이런 상호작용을 시간의 진행에 따라 순차적으로 적용할 수 있는 모델을 구현할 수 있는 방법은 여러 가지가 있을 수 있다. 예를 들면 멀리 떨어져 있는 양자점들에 사이에 도체선을 연결하여 제삼의 전자를 이동시켜서 위와 같은 상호 작용을 순차적으로 줄 수 있다. 이 때 상호작용 시간은 양자점의 크기를 지날 때 속도를 조정하여 정할 수 있을 것이다. 또 다른 방법은 정전기장에 의하여 갇혀진 두 이온들의 스핀과 제삼의 전자가 각 trap을 지나갈 때 속도를 조정하여 그 시간 간격을 맞출 수 있다.

두 상호작용이 끝난 뒤의 어떤 시간에서 양자 상태는

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U_{23}(t_2)U_{13}(t_1)|0\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 \\ &= U_{23}(t_2) \left[\cos\left(\frac{Jt_1}{\hbar}\right)|0\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 - i\sin\left(\frac{Jt_1}{\hbar}\right)|1\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 \right] \\ &= \cos\left(\frac{Jt_1}{\hbar}\right)\cos\left(\frac{Jt_2}{\hbar}\right)|0\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 \\ &\quad - i\cos\left(\frac{Jt_1}{\hbar}\right)\sin\left(\frac{Jt_2}{\hbar}\right)|0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &\quad - i\sin\left(\frac{Jt_1}{\hbar}\right)|1\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 \end{aligned} \quad (7)$$

으로 진행된다. 만약 상호작용 시간들 t_1 과 t_2 을 결정하면 첫 번째 입자와 두 번째 입자 사이에 양자얽힘 상태를 만들 수 있다. $t_1 = \frac{(2n+1)\pi\hbar}{4J}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 그리고 $t_2 = \frac{m\pi\hbar}{2J}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ 으로 정하면 계의 양자 상태는

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2)|1\rangle_3 \quad (8)$$

가 된다. 이 양자상태에서 입자 1과 2는 양자적으로 얽혀 있다는 것을 알 수 있다. 처음에 분리가능한 상태로부터 출발하여 상호작용 (5)와 (6)을 거치면서 양자얽힘 상태가 생성되는 것을 알 수 있다. 전자와 양자점의 상호작용에서 J 는 1 eVÅ 정도의 order를 가지므로 이 경우에 t_1 과 t_2 의 order는 10^{-5} s 정도가 된다.

상호작용 (2)가 어떤 경우에는 구현이 어려울 수도 있다. 그러므로 지금까지 제시한 방법이 멀리 떨어져서 고정되어 있는 입자들을 양자얽힘 상태를 만들지 못할 수도 있다. 그래서 다른 상호작용에 대하여 위의 이야기를 전개할 수 있는지 살펴보겠다. 고체 내에서 가장 잘 알려져 있는 스핀-스핀 교환 상호작용인

$$H = J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \tag{9}$$

을 고려해 보자.

이 상호작용에 의하여 양자상태의 시간에 따른 변화는 쉽게 계산할 수 있다.

$$U_{12}(t)|1\rangle_1|0\rangle_2 = e^{-iH_1 t/\hbar} |1\rangle_1|0\rangle_2 \tag{10}$$

$$= e^{-\frac{iJt}{\hbar}} \left[\cos\left(\frac{2Jt}{\hbar}\right)|1\rangle_1|0\rangle_2 + i\sin\left(\frac{2Jt}{\hbar}\right)|0\rangle_1|1\rangle_2 \right].$$

식(10)과 식(4)를 비교하면 시간에 따른 변화가 유사하다는 것을 알 수 있다. 전체 위상만큼 차이가 나는데 이것은 양자 상태에 변화를 주지 않기 때문에 상호작용 (9)와 상호작용 (2)는 같은 결과를 줄 수 있다.

III. 결 론

양자얽힘은 양자정보 및 양자정보에서 핵심적인 역할을 하고 있는데, 원거리 계들 사이에 양자얽힘 생성은 어려운 문제로 남아 있었다. 본 논문에서는 이 문제를 해결할 수 있음을 보였다. 멀리 떨어져서 고정된 위치에 있는 두 스핀-1/2 입자들 양자얽힘 상태를 만들기 위한 방법으로 제 삼의 자유 스핀 입자를 사용하여 이 입자와 멀리떨어진 입자들 사이에 상호작용의 시간을 조정과 하여 구현하였다. 이 방법은 시간 조정을 정확하게 하면 조건부가 아닌 확률 1의 확실성을 가지고 양자얽힘 상태를 만들어 낼 수 있다는 것을 보였다. 물론 이 방법은 스핀-1/2 계에서만 적용할 수 있는 것이 아니라 큐비트의 대상이 되는 다른 양들에서도 유사하게 적용할 수 있다. 예를 들면 트랩에 갇힌 이온들의 두 개의 에너지 준위를 사용하는 큐비트 계에서 두 개의 트랩이온을 첫 번째와 두

번째 입자로 하고 광자(photon)를 움직이는 세 번째 입자로 하면 같은 식(2)의 상호작용을 이용하여 두 이온들이 양자얽힘 상태가 되는 것을 계산할 수 있다.

현재 양자컴퓨터의 기술 수준은 큐비트 몇 개 정도를 만들고 이들 사이에 게이트를 만드는 정도에 불과하다. 특히 양자얽힘 상태를 만드는데 핵심적인 역할을 하는 게이트는 XOR 게이트의 구현은 가장 난제 중의 하나이다. 이 게이트는 두 큐비트가 직접적이거나 간접적인 상호작용 방법을 통하여 구현할 수 있다. 본 논문에서 제시한 방법은 XOR 게이트를 대신할 수 있는 새로운 유니버설 게이트로서의 역할을 할 것이다. 향후 수천 개의 큐비트들을 만들 수 있는 기술이 구현 되었을 때 두 큐비트 사이의 거리가 멀리 떨어져 있는 큐비트들 사이에 XOR 게이트를 구현하는 것이 어려운 문제 될 것이지만, 우리가 제시한 방법은 그 대안으로 사용될 수 있을 것이다.

참고문헌

- [1] P. W. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logaithms and factoring," in Proceedings of the 35th Annual Symposium on Fundamentals of Computer Science (Los Alamitos, CA, IEEE Press, 1994).
- [2] D. Deutsch, Proc. Roy. Soc. Lond. A, **400**, 467 (1982).
- [3] N. A. Gerhenfeld and I. L. Chuang, Science, **275**, 350 (1997).
- [4] A. Einsein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev., **47**, 777 (1935).
- [5] J. S. Bell, Physics, **1**, 195 (1964).
- [6] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett., **69**, 2881 (1992).
- [7] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett., **70**, 1895 (1993).
- [8] A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett., **67**, 661 (1991).
- [9] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quatum Computation and Quantum Information, Cambridge, Cambridge University Press (2000).
- [10] M. S. Kim, J. Lee, D. Ahn, and P. L. Knight, Phys. Rev. A, **65**, 040101 (2002).
- [11] D. Braun, Phys. Rev. Lett., **89**, 277901 (2002).

Entanglement Generation by Using the Moving Spin

Hyuk-Jae Lee*

Department of Physics, Kookmin University, Seoul 136-702, Korea

(Received 17 January 2007, in final form 5 February 2007)

The generation of entanglement is a very important subject in the quantum computer. Here we suggest the method that generates entanglement between two spin-1/2 particles by using the third moving spin-1/2 particle. We use the Förster interaction and the exchange interaction to make the entangled state.

Keywords : spin-1/2 particle, quantum entanglement, universal gate, quantum computer