韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2007. 02. 제 46권, 제 1호, 81-96.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2007, Vol. 46, No. 1, 81-96.

초등학교에서 테셀레이션의 수학적 원리 지도 가능성 탐색

백 선 수 (대구와룡초등학교)
김 원 경 (한국교원대학교)

I. 서 론

제 7차 초등학교 수학과 교육과정에서는 이전의 교육과정에는 없던 새로운 주제들이 많이 도입되었다. 그 중의 하나가 '여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기' 즉, '테셀레이션(tessellation)'이다. 테셀레이션이란 욕실 바닥에 깔려 있는 타일처럼 어떠한 틈이나 포개짐 없이 평면이나 공간을 도형으로 덮는 것을 말한다(Van de Walle, 2004; Billstein, Libeskind, & Lott, 2001).

테셀레이션은 그 수학적 가치와 흥미 유발적 요소로 인해 여러 나라의 수학과 교육과정에 도입되었다. 이것은 테셀레이션이 단순히 학습의 즐거움만 제공하는 것이 아니라 많은 수학적 아이디어들을 내포하고 있고, 서로 다른 영역의 수학적 개념들을 통합하며 이미 배운 개념들을 복습하거나 교정할 수 있는 기회를 제공해 주기 때문이다(Orton, 1994). 미국에서는 1960년대부터 테셀레이션을 수학과 교육과정에 도입하여 변환 기하학을 쉽고 재미있게 다루기 시작하여 지금까지 다양한 수준에서 교육과정의 일부분으로 자리 잡고 있다.

특히, 미국수학교사협의회[NCTM](1989)는 5-8학년의 기하단원에서 다각형의 각의 성질과 넓이의 개념을 이해하는 수단으로 정다각형 테셀레이션 활동을 권고하고 있고, 9-12학년에서는 기하를 통해 수학과 예술사이의 창의적인 상호 작용을 경험하는 기회로 정다각형 테셀레이션, 준정다각형 테셀레이션, 일반다각형 테셀레이션, 에셔(Escher)의 테셀레이션을 제안하고 있다.

일본의 초등학교 교과서(5학년 上)에는 평행사변형, 사다리꼴, 마름모의 테셀레이션을 다룬 다음에 일반 사각형의 테셀레이션을 다루고 있는데 그 수학적 원리를 찾는 방법으로써 일반 삼각형 여러 개를 일직선으로 배열하여 띠 모양을 2개 만든 후 그 띠 모양을 서로 합쳐서 일반 사각형이 테셀레이션이 가능함을 보여주고 있다(서영숙, 2003, 재인용).

한편, 우리나라 제 7차 초등학교 교육과정에는 테셀레이션이라는 용어를 직접적으로 언급하고 있지는 않지만, [5-가 단계]에서 '여러 가지 모양으로 주어진 도형을 덮을 수 있다.'고 되어 있고, 이에 따른 초등학교 수학 교과서 [5-가 단계] "2. 무늬 만들기" 단원에서는 테셀레이션과 관련된 내용을 구체화하고 있다(교육인적자원부, 2006). '규칙에 따라 무늬 만들기'(밀기, 뒤집기, 돌리기) 활동, '한 가지 모양 조각으로 도형 덮기' 활동, '패턴블록과 테트리스 조각을 이용한 도형 덮기' 활동, 삼각형과 사각형을 이용한 도형 덮기 활동이 학교교육 현장에서 이루어지고 있다. 또한 2006년 8월에 공표한 초등학교 새 수학과 교육과정에서도 테셀레이션은 그대로 포함되어 있다.

학생들은 교과서에서 제시된 도형 덮기 활동을 통해서 공간감각을 기를 수는 있겠지만, '왜 일반 삼각형이나 사각형을 이용하여 평면을 덮을 수 있는지?'에 대한 원리를 탐구하지 않은 채, 단지 도형을 덮는 활동만 하기 때문에 테셀레이션의 수학적 원리에 대해서는 잘 모르고 있는 실정이다. 그러나 지금까지의 테셀레이션에 관한 국내 연구의 대부분은 초등학교에서 활용 가능한 테셀레이션 학습 자료의 개발에만 치중하였을 뿐, 일반 삼각형이나 사각형을 이용하여 테셀레이션을 만드는 과정에서의 수학적 원리에 관해서는 연구가 미흡하였다. 이에 본 연구에서는 초등학교 5학년 학생들이 일반 삼각형이나 사각형으로 테셀레이션을 만드는 활동을 통하여 그 수학적 원리를 발견할 수 있는지에 대한 가능성을 탐색하고자 한다.

* 2006년 11월 투고, 2006년 12월 심사 완료.
* ZDM 분류: D12
* MSC2000 분류: 97D40
* 주제어 : 테셀레이션, 초점질문, 초등수학

Ⅱ. 이론적 배경

1. 테셀레이션의 정의와 수학 교육적 의의

테셀레이션은 한 개 또는 그 이상의 도형을 사용하여 빈틈이나 포개어짐 없이 반복되는 패턴으로 평면을 완전히 덮는 것을 말한다(Ranucci & Teeters, 1977). 평면은 모든 방향으로 무한히 확장될 수 있기 때문에 테셀레이션을 만들 때 정확하게 테두리의 가장자리에 꼭 맞출 필요는 없다(Del Grand & Morrow, 1996). 테셀레이션은 평면도형뿐만 아니라 입체도형으로도 가능하다(Seymour & Britton, 1989). 평면 테셀레이션은 평면도형을 덮어서 만드는 것이고, 공간 테셀레이션은 입체도형을 채워서 만드는 것이다. 공간 테셀레이션도 일정한 패턴이 모든 방향으로 무한하게 확장될 수 있다.

테셀레이션(tessellation)의 어원은 라틴어 'tessella'에서 유래되었는데 이것은 로마의 건물과 바닥, 포장된 도로를 장식한 타일의 이름이다(Bezuszka, Kenney, & Silvey, 1977).

테셀레이션은 오랜 역사를 가지고 있다. 기원전 4세기 이슬람 문화의 벽걸이 융단, 퀼트, 옷, 깔개, 가구의 타일, 건축물에서 볼 수 있는 여러 가지 색깔로 된 똑같은 크기의 문양이 곧 테셀레이션의 기원이라 할 수 있다. 테셀레이션은 이집트, 로마, 페르시아, 그리스, 비잔틴, 아라비아, 일본, 중국 등의 고대 문화 유물에서도 발견될 뿐만 아니라 한국의 전통 문양에서도 쉽게 찾아볼 수 있다. 또한, 테셀레이션은 길거리의 보도블록이나 거실, 목욕탕의 타일, 상품의 포장지 문양 등 우리 일상생활 속에서도 흔히 찾아볼 수 있다.

테셀레이션은 수학의 심미성과 구성주의적 관점에서 수학 교육적 가치가 매우 크다. NCTM(1989)에 의하면 기하학습은 아동들의 사고발달 과정에서 역동성이 중요하기 때문에 용어를 정의하고, 공식을 외우고 도형의 성질을 진술하는 방법으로 지도되어서는 안 된다고 하면서, 기존의 지식체계를 형식적으로 지도하기보다는 논증기하를 도입하기 전에 관찰과 조작활동을 통해서 여러 가지 도형과 그 성질에 대하여 직관적으로 지도해야 한다고 하였다. 특히, 기하적인 아이디어와 공간적인 추론 능력은 문제를 표상하고 해결하는데 유용하다고 지적하면서 모든 학년 수준에서 변환(평행이동, 회전, 반사)과 대칭을 적절히 지도하면 수학과 예술, 미학에 대한 통찰을 얻게 될 것이라고 언급함으로써 테셀레이션의 도입을 권고하고 있다.

Holly(1998)는 테셀레이션이 아동들에게 예술을 통한 수학의 세계를 탐구할 수 있는 기회를 제공하며 예술작품 속에서 수학적인 패턴을 발견함으로써 추상적인 수학 개념에 더욱 친근해 질 수 있다고 하였다. Giganti & Cittadino(1990)는 아동들은 스스로 직접 만든 테셀레이션을 통해 수학 속에서 예술적 창의성과 공간감각을 발달시킬 수 있다고 하면서 테셀레이션을 만드는 것은 다각형, 대응변, 변환, 합동과 같은 기하학적 개념을 이해하는데 좋은 경험을 제공한다고 하였다.

Granger(2000)는 테셀레이션이 아동들에게 선대칭, 예각과 둔각 개념 등 도형에 대한 이해와 사고를 향상시키고, 공간감각에 대한 탐구심을 증진시키며 수학의 아름다움을 열린 눈으로 인식하게 한다고 하였다.

Kennedy & Tipps(1994)는 테셀레이션 패턴을 만드는 것은 단순히 디자인을 그리는 것 이상이고 강력한 정신작용의 표현이며, 패턴을 만드는 것은 기대되는 배치의 가능성과 타일의 정규적인 패턴의 개념화와 이상화 그리고 그림의 작성을 결정하면서 구성된 이미지의 정신적 회전을 요구한다고 말한다.

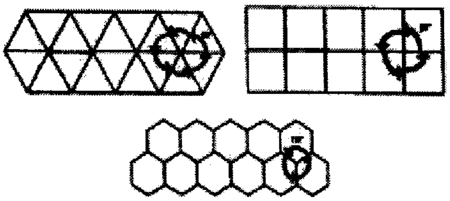
2. 테셀레이션의 유형

평면 테셀레이션은 크게 변과 변이 일치하는 테셀레이션(Edge-to-edge tessellation), 변과 변이 일치하지 않는 테셀레이션(Non-edge-to-edge tessellation), 그리고 에셔(Escher)의 테셀레이션으로 분류할 수 있다. 본 절에서는 테셀레이션의 유형을 Van de Walle(2004), Billstein, Libeskind, & Lott(2001)의 연구와 남승인 · 백선수(2000)의 바닥깔기를 통한 수학적 미의 탐구, 남승인 · 류성림 · 강영란 · 백선수(2003)의 영재심화 교수-학습 자료(초등수학 5학년용)를 참고하여 간단히 살펴보고자 한다.

가) 변과 변이 일치하는 테셀레이션

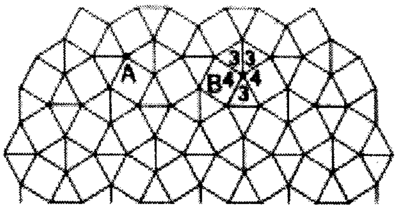
1) 정다각형 테셀레이션 : 벌집 모양과 같이 합동인

정다각형으로 이루어진 테셀레이션을 정다각형 테셀레이션이라고 한다. 테셀레이션을 만들기 위해서는 한 꼭지점에 모인 도형들의 각의 합이 360°가 되어야 하므로 이를 만족하는 정다각형은 정삼각형, 정사각형, 정육각형뿐이다.



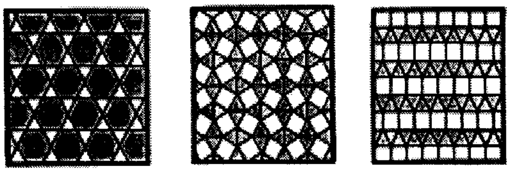
<그림 Ⅱ-1> 정다각형 테셀레이션

2) 준정다각형 테셀레이션 : 각 꼭지점에 두 종류 이상의 정다각형이 모인 테셀레이션을 준정다각형 테셀레이션이라고 한다. 예를 들면, 한 꼭지점에 3개의 정삼각형과 2개의 정사각형이 모이면 모든 각의 합이 360°가 되므로 테셀레이션이 만들어진다.



<그림 Ⅱ-2> 준정다각형 테셀레이션

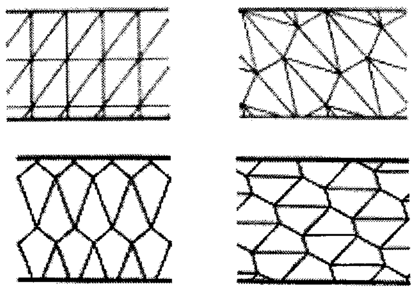
3) 반정다각형 테셀레이션 : 두 개 이상의 정다각형으로 이루어지며 각 꼭지점에서 만나는 다각형들의 배열순서가 2~3개인 테셀레이션을 반정다각형 테셀레이션이라고 한다.



<그림 Ⅱ-3> 반정다각형 테셀레이션

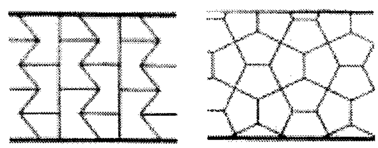
4) 일반 다각형 테셀레이션 : 정다각형이 아닌 일반 다각형으로 이루어진 테셀레이션을 일반 다각형 테셀레이션이라고 한다. 일반 다각형으로 테셀레이션을 만들려면 한 꼭지점에 모인 도형의 각의 합이 360°가 되어야 하고, 길이가 같은 변끼리 접해야 한다. 모든 삼각형은 테셀레이션이 가능하다. 왜냐하면 6개의 삼각형을 서로 길이가 같은 변끼리 접하도록 하면 한 꼭지점을 중심으로 360°가 되게 배열할 수 있기 때문이다.

또한, 임의의 사각형의 경우도 내각의 크기의 합이 360° 이므로 테셀레이션이 가능하다.



<그림 Ⅱ-4> 일반 다각형 테셀레이션

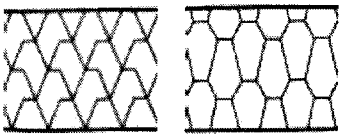
정오각형은 한 각의 크기가 108° 이므로 한 꼭지점에 모인 각의 크기의 합을 360°가 되도록 배열할 수 없지만 모든 오각형이 테셀레이션이 불가능한 것은 아니다. 오각형의 경우에는 인접한 두 각의 합이 180° 일 때, 그리고 한 쌍의 모서리가 평행할 때 테셀레이션이 가능하다. 지금까지 볼록 오각형은 14가지의 종류만 테셀레이션이 가능하다고 밝혀졌다.



<그림 Ⅱ-5> 오각형 테셀레이션

육각형의 경우에는 마주보는 변들이 서로 평행하고, 그 길이가 같을 때 테셀레이션이 가능하다. 육각형의 테셀레이션은 3가지 경우밖에 없다는 것이 밝혀졌다.

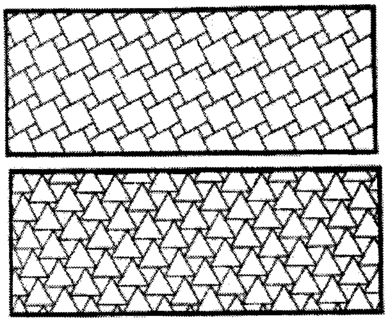
한편, 칠각형 이상의 다각형은 어떤 모양도 테셀레이션이 불가능하다는 사실이 밝혀졌다.



<그림 II-6> 육각형 테셀레이션

나) 변과 변이 일치하지 않는 테셀레이션

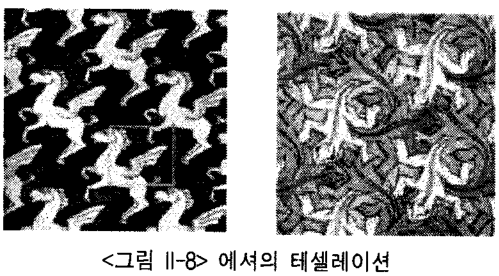
변과 변이 일치하지 않는 테셀레이션은 말 그대로 서로 인접한 다각형들의 변들이 서로 일치하지 않은 테셀레이션이다. 이와 같은 유형의 테셀레에션은 무수히 많은데, 그 중의 하나를 예시하면 다음의 <그림 II-7>과 같다(Seymour & Britton, 1989).



<그림 II-7> 변과변이 일치하지 않는 테셀레이션

다) 에셔(Esche)의 테셀레이션

네덜란드의 화가 에셔(Maurits C. Escher: 1898~1972)는 다각형과 같은 단순한 도형을 사용하는 것에 그치지 않고 자연 현상의 소재를 밀기, 돌리기, 뒤집기로 테셀레이션을 만들었다. 그가 만든 테셀레이션의 특징은 물고기, 새, 도마뱀, 말 등을 평행 이동, 회전, 반사를 통하여 사실적, 대칭적, 규칙적으로 묘사하였다.



<그림 II-8> 에셔의 테셀레이션

3. 선행 연구의 고찰

테셀레이션 활동을 통해서 학생들은 도형의 내각의 크기, 평행이동, 회전이동, 선대칭이동 등을 탐구할 수 있고, 테셀레이션 작품을 보고 그것을 다시 재현해 보는 과정에서 공간에서의 위치 관계와 같은 공간감각을 계발할 수 있으며, 학생 스스로 창의적인 테셀레이션 작품을 만들어 가는 과정에서 자연스러우면서도 풍부한 도형의 변환을 활용할 것이고, 자신이 만든 작품을 통하여 수학적인 아름다움을 느낄 수 있는 기회를 가지게 될 것이다(김원경 · 백선수, 2000). 또한, 테셀레이션은 동일한 단위 조각의 반복적인 배열을 통해서 규칙성을 탐구할 수 있고, 정다각형 테셀레이션과 관련해서는 넓이의 단위에 대한 학습이 가능하며, 준정다각형이나 반정다각형 테셀레이션을 찾은 과정에서 경우의 수를 구할 수 있으며, 무한에 관한 탐구의 좋은 소재가 될 수 있다.

테셀레이션은 이와 같은 많은 장점들 때문에 수학교육에서 뿐만 아니라 미술교육(이정주, 2005), 디자인(임현숙, 1999), 의류학(이정수 · 송명견, 2006) 등에서도 연구가 활발히 이루어지고 있다. 본 연구에서는 초등학교와 중학교의 수학 교수-학습에 관련된 선행 연구만을 살펴보고자 한다.

김원경 · 백선수(2000)는 Renzulli의 심화학습 3단계 모형에 기초하여 테셀레이션을 활용한 영재 교수 · 학습 자료를 개발하였고, 전영아(2000)는 초등 수학 학습에서 '도형' 영역과 '규칙성과 함수' 영역에서의 테셀레이션의 활용 가능성을 탐색하고 학습 자료를 제작하였다. 오혜원(2000)은 중학생들이 CA활동을 통하여 테셀레이션을 학습함으로써 학생들의 수학적 흥미가 유발되었고, 대칭변환 개념을 쉽게 이해하는 긍정적인 효과가 나타났음을 보였다. 이찬규(2001)는 초등학교 기하 학습 지도에서 테셀레이션의 활용 방안을 제시했으며, 임해경 · 박은영(2002)은 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수-학습 자료를 개발하고 그 활용 방안을 제시하였다. 김정숙(2003)은 중등학교 제 7차 수학과 교육과정에서 테셀레이션이 활용 가능한 영역으로 '도형'영역과 '측정'영역을 선정하여 5개의 교수 · 학습 자료를 제시하였다. 전영숙(2003)은 미국과 일본 교과서 분석을 기초로 우리나라 수학 교육에서의 테셀레이션 활용 방안을 제시했으며,

이경미(2003)는 중학교 기하 학습 지도에서 테셀레이션을 활용한 수학 수업이 학생들에게 수학의 심미성과 수학적 개념 및 성질에 관한 학습에도 효율적일 뿐만 아니라 학생들의 수학적 흥미·태도의 변화에 많은 도움이 되었다고 보고 했다. 김남균(2004)은 패턴블록과 조노돔을 활용하여 테셀레이션 지도방안을 탐색하였고, 계영희(2005)는 GSP를 활용한 테셀레이션 작도 자료를 제시했다.

위에서 언급한 몇몇 연구들의 공통점은 첫째로 공학도구의 사용이고, 둘째로 학습 자료의 개발이며, 셋째로 양적 연구이다. 에셔 유형의 테셀레이션을 만들기 위해서는 그 과정이 복잡하기 때문에 공학도구의 사용은 바람직한 것처럼 보이지만, 초등학교 수준에서 다루는 테셀레이션의 소재는 복잡한 것이 아닐뿐더러, 모든 학생들이 공학도구를 사용할 수 있는 여건이 되지 않는다는 점에서 현실적이지 못하다. 또한, 학교 급별 테셀레이션에 관한 학습 자료의 개발에는 한계가 있고, 양적 연구를 통해서는 수학적 태도나 성향의 긍정적 변화를 분석할 수 있을 뿐이다. 이에 본 연구에서는 질적 연구를 통해서 실제로 학생들이 테셀레이션을 만들어 가는 과정에서 테셀레이션의 수학적 원리를 어떻게 탐구하여 발견할 수 있는지, 그리고 테셀레이션의 수학적 원리를 어떻게 지도할 것인지에 대한 문제를 해결하고자 하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 사전 설문 조사 및 대상

본 연구에서는 먼저 초등학교 교사와 학생들이 테셀레이션에 관하여 얼마나 이해하고 있는지에 대하여 사전 설문 조사를 하였다. 설문 문항은 4문항으로 테셀레이션의 실생활 예를 제시하는 것과 테셀레이션이 가능한 다각형을 찾는 것 등으로 구성되었다. 설문 조사의 대상은 W초등학교에 재직 중인 교사 50명과 5학년 학생 133명이다.

2. 교수 실험 및 대상

설문 조사에 참여한 학생 중에서 테셀레이션에 관한 지식이 없는 자발적 희망자를 대상으로 테셀레이션의 수학적 원리에 대한 교수실험을 실시하였다. 총 13명의 지원자 중에서 학급별로 배분하여 3개 반 6명(남학생 4명과 여학생 2명)을 교수실험의 대상으로 선정하였다. 이들은 이미 4학년 때 삼각형과 사각형의 내각의 합을 구하는 원리를 배웠고, [5-가 단계] '2. 무늬 만들기' 단원을 배운 상태였으며, 학생들의 학업성취 수준이나 수학적 성향 등은 특별히 고려하지 않았다. 교수 실험이 끝난 후 실험 대상자를 상대로 사후 설문 조사를 실시하였다.

교수실험은 2차시 분량으로, 1차시에서는 테셀레이션의 의미와 삼각형의 테셀레이션에 관한 탐구활동으로 구성하였으며 2차시에는 사각형의 테셀레이션에 관한 탐구활동으로 구성하였다. 교수실험은 본 연구자가 담당하였다.

3. 자료 분석

본 연구에서 수집한 자료는 설문 조사 자료와 교수 실험 과정에서의 활동지 자료, 그리고 테셀레이션을 만드는 과정에서 대화 내용을 녹화한 비디오 자료이다. 이들 자료로부터 학생들이 여러 가지 다각형으로 테셀레이션을 만들 때 직면하는 어려움은 무엇이며, 테셀레이션의 수학적 원리를 발견하기 위해서는 어떤 초점 질문을 어떻게 던져야 할 것인지에 주안점을 두고 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 사전 설문 조사

사전 설문조사 문항[2] 1, 2, 3에 대한 교사와 학생의 응답 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 사전 설문 조사 결과

설문 문항	교사 수(%)	학생 수(%)
1. 테셀레이션의 실생활 예를 제시하시오.	48(96)	115(86.5)
2. 모든 형태의 삼각형과 사각형은 테셀레이션이 가능한가?	10(20)	12(9)
3. 가능하다면 그 이유는?	3(6)	0(0)

2) 부록 참조

테셀레이션의 실생활 예를 묻는 설문 문항 1에 대하여 교사의 96%와 학생의 87%가 실생활에서 볼 수 있는 테셀레이션의 예로써 화장실 바닥의 타일이나 축구공, 건물의 벽돌, 퍼즐, 보도블록 등의 다양한 예를 제시하였다. 설문문항 2에 대하여 교사의 20%와 학생의 9%는 '예"라고 응답하였다. 그러나 모든 형태의 삼각형과 사각형으로 테셀레이션이 가능한 이유를 묻는 문항에 정확하게 응답한 교사는 6%밖에 안됐고, 나머지 대부분의 교사는 "적당한 모양의 삼각형이나 사각형이면 만들 수 있을 것 같다"와 같이 직관에 의존하여 응답하였다. 학생들은 아무도 정확하게 응답하지 못하였다.

이와 같은 사전 설문 조사로부터 교사와 학생들은 테셀레이션이 어디에 활용되는지, 무엇인지는 어느 정도 이해하고 있으나, 그 수학적 원리에 대해서는 거의 모르고 있다고 할 수 있다.

설문문항 4에서는 테셀레이션이 가능한 다각형을 선택하도록 하였는데 그 응답 결과는 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2>을 보면 학생과 교사의 반응에 있어 다소 차이는 있지만 대체로 '가'(정삼각형), '마'(직사각형), '카'(정육각형), '다'(직각삼각형)는 테셀레이션이 가능한 다각형이라고 응답하였다. 특히, 많은 교사들이 '가'(정삼각형), '바'(마름모), '차'(정오각형), '카'(정육각형), '타'(정팔각형)는 테셀레이션이 가능할 것이라고 응답하였는데, 이것은 많은 교사들이 정다각형은 테셀레이션이 가능한 도형으로 생각하고 있음을 의미한다.

그러나 한 가지 특이한 현상은 수학 교과서 [5-가 단계]에서 일반 삼각형(라)과 일반 사각형(자)으로 도형을 덮는 활동을 해 보았는데도 불구하고 많은 교사와 학생들이 일반 삼각형이나 일반 사각형으로는 테셀레이션이 가능하지 않은 것으로 응답하였다. 이것은 한 가지 모양 조각으로 덮는 활동에 내재되어 있는 테셀레이션의 원리를 간과한 채 표면적으로 드러나는 활동만을 수행했기 때문인 것으로 생각된다.

테셀레이션이 가능한 다각형에 대한 이해 정도를 파악하기 위해서 교사와 학생의 정답 수를 구한 결과는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

학생들의 정답 수의 분포는 4점~6점 사이가 가장 많고, 교사들의 정답 수의 분포는 5점~7점 사이가 많았다. 학생들의 평균 정답 수는 5.5개(100점 만점에 42점), 교사들의 평균 정답 수는 6.7개(100점 만점에 52점)로 선택형 문항임을 감안하면 학생이나 교사 모두 테셀레이션의 수학적 원리를 잘 모른다고 할 수 있다.

2. 교수 실험

(1) 1차시 수업: 삼각형 테셀레이션

테셀레이션의 수학적 원리를 지도하기 전에 먼저 학생들에게 에셔의 작품을 보여주고, 그것들을 분류하도록 하였다. 그 결과, 학생들은 에셔의 작품을 여러 가지 색과 모양이 나타나는 작품, 어떤 물체를 보고 그린 작품, 무늬가 반복되는 작품 등 다양한 분류 기준을 정해 분류하기도 하였으며 '겹치지 않은 작품'이나 '한 가지 모양을 사용하여 빈틈없이 맞춘 작품' 등 테셀레이션의 개념과 관련된 속성으로 분류하기도 하였다.

두 번째 활동은 학생들에게 삼각형들 중에서 테셀레이션이 가능하다고 생각되는 삼각형을 추측하여 찾아보

<표 Ⅳ-2> 테셀레이션이 가능한 다각형(%)

대상 \ 다각형	가	나	다	라	마	바	사	아	자	차	카	타	파
학 생	57.1	35.3	75.2	18.0	94.0	38.3	27.1	14.3	9.0	33.1	51.9	34.6	2.3
교 사	96	56	80	24	92	78	50	26	20	70	86	60	14

<표 Ⅳ-3> 테셀레이션이 가능한 다각형에 대한 정답 수

대상 \ 정답 수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	합계
학 생	2	8	12	31	22	23	12	9	1	8	4	1	0	133
교 사	0	3	3	3	7	11	7	5	3	0	6	1	1	50
합 계	2	11	15	34	29	34	19	14	4	8	10	2	1	183

는 활동이었다. 효기는 '가'와 '다'가 될 것 같다고 추측했고, 희윤이는 '가'와 '나'는 정삼각형과 이등변삼각형이기 때문에, 그리고 '다'는 직각삼각형이기 때문에 직사각형을 만들 수 있고, '라'는 평행사변형을 만들 수 있기 때문에 테셀레이션이 가능할 것이라고 추측하였다. 이와 같은 희윤이의 반응에 대해 다른 학생들도 동의하는지를 연구자가 묻자, 다른 학생들은 대체로 무반응이었다. 참고로 다른 학생들이 활동지에 기재한 것을 제시하면 두 학생이 '다'만 테셀레이션 될 것이라고 추측하였고, 한 학생은 '가, 나, 다', 또 다른 한 학생은 모두 테셀레이션이 불가능할 것이라고 추측하였다.

세 번째 활동은 위에서 선택한 삼각형들이 테셀레이션이 가능한지를 알아보려면 어떻게 해야 좋을지 그 방법을 탐구하도록 하였다. 그러자 어떤 학생은 삼각형을 그려보면 된다고 했는데, 연구자가 그렇게 그리면 그 다음에 그리는 삼각형이 똑같은 삼각형이 되지 않을 수도 있지 않느냐고 되물었더니 수긍하였다. 또 다른 학생은 투명용지에 그려서 그것을 대어보는 방법을 제안했다. 연구자는 그것도 하나의 방법이 될 수 있다고 말하고, 또 다른 방법이 없는지 발표해 보도록 하였다. 그 다음에 연구자가 색종이를 교탁 밑에서 꺼내자 한 학생이 손을 들면서 "색종이에 똑같은 삼각형을 계속 그려서 잘라 붙이면 된다."고 했다. 연구자가 똑같은 삼각형을 "계속" 그려서 잘라야 하느냐고 반문하자, 한 학생은 색종이를 여러 장 겹쳐 놓은 후 그 위에 삼각형을 하나 그려서 자르면 된다고 했다. 이에 연구자는 '그것도 한 방법이 될 수 있지만 색종이를 접으면 어떨까?'라고 제안함으로써 색종이를 접어서 합동인 삼각형을 만드는 방법을 제안하고, 색종이나 A4 크기의 색상지, 색 켄트지 등을 나누어 주었다. 학생들에게 테셀레이션에 사용할 임의의 삼각형을 만들도록 했을 때, 학생들은 테셀레이션이 용이한 직각삼각형을 만드는 경우가 많아서 다양한 삼각형을 만들 것을 제안하였다. 학생들의 활동이 어느 정도 마무리된 후에 연구자는 학생들이 정삼각형, 이등변삼각형, 직각삼각형, 일반삼각형으로 만든 테셀레이션 작품을 각각 보여준 뒤, 왜 삼각형은 테셀레이션이 가능한지에 대해 발문하였더니 학생들은 다음의 에피소드에서 보는 바와 같이 테셀레이션의 수학적 원리를 발견할 수 없었다.

01 연구자: 그런데 어떻게 삼각형은 테셀레이션이 가능할까? 일반삼각형도 테셀레이션이 다 되죠? 왜 삼각형은 테셀레이션이 가능할까? (몇몇 학생들이 손을 든다.) 효기 한 번 이야기해 보자.

02 효기: 네 선생님! 삼각형은 변이 다른 것과 이어질 수 있게 일정하게 나 있기 때문입니다.

03 연구자: 변이 서로 연결할 수 있도록, 서로 맞닿을 수 있도록 일정하게 나 있기 때문이다. 또?

04 희연: 네 선생님! 삼각형은 어떤 사각형이든 만들 수 있기 때문에 그 사각형의 1/2이기 때문입니다.

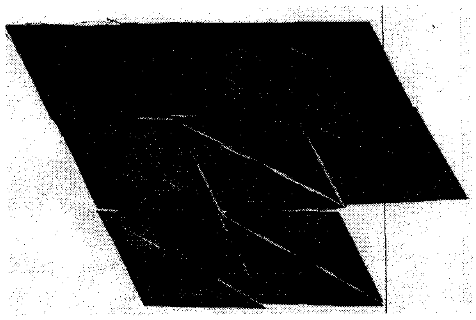
05 연구자: 아~ 사각형을 이용하면 될 거다. 또 다른 생각을 가진 사람? 없어요? (민수가 손을 든다) 응!

06 민수: 네 선생님! 희연이가 사각형을 만들 수 있다고 했는데, 오각형이나 육각형 등 다각형을 만들어도 할 수 있습니다.

07 연구자: 음~ 모든 사각형이 그럼 테셀레이션 될 수 있을까?

08 학생들: (낮은 목소리로) 돼요, (혹은) 안 돼요.

위의 에피소드에서 보듯이 학생들은 삼각형 조각을 이용하여 테셀레이션을 만들 수는 있지만, 왜 임의의 삼각형이 테셀레이션이 가능한지를 논리적으로 정당화하지 못했다. 02번의 효기의 반응은 단순한 직관에 의존하여 설명한 것이고, 04번의 희연이의 정당화는 모든 사각형을 가지고 테셀레이션할 수 있다는 가정이 참이어야 성립할 수 있다. 희연이의 경우, 테셀레이션을 만든 작품(<그림 Ⅳ-4>)을 보면 두 삼각형을 이용하여 평행사변형을 만들고 그러한 평행사변형들을 배열한 것을 볼 수 있었다.



<그림 Ⅳ-4> 희연이의 테셀레이션

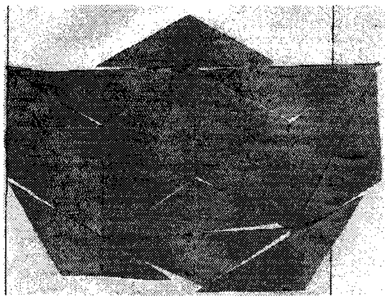
테셀레이션을 만들기 전에 희연이는 일반 삼각형으로 테셀레이션을 만들 수 있다고 추측했는데 그 근거로 일반 삼각형으로 평행사변형을 만들 수 있기 때문이라고 말하였다. 즉, 평행사변형으로 테셀레이션이 가능하기 때문에 일반삼각형으로도 테셀레이션이 가능하다는 것이다. 사후 면담을 통해서 희연이가 평행사변형이 테셀레이션이 가능하다고 생각한 것은 사전 경험이나 학습에 의한 것이 아니라 직관적인 것임을 알 수 있었다. 이것은 테셀레이션과 관련된 비형식적 지식으로써 원래의 도형을 몇 개의 조각으로 다른 도형을 만들고, 이렇게 만들어진 도형이 테셀레이션이 가능하다면 원래의 도형도 테셀레이션이 가능하다는 것이다. 예를 들면, 직각삼각형의 경우에는 두 조각으로 직사각형을 만들 수 있기 때문에 테셀레이션이 가능하다는 것이다. 이와 같은 전략을 "구성 전략(Build-up Strategy)"이라고 할 수 있다.

학생들은 삼각형의 테셀레이션에서 자신들의 비형식적 지식인 구성 전략을 이용하여 테셀레이션을 만들 수는 있었지만, 왜 일반 삼각형으로 테셀레이션을 만들 수 있는지에 대한 수학적 원리를 발견하지는 못했다. 이에 따라 연구자는 한 꼭지점에 조각이 몇 개 모이는지 알아보도록 하는 초점 질문을 던졌다.

09 연구자: 자, 한 꼭지점에 조각이 몇 개 모이는지 세어 보자. 몇 개 모이지?
10 학생들: 6개요.
11 민희: 3개 모이는 것도 있구요 8개 모이는 것도 있어요.
12 연구자: 민희는 한 꼭지점에 모이는 조각의 개수를 같게 만들어 봐.
13 민희 : 네.
14 연구자 : 자, 이제 각 삼각형의 세 각에 크기가 같은 각을 ○, □, △으로 표시 해보자, 이 세 각을 모두 합하면 몇 도지?
15 학생들: 180도요.
16 연구자: 다시 테셀레이션을 만들어서 꼭지점에 모여 있는 ○, □, △의 개수를 세어보자. 각각 몇 개지?
17 학생들: 네모가 2개, 세모가 2개, 동그라미가 2개요
18. 민희: 네모가 4개, 세모가 4개, 동그라미가 4개.
19 연구자: 그것을 다 합하면 몇 도지?
20 학생들: 응.... 360도요.

학생들은 꼭지점에 모인 조각이 직각삼각형이 아닌 경우에는 6개라고 대답하고, 직각삼각형인 경우에는 4개 혹은 8개라고 대답했다(<그림 Ⅳ-5>). 학생들은 한 꼭지점에 모이는 조각의 개수를 같게 한 다음에 삼각형의 세 각에서 크기가 같은 각을 각각 ○, □, △로 표시하였다. 그리고 꼭지점에 모인 ○, □, △의 개수를 세어서 그 합을 구하였더니 360도가 됨을 발견하였다.

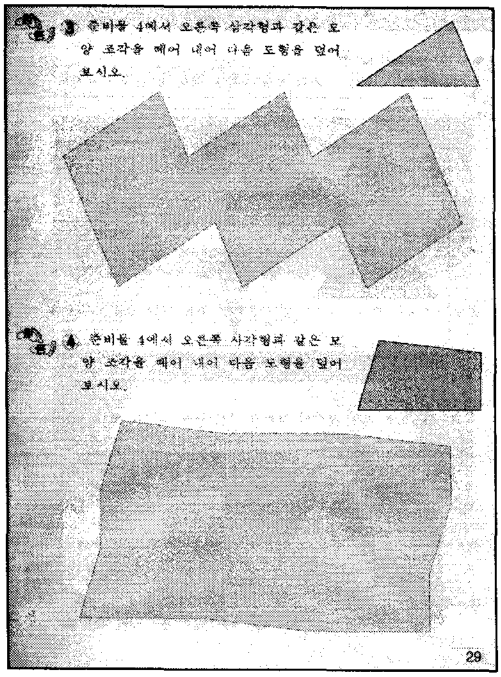
그러나, 학생들은 '삼각형들을 한 점에 모았을 때 각들의 합이 360도가 된다는 사실'과 '임의의 삼각형을 이용하여 테셀레이션을 만들 수 있다'는 사실을 서로 관련시켜서 테셀레이션의 원리를 스스로 발견하는 것 같지는 않았다.



<그림 Ⅳ-5> 각 꼭지점에 모인 삼각형의 조각수가 다른 테셀레이션

(2) 2차시 수업: 사각형 테셀레이션

2차시 수업에서는 먼저 수학 [5-가] 교과서에 있는 도형 덮기 활동에 대한 학생들의 반응을 분석하였다. <그림 Ⅳ-6>과 같이 테두리가 있는 경우에 일반 사각형 모양의 퍼즐 조각으로 테셀레이션을 만들게 했을 때, 학생들은 테두리에 먼저 사각형의 변들을 맞춤으로써 쉽게 테셀레이션을 만들 수 있었다. 이와 같이 테두리가 주어진 경우에 삼각형이나 사각형으로 테셀레이션 하는 활동은 학생들에게 어떤 인지적인 갈등을 느낄 수 있는 도전적인 과제가 되지 못할 뿐만 아니라, 학생들의 공간감각을 기르는 데에도 제약이 있었다. 이에 따라 2차시 수업에서는 인지적 갈등을 느낄 수 있도록 테셀레이션이 불가능 할 것 같은 사각형을 만들게 하고, 이를 짝과 바꾸어 테셀레이션을 하도록 하였다.



<그림 Ⅳ-6> 초등 수학교과서 5-가 단계

연구자는 학생들에게 색종이와 활동지를 나누어준 후, 테셀레이션을 하는 과정에서 다음과 같은 발문을 하였다.

21 연구자: 변과 변이 맞닿으려면 어떻게 하면 될까? 잘 생각해서 해봐. …
22 연구자: 테셀레션이 되려면 접하는 변은 어떻게 되어야할까?
23 학생들: 길이가 같아야 해요.
24 연구자: 길이가 같아야 되겠지? (길이가) 같은 변을 맞대어 봐요.

학생들은 삼각형에 비하여 사각형 테셀레이션을 만드는데 더욱 어려움을 느끼는 것 같았는데, 이것은 테셀레이션이 될 수 없을 것 같은 사각형을 가지고 활동을 했기 때문이라고 생각한다. 이에 따라 연구자는 학생들의 활동을 계속 진행시키기 위해서 '변과 변이 맞닿으려면 어떻게 하면 될까?'와 같은 초점 질문을 던졌다.

25 연구자: 이 변과 이 변이 맞닿아야 하니까 (같은 모양의 조각을 뒤집어서 맞대어 본다) 이렇게 하면 되겠니?
26 기윤: … 안돼요. 틈이 생겨요.
27 연구자: 안되겠지? 어떻게 하면 될까?
28 기윤: 돌려봐요.
29 연구자: 그렇지. 이렇게 돌리면 되지?
30 학생들: 네.

위의 에피소드에서와 같이 학생들은 사각형을 테셀레이션하기 위해서 길이가 같은 변을 맞대어야 하고, 그와 같이 변을 맞대는 방법에는 도형을 뒤집거나 돌리면 된다는 것을 알았다. 그러나 사각형을 뒤집어서 옮기면 나중에는 틈이 생기거나 겹치게 되므로 사각형을 반 바퀴 돌려야 한다는 것을 발견하게 되었다.

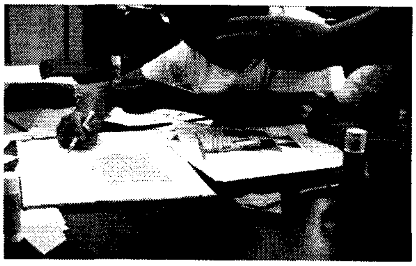
<그림 Ⅳ-7> 오목 사각형 셀레이션

이와 같은 활동을 통해서 학생들은 위의 [그림 Ⅳ-7]과 같이 오목사각형을 가지고도 테셀레이션을 만들 수 있었다.

31 학생들: 선생님 다 했어요.
32 연구자: 자, 다했어요? 활동을 통해 무엇을 알 수 있죠?
33 효기: 사다리꼴이거나 직각이 있거나 볼록 사각형은 대부분이 다 테셀레이션이 되요.
34 민선: 사다리꼴하고 오목사각형도 테셀레이션이 되요.

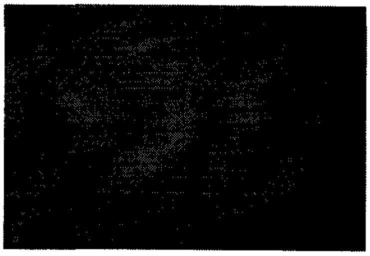
학생들이 사각형을 이용하여 테셀레이션을 만든 후, 연구자는 그 원리를 알아보도록 하였다. 그러나 학생들은 단지 활동을 통해 알게 된 사실만을 되풀이하여 말하였고(33, 34) 일반 사각형으로 테셀레이션을 만들 수 있는 이유나 원리에 대해서는 말하지 못하였다. 이에 따라 학생들로 하여금 테셀레이션의 수학적 원리를 발견하게 하기 위해서 다음과 같은 초점 질문을 던졌다.

35 연구자: 자, 그러면 다시 종이를 오리려면 힘이 드니까. 이것(하드보드지로 미리 만든 사각형 퍼즐 판)을 뒤집어서 가운데에 사각형을 하나 두세요<그림 Ⅳ-8>. 사각형에는 꼭지점이 몇 개 있어요?
36 학생들: 4개.



<그림Ⅳ-8> 사각형퍼즐을 이용한 테셀레이션

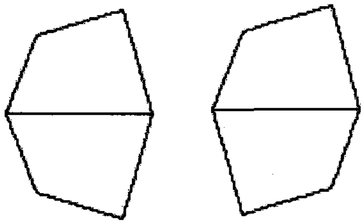
37 연구자: 4개 있죠. 자기가 원하는 꼭지점을 하나 선택하고 난 다음에 그 꼭지점을 빈틈없이 한번 채워 봐요.
38 학생들: 다 했어요.
39 연구자: 한 꼭지점을 빈틈없이 채워봤어요?
40 학생들: 네!
41 연구자: 그러면 자, (칠판에 사각형을 하나 그리며) 여러분 사각형이 하나 있죠?
42 학생들: 네.
43 연구자: 이러한 사각형을 빈틈없이 채웠죠?
44 학생들: 네!
45 연구자: 그러면 각을 한번 표시해 보자. 이렇게 크기가 같은 각들을 각각 달리 표시해 보자.
46 학생들: (각을 각각 표시한다.)
47 연구자: 자, 그것을 보면서 어떤 것을 알 수 있는지 한번 이야기 해 보자. 혹은 짝끼리 이야기 해 보자. 어떤 것을 알 수 있어?
48 희연: 360도가 되는데(<그림 Ⅳ-9>).



<그림 Ⅳ-9> 서로 다른 각 표시

49 연구자: 한 꼭지점을 선택해서 그것을 모으면 360도가 되죠. 그런데 360도가 되는데 그 모은 각들은 어떻게 되지?
50 민선: 다 달라요.
51 연구자: 다 다르지? 그리고 또 알 수 있는 것은?
52 학생들: …
53 연구자: 테셀레이션을 만들 때 돌려서 맞추었나요? … 그러니까 … 같은 변이 만나려면 뒤집을 수도 있고 돌릴 수도 있는데. 뒤집으니까 어떻게 돼?
54 기윤: 빈틈이 생겨요.
55 연구자: 빈틈이 생기죠. 얼마만큼 돌렸어?
56 효기: 180도
57 연구자: 180도. 반 바퀴 돌렸죠. 또? 꼭지점이 만나는 것은 360도가 되는 것이고 네 각이 서로 다르게 만나죠. 또, 뭘 알 수 있나? 사각형은 몇 도지? 네 각의 합이…
58 학생들: 360도
59 연구자: 항상 360도죠. 그러니까 사각형에서 서로 다른 각들을 다 모으면 항상 360도니까 한 꼭지점에서
60 기윤: 아~ 빈틈없이 만날 수 있어요.

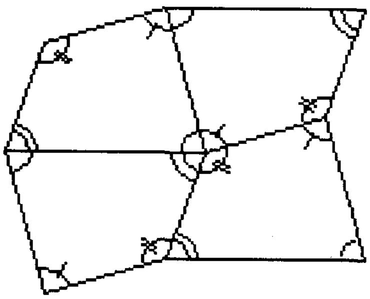
연구자는 활동의 편의를 위하여 미리 만든 사각형 퍼즐 조각을 이용하여 테셀레이션 원리를 발견할 수 있도록 초점 질문을 하였다. 예를 들어, 연구자는 사각형을 한 개 두고 임의의 한 변과 맞닿을 수 있는 사각형을 덮기 위해서는 어떻게 해야 할 것인지를 발문하였다. 그러자 학생들은 <그림 Ⅳ-10>에서 보는바와 같이 (한 변을 축으로) 뒤집어서 배열하거나, (변의 중점을 중심으로) 반 바퀴 돌리면 된다는 것을 스스로 발견할 수 있었다.



<그림 Ⅳ-10> 변이 맞닿게 하는 방법

그 다음에는 각자 사각형의 네 꼭지점 중에서 한 꼭지점을 정한 후, 사각형들을 뒤집거나 돌려서 테셀레이션을 만들 수 있는 방법을 찾아보도록 했다. <그림 Ⅳ

-11>)에서 보는 것과 같이 사각형을 반 바퀴씩 돌리면 테셀레이션을 만들 수 있다.



<그림 Ⅳ-11> 사각형의 테셀레이션

그러나, 그렇게 테셀레이션을 만든 후에도 학생들은 스스로 테셀레이션의 원리를 설명하지 못해서 사각형의 네 각을 각각 표시하도록 하였다. 각각 표시한 후에 무엇을 발견하게 되었는지 발표시켰을 때 학생들은 "서로 다른 네 각이 한 꼭지점에 모였어요.", "사각형의 네 각의 합은 360°이니까 서로 다른 네 각을 모으면 항상 한 꼭지점을 빈틈없이 포개짐 없이 덮을 수 있어요.", "따라서 어떤 사각형도 테셀레이션을 만들 수 있어요." 등의 반응을 이끌어 낼 수 있었다.

3. 사전/사후 설문조사 결과 비교

교수 실험이 끝난 후, 실험에 참여한 학생들을 대상으로 사전 설문조사의 문항 4에 대하여 사후 설문 조사를 실시하였다. 사전 설문 조사가 이루어진 후 2주일 후에 두 차시의 교수 실험이 2일 간에 걸쳐 이루어졌고, 다시 1주일 후에 사후 설문 조사를 실시한 결과를 비교하면 <표 Ⅳ-5>와 같다.

학생들이 사전/사후 검사에서 특별히 달라진 점은 라(일반 삼각형), 바(마름모), 사(평행사변형), 아(사다리꼴), 자(일반 사각형), 타(정팔각형), 파(오목사각형)에 대한 반응이다. 이들 다각형에 대해 학생들은 교수실험 이전에는 테셀레이션을 만들 수 있느냐는 물음에 적절히 답할 수 없었으나, 실험이 끝난 후에는 적절하게 답하였다. 더욱이, 정다각형에 대해서는 교수 실험의 주제가 아니었음에도 불구하고 학생들은 실험 후에 '차'(정오각형)와 '타'(정팔각형)가 테셀레이션이 될 수 없다는 것을 스스로 발견하였다. 사전/사후 검사의 평균 정답 수를 비교해 보면 사전 검사에서는 6개 이었고, 사후 검사에서는 그것의 2배인 12.5개였다.

이와 같은 사후 검사 결과는 본 연구의 교수 실험이 테셀레이션의 수학적 원리 발견에 효과가 있음을 보여주는 것이다. 물론, 본 연구자가 교수실험을 담당하였기 때문에 실험 과정에서의 공정성과 객관성을 담보하지 못했고, 6명의 사례로부터 얻은 실험 결과로 본 연구를 일반화 할 수는 없겠지만 교사의 적절한 안내와 초점 질문을 통해서 '보통의 초등학생들도 테셀레이션의 수학적 원리를 발견할 수 있다'는 근거 자료를 제공했다는 측면에서 의미가 있다고 생각한다.

Ⅴ. 결 론

교육 활동은 단지 외형적으로 드러나는 '활동을 위한 활동'이어서는 곤란하다. 학생들은 교육 활동을 통하여 그러한 활동이 지향하는 목표를 달성해야 하고, 자연스럽게 개념과 원리를 재발명할 수 있어야 한다. 그러나 현행 교과서에 제시되어 있는 도형 덮기 활동은 테두리가 주어진 경우에 도형을 덮기 때문에 학생들은 테두리에 착안하여 아무런 어려움 없이, 그리고 공간 감각을 기를 수 있는 여지도 없이 활동을 위한 활동을 하고 있다. 이와 같은 활동은 단순히 도형을 덮어 볼 뿐이지 도형 덮기에 내재되어 있는 테셀레이션의 수학적 원리를 발견해 내기는 거의 불가능하다.

본 연구에서 실시한 교수 실험은 교사의 적절한 안내로 영재가 아닌 일반 초등학생에게도 테셀레이션의 수학

<표 Ⅳ-5> 사전/사후 검사 비교 결과

검사 \ 다각형	가	나	다	라	마	바	사	아	자	차	카	타	파
사전 검사의 응답 수	5	5	5	2	5	3	2	1	1	4	4	5	0
사후 검사의 응답 수	6	6	6	6	6	6	6	6	5	2	6	0	6

적 원리를 지도할 수 있다는 가능성을 보여 주었다. 그러한 가능성의 배경에는 테셀레이션의 수학적 원리를 학생들이 가진 사전 지식 즉, 도형의 이동(밀기, 뒤집기, 돌리기)과 다각형의 내각의 크기에 대한 지식에 기초해서 재발명할 수 있기 때문이다. 그러나 단순히 학생들에게 테셀레이션에 관한 과제를 부여하는 것만으로는 그 원리를 발견하기가 쉽지 않았다. 학생들은 임의의 삼각형의 테셀레이션에서 두 조각의 삼각형을 이용하여 평행사변형을 만들어서 평면 전체를 테셀레이션 하는 비형식적인 '구성 전략'을 사용했지만, 그와 같은 활동을 통해서는 테셀레이션의 수학적 원리를 찾아내지는 못했다.

학생들로 하여금 테셀레이션의 수학적 원리를 발견하게 하기 위해서는 교사가 활동을 통해 추구하고자 하는 원리를 재발명할 수 있도록 초점 질문을 던질 필요가 있다. 예를 들어, 학생들이 스스로 임의의 삼각형과 사각형을 이용하여 테셀레이션을 완성했다면, 그 원리를 재발명할 수 있도록 하기 위해서는 학생들이 각각의 도형을 별개의 대상으로 보지 않고, 테셀레이션 된 도형들 사이의 관계에 주목할 수 있도록 "서로 접한 두 도형 사이에는 어떤 관계가 있지?"와 같은 질문이 필요하다. 또한 학생들이 테셀레이션하는 과정에서 어려움에 직면할 때, "두 변이 맞닿기 위해서는 도형을 어떻게 움직여야 하지?"와 같은 질문이 필요하고, 테셀레이션의 원리를 발견하는 과정에서는 "크기가 같은 각들을 각각 표시해 보자"와 같은 발문이 필요하다.

한편, 초등학교에서 테셀레이션을 지도할 때, 교과서에 제시된 순서처럼 일반 삼각형의 테셀레이션을 먼저 다룬 후에 일반 사각형의 테셀레이션을 다룰 것이 아니라, 평행사변형의 넓이를 먼저 다룬 후에 삼각형의 넓이를 다루듯이 일반 사각형의 테셀레이션을 먼저 다루는 것이 바람직한 것으로 생각된다. 왜냐하면 일반 삼각형의 테셀레이션을 먼저 다루게 되면 우선 도형을 반 바퀴씩 돌려야 하고, 한 꼭지점에 모이는 삼각형의 개수가 사각형의 경우보다 많기 때문에 그 수학적 원리를 쉽게 발견할 수 없기 때문이다. 또한, 학생들은 일반 삼각형 2개를 이용하여 평행사변형을 만들고 그러한 평행사변형을 이용해서 테셀레이션을 만들 수 있다고 정당화하는데, 모든 사각형이 테셀레이션이 될 수 있다는 것을 먼저 알게 된다면 정당화하기에도 용이하기 때문이다. 그러나 본 연구의 이와 같은 제안은 교수 실험의 결과가 아니기 때문에 후속의 실험 연구가 필요할 것으로 생각된다.

초등학교에서 테셀레이션의 수학적 원리를 도입하면 학생들은 테셀레이션의 원리를 탐구하는 과정에서 도형을 밀고, 뒤집고, 돌리는 가운데 자연스럽게 공간감각을 기를 수 있고, 일상생활에서 무심코 지나쳤던 보도블록이나 전통문양 또는 모자이크 등에도 테셀레이션 원리가 내재되어 있다는 것을 알고, 그러한 원리를 재발명하게 될 것이다. 또한 학생들은 생활 속의 여러 가지 테셀레이션 작품을 접함에 따라 수학의 유용성과 수학적 미를 인식하고, 수학에 대해 더욱 긍정적인 성향을 가지게 될 것이다.

참 고 문 헌

계영희 (2005). GSP를 활용한 테셀레이션 작도, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **19(1)**, pp.319-320.

교육인적자원부 (2006). 수학 5-가, 서울: 대한교과서 주식회사.

김남균 (2004). 패턴블록과 조노돔을 활용한 테셀레이션 지도방안 탐색, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(2)**, pp.497-504.

김원경·백선수 (2000). 테셀레이션을 활용한 초등학교 영재교육 프로그램 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지>, 5, pp.75-85.

김정숙 (2003). 수학 교수-학습에서 테셀레이션 활용방안, 영남대학교 교육대학원 석사학위논문.

남승인·류성림·강영란·백선수 (2003). 영재심화 교수-학습자료(초등학교 5학년용), 서울: 한국교육개발원.

남승인·백선수 (2000). 바닥깔기를 통한 수학적 미의 탐구, 서울 : 한국교육개발원.

서영숙 (2003). 외국 교과서 분석을 통한 수학과 교육과정의 테셀레이션 활용 방안 연구, 건국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

오혜원 (2000). 중학교 CA활동에서 테셀레이션 도입을 통한 테셀레이션 도입을 통한 기하학습의 효과 연구, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

이경미 (2003). 중학교 기하수업에서 테셀레이션 활용을 통한 수학적 흥미 유발에 관한 연구, 신라대학교 교육대학원 석사학위논문.

이정수 · 송명견 (2006). 조각보의 면구성과 테셀레이션 비교 연구, 한국의류학회지 **30(6)**, pp.948-960.

이정주 (2005). 초등 미술 교육에서 문양의 다문화 교육 지도 방안 연구: 테셀레이션을 활용하여, 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

이찬규 (2001). 초등학교 기하 학습 지도에서 테셀레이션 활용 방안 연구, 인천교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

임현숙 (1999). 테셀레이션(tessellation)을 응용한 패턴 디자인 연구: 에셔(M.C. Escher)의 작품을 중심으로, 이화여자대학교 디자인대학원 석사학위논문.

임해경 · 박은영 (2002). 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 테셀레이션 교수 학습 자료 개발 및 활용 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **13(2)**, pp.563-589.

전영아 (2000). 수학 교수-학습에서의 테셀레이션 활용 가능성 탐색('도형'과 '규칙성과 함수'영역을 중심으로), 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

전영숙 (2003). 외국 교과서 분석을 통한 수학과 교육과정의 테셀레이션 활용 방안 연구, 국민대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Bezuszka, S.; Kenney, M. & Silvey, L. (1977). *Tessellations: The geometry of patterns.* Chicago : Creative Publications.

Billstein, R..; Libeskind, S. & Lott, J. W. (2001). *A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers*, (7th ed.), Boston : Addison Wesley Longman.

Del Grand, J. & Morrow, L. J. (1996). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series*, grades K-6: Geometry and spatial sense, Reston, VA : NCTM..

Giganti, P. & Cittadino, M. J. (1990). The art of tessellation, *Arithmetic teacher*, March, pp.6-16.

Granger, T. (2000). Math is art. *Teaching children mathematics*, **7(1)**, pp.10-13,

Holly, K. (1998). The art of Mathematics. Teaching children mathematics **4(5)**, pp.266-267.

Kennedy, L. M. & Tipps, S, (1994). *Guiding children's learning of mathematics*, 7th ed., California : Wadsworth Pub. Co.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

Orton, T. (1994). Tessellation in the curriculum. *Mathematics in School*, **23(4)**, pp.12-16.

Ranucci, E. R. & Teeters, J. L. (1977). *Escher-type drawings*, Chicago : Creative Publications.

Seymour, D. & Britton, J. (1989). *Introduction to tessellations*, California : Dale Seymour Publication.

Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching development*(5th Ed.), Boston : Pearson Education, Inc.

An Investigation on the Possibility to Teach Mathematical Principles of Tessellations in Elementary School Mathematics

Baek, Seonsu
Dague Waryoung Elementary School, Daegu, Korea
Email : ss-baek@daum.net

Kim. Wonkyung
Korea National University of Education, Cheongju, Korea
Email: wonkim@knue.ac.kr

This study was conducted to investigate the possibility of teaching tessellations' mathematical principles in elementary school mathematics. A survey was carried out and the two hours of the instructional experiment were developed for this study : triangular tessellation activity and rectangular tessellation activity. Six fifth graders from W elementary school participated voluntarily in the instructional experiment.

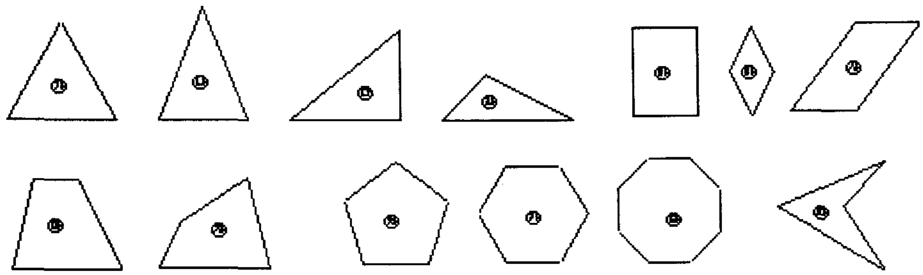
It was shown from the survey that teachers and students both know what the tessellation is, but they don't know what the mathematical principles really are in the tessellation. This is because they have just done the covering up-activities in class. It was seen from the instructional experiments that even ordinary students were able to understand the mathematical principles of the tessellation if teachers could throw the suitable focusing questions like "how to move the rectangles making sides equal" and "how to gather vertexes making angle 360°". Furthermore, it is desirable to teach the rectangular tessellation prior to the triangular tessellation since the rectangular tessellation is more easy to deal with than the triangular tessellation.

* ZDM Classfication : D12
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : tessellation, focusing question, elementary school mathematics

부록 : 설문 조사지 및 교수 실험 활동지

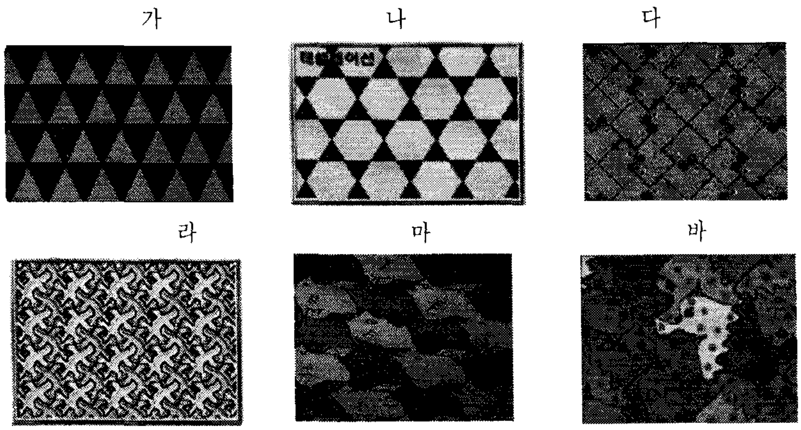
[1] 사전 설문 조사지

1. 초등학교 교과서 [5-가. p.29]에는 삼각형과 사각형으로 주어진 평면을 빈틈이나 포개짐이 없이 덮는 활동이 있는데 이것을 영어로는 테셀레이션이라고 합니다. 테셀레이션은 일상생활에서도 흔히 볼 수 있는데 그 예를 들어 보세요.
2. 임의의 삼각형이나 사각형으로 테셀레이션을 만들 수 있습니까? (예, 아니오)
3. 위의 문항에서 "예"라고 대답한 사람은 그 이유가 무엇이라고 생각합니까?
4. 아래의 도형들 중에서 테셀레이션이 가능한 다각형을 모두 골라주세요.



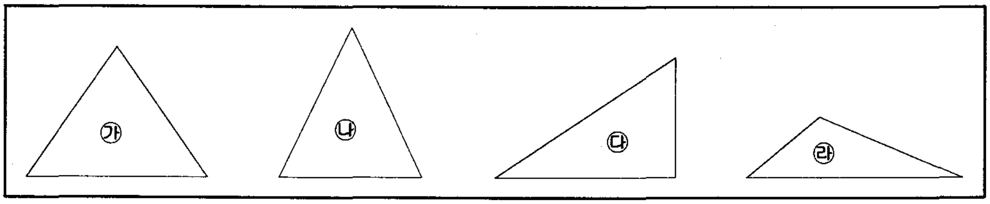
[2] 1차시 교수 실험 : 테셀레이션의 의미와 삼각형의 테셀레이션

1. 다음 작품에는 어떤 공통적인 특징들이 있습니다. 아래 표에서와 같이 각자 분류 기준을 다양하게 정해서 그 기준에 해당하는 경우에는 ○표, 해당하지 않는 경우에는 ×표 해 봅시다.



분류 기준	가	나	다	라	마	바
예) 생물로 구성된 작품	×	×	×	○	○	○

2. 다음 삼각형들 중에서 테셀레이션이 가능한 삼각형은 어떤 삼각형일까요? 테셀레이션이 가능하다고 생각되는 모든 삼각형에 "∨"표 하시오.



3. 위에서 선택한 삼각형들이 테셀레이션이 가능한지를 어떻게 알아볼 수 있을까요?
(이 질문 아래에는 정사각형 모양의 빈 공간을 제시함)

4. 활동을 통해 알게 된 것을 적어보세요.

[3] 2차시 교수 실험 : 사각형의 테셀레이션

1. 다음과 같은 순서로 짝과 활동해 봅시다.

① 색종이를 4장 겹쳐서 두 번 접은 후, 테셀레이션이 불가능할 것 같은 사각형을 1개 그리고 선을 따라 잘라서 똑같은 사각형을 16개 만듭니다.
② 자신이 만든 사각형을 짝과 바꾸어서 아래 빈 칸을 빈틈이 없고, 겹쳐지지 않게 덮어 보세요.
③ 나머지 한 학생은 선생님 나누어 준 자료를 이용하여 활동하도록 합니다.

(위의 지문 아래에 정사각형 모양의 공간을 제시함.)

2. 활동을 통해 알게 된 것을 적어보세요.

3. 사각형을 다시 만들어서 아래 빈 칸의 중앙에 사각형을 한 개 붙이고, 세 꼭지점 중에서 한 꼭지점을 선택하여 그 꼭지점을 중심으로 빈틈이 없고, 겹쳐지지 않도록 붙여봅시다. (아래 정사각형 모양의 공간 제시)
어떤 사실을 알 수 있나요?

4. 위에서 덮은 사각형의 서로 다른 네 각을 각각 달리 표시해 봅시다. 어떤 사실을 알 수 있나요?