
반복 그린 함수 방법을 이용한 도파관 스텝 구조의 새로운 해석법

Novel Analysis of Waveguide Stub Structure Using Iterative Green's Function Method

조용희
목원대학교 정보통신공학과

Yong-Heui Cho(yhcho@mokwon.ac.kr)

요약

학부생들이 쉽게 사용할 수 있는 기법인 반복 그린 함수 방법(IGFM)을 이용하여 복잡한 전자파 도파관 스텝 구조를 이론적으로 엄밀하게 해석한다. IGFM은 그린 함수 접근법과 영역 반복법을 이용한다. IGFM의 간단한 공식화를 위해 단순한 수학 방정식만을 사용한 물리적인 반복 메커니즘을 이용한다. 전형적인 전자파 도파관 구조인 평행판 E평면 T접합 스텝에 대한 산란 특성을 IGFM 관점에서 이론적으로 공식화한다. 수치해석 결과를 주파수에 대한 반사와 투과 전력 관점에서 보인다.

■ **중심어** : | 도파관 | 그린 함수 | 반복법 | 산란 |

Abstract

An iterative Green's function method (IGFM) is introduced in order to analyze complex electromagnetic waveguide stub structures in view of a university student. The IGFM utilizes a Green's function approach and an regional iteration scheme. A physical iteration mechanism with simple mathematical equations facilitates clear formulations of the IGFM. Scattering characteristics of a standard E-plane T-junction stub in a parallel-plate waveguide are theoretically investigated in terms of the IGFM. Numerical computations illustrate the characteristics of reflection and transmission powers versus frequency.

■ **keyword** : | Waveguide | Green's Function | Iteration | Scattering |

1. 서론

전자파 도파관 구조(waveguide structure)[1-5]는 위성통신과 같은 고전력 시스템 전송선로 설계에 기본이 되는 소자이다. 도파관 구조의 임피던스 정합(impedance matching)이나 대역 저지(band stop) 특성을 위해서는 도파관 스텝(waveguide stub)을 많이 활용한다. 도파관 스텝을 설계 및 제작하기 위하여 도파관의 산란(scattering) 특성을 이론적으로 해석한다. 산

란 특성 해석에 사용되는 수학은 적분방정식(integral equation) 이론, 유수정리(residue theorem), 그리고 선형대수학(linear algebra)이다. 이 접근법은 학부생들이 이해하기에는 복잡한 고난이도의 수학 이론을 많이 사용한다. 본 논문에서는 고급 수학기법을 사용하지 않고 손쉽게 전자파 산란 구조를 해석할 수 있는 새로운 방법론인 IGFM(Iterative Green's Function Method) [6-9]을 도파관 스텝 해석에 적용한다.

도파관 구조 중 기본 핵심 소자인 T접합 스텝

(T-junction stub) 구조를 해석한다. 도파관 T접합은 주로 일반화된 산란행렬(generalized scattering matrix) 방법을 이용해서 해석되었다. 이 산란행렬을 사용하기 위해서는 행렬대수에 대한 기본적인 이해가 필요하다. 일반화된 산란행렬 방법을 이용하면 결합기(coupler), 멀티플렉서(multiplexer), 전력 분배기(power divider) 등을 설계할 수 있다[1-3]. [4]에서는 복잡한 전송선 등가회로(transmission line equivalent circuits)를 사용하여 E평면(E-plane) T접합에 대한 수식을 등가 네트워크(equivalent network) 관점에서 유도했다. 본 논문에서는 T접합[4-7] 구조보다 더욱 복잡한 T접합 스텝 구조를 그린 함수 접근법(Green's function approach)과 영역 반복법(regional iteration)을 이용하여 도파관 E평면 T접합 스텝에 대한 해석적인 해를 유도한다. 행렬대수[3]와 유수정리[5]를 사용하지 않고 유도된 해석적인 반복해를 이용하여 T접합 스텝 구조의 반사와 투과 특성을 계산할 수 있다.

II. 반복 그린 함수 방법

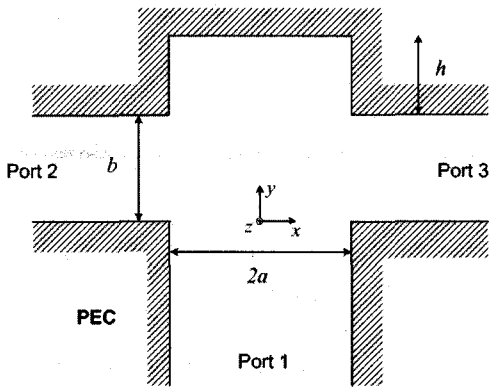


그림 1. 도파관 T접합 스텝의 구조

[그림 1]에서 E평면 T접합 스텝 구조에 TM 모드(Transverse Magnetic mode)가 입사한다고 가정한다. 시간 특성을 나타내는 항목은 $e^{-i\omega t}$ 이다. 영역 (I) ($-a < x < a, y < b + h$)과 영역 (II) ($-\infty < x < \infty, 0 < y < b$)에 입사하는 z방향

자기장(magnetic field) H_z 는 각각

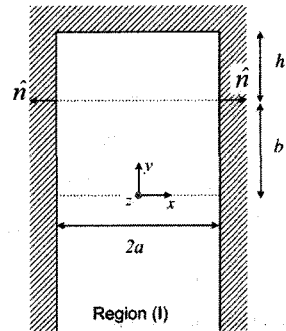
$$H_0^I(x,y) = A_I \cos a_s(x+a) [e^{i\eta_s y} + e^{i\eta_s(2b+2h-y)}] \quad (1)$$

$$H_0^{II}(x,y) = A_{II} \cos(b_s y) e^{i\xi_s(x+a)} \quad (2)$$

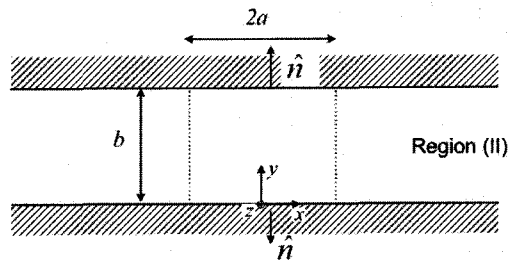
여기서 $a_s = s\pi/(2a), b_s = s\pi/b,$

$$\eta_s = \sqrt{k_0^2 - a_s^2}, \xi_s = \sqrt{k_0^2 - b_s^2},$$

$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. A_I, A_{II} 는 1번과 2번 포트(port)에 입사하는 H_z 의 크기를 각각 나타낸다. 영역 (I)과 (II)를 나누는 방법은 [그림 2]에서 보는 바와 같은 영역 반복법[6-9]이다. 식(1)은 입사파와 반사파가 동시에 존재하게 구성한다. 이는 $y = b + h$ 지점의 경계조건(boundary condition)을 해당 입사파에 대해 완전히 맞추기 위해 사용한다.



(a) 영역 (I)의 세부구조



(b) 영역 (II)의 세부구조

그림 2. 도파관 T접합의 세부구조

영역 반복법을 [그림 1] 구조에 적용하기 위하여 [그

림 1]의 구조를 [그림 2]와 같은 중첩 구조로 분해한다. 각각의 구조는 영역 (I)과 (II)가 된다. 영역 반복의 원리 관점으로 생각하기 위하여 입사파를 $H_0^I(x, y)$, $H_0^{II}(x, y)$ 라 표시한다. 그러면 반복적으로 $H_{n-1}^I(x, y)$ 가 $H_n^{II}(x, y)$ 를 생성하고 $H_n^{II}(x, y)$ 가 $H_n^I(x, y)$ 를 생성한다고 생각할 수 있다. 이 과정을 무한히 반복하면 자동으로 전기장과 자기장 경계조건을 만족시킬 수 있다. 즉, 영역 반복법을 적용하는 것은 전자파가 [그림 1]의 도파관 스텝 구조에 입사할 때 겪는 산란 현상을 물리적으로 그대로 따라가고 있는 것으로 생각할 수 있다. 이 과정을 이용해 영역 (I)과 영역 (II)의 자기장 H_z 를 표현하면

$$H_z^I(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^I(x, y) \quad (3)$$

$$H_z^{II}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{II}(x, y) \quad (4)$$

[10]에 제안된 그린 함수 관계식을 이용하면

$$\begin{aligned} H_n^{II}(x, y) &= \frac{1}{\mu_0} \overline{\nabla} \times \overline{A}(\overline{r}) \\ &= - \int H_{n-1}^I(\overline{r}') \frac{\partial}{\partial n} G_{II}(\overline{r}, \overline{r}') d\overline{r}' \end{aligned} \quad (5)$$

$$H_n^I(x, y) = - \int H_n^{II}(\overline{r}') \frac{\partial}{\partial n} G_I(\overline{r}, \overline{r}') d\overline{r}' \quad (6)$$

여기서 $\overline{A}(\overline{r})$ 는 자기 벡터 퍼텐셜(magnetic vector potential), $G_I(\overline{r}, \overline{r}')$, $G_{II}(\overline{r}, \overline{r}')$ 는 영역 (I)과 (II)의 2차원 그린 함수(two-dimensional Green's functions)를 각각 나타낸다. 그린 함수는 델타 함수 전원(delta function source: $\delta(\overline{r} - \overline{r}')$)이 주어진 구조에 전자파를 복사하는 경우 생성되는 영역 전자기장을 표현하는 수학적 함수이다. 그린 함수의 강점은 델타

함수의 장점으로 설명할 수 있다. 모든 유한 전원(finite source)은 델타 함수의 선형합(summation) 혹은 적분(integral)으로 표현할 수 있다. 전자기장 관점에서 살펴보면 모든 유한 전원에서 복사(radiation)되는 전자장은 그린 함수의 선형합 혹은 적분으로 표현할 수 있다. 즉, 주어진 기하 구조에 대한 그린 함수를 한 번 유도하면 주어진 그린 함수를 적분함으로써 모든 유한 전원에 대한 전자파 산란을 이끌어 낼 수 있다. 반복과정을 이용하면 식(5)와 (6)은

$$\begin{aligned} H_n^I(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos a_m(x+a) \\ &\times \left\{ [\text{sgn}(y)e^{i\eta_m|y|} + e^{i\eta_m(2b+2h-y)}] J_m^- - [\text{sgn}(y-b)e^{i\eta_m|y-b|} + e^{i\eta_m(b+2h-y)}] J_m^+ \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} H_n^{II}(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(b_my) \\ &\times [\text{sgn}(x+a) \\ &\times e^{i\xi_m|x+a|} J_m^- - \text{sgn}(x-a) \\ &\times e^{i\xi_m|x-a|} J_m^+] \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\text{sgn}(\cdot) = 2u(\cdot) - 1$, $u(\cdot)$ 는 단위 계단 함수(unit step function),

$$\begin{aligned} G_I(r, r') &= \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos a_m(x+a)}{\alpha_m} \\ &\times \cos a_m(x'+a) \\ &\times \frac{e^{-i\eta_m y} \sin \eta_m(y > -b-h)}{-\eta_m e^{-i\eta_m(b+h)}} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} G_{II}(r, r') &= \frac{2}{b} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(b_my) \cos(b_my')}{\alpha_m} \\ &\times \frac{e^{i\xi_m|x-x'|}}{-2i\xi_m} \end{aligned} \quad (10)$$

그런 함수 표현식 (9)와 (10)을 직접 (5)와 (6)에 제시된 방법으로 적분하면

$$\begin{aligned}
 I_m^{\pm n} &= \frac{-1}{2a\alpha_m} \int_{-a}^a H_n^{II}(x', \frac{b}{2} \pm \frac{b}{2}) \\
 &\quad \times \cos a_m(x' + a) dx' \\
 &= \frac{-1}{2a\alpha_m} \sum_{v=0}^{\infty} (\mp 1)^v e^{i\xi_v a} [G_m(\xi_v) J_v^{-n} \\
 &\quad + G_m(-\xi_v) J_v^{+n}]
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 J_m^{\pm n} &= \frac{-1}{b\alpha_m} \int_0^b \cos(b_m y') \\
 &\quad \times H_{n-1}^I(\pm a, y') dy' \\
 &= \frac{-1}{b\alpha_m} \sum_{v=0}^{\infty} (\mp 1)^v e^{i\eta_v \frac{b}{2}} \\
 &\quad \times \{ [G_m(\eta_v) + e^{i\eta_v(b+2h)}] \\
 &\quad \times G_m(-\eta_v) \} I_v^{-(n-1)} \\
 &\quad + [G_m(-\eta_v) - e^{i2\eta_v h}] \\
 &\quad \times G_m(-\eta_v) \} I_v^{+(n-1)}
 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서

$$G_m(\xi) = \frac{i\xi [e^{-i\xi a} - (-1)^m e^{i\xi a}]}{\xi^2 - a_m^2} \tag{13}$$

$$G_m(\eta) = \frac{i\eta [e^{-i\eta b/2} - (-1)^m e^{i\eta b/2}]}{\eta^2 - b_m^2} \tag{14}$$

무한합(infinite summation)을

$$I_m^{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} J_m^{\pm n} \tag{15}$$

$$J_m^{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} J_m^{\pm n} \tag{16}$$

으로 정의하여 식 (3)과 (4)를 표현하면

$$\begin{aligned}
 H_z^I(x, y) &= H_0^I(x, y) + \sum_{m=0}^{\infty} \cos a_m(x + a) \\
 &\quad \times \{ [\text{sgn}(y) e^{i\eta_m |y|} + e^{i\eta_m(2b+2h-y)}] I_m^- \\
 &\quad - [\text{sgn}(y-b) e^{i\eta_m |y-b|} \\
 &\quad + e^{i\eta_m(b+2h-y)}] I_m^+ \}
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 H_z^{II}(x, y) &= H_0^{II}(x, y) + \sum_{m=0}^{\infty} \cos(b_m y) \\
 &\quad \times [\text{sgn}(x+a) \\
 &\quad \times e^{i\xi_m |x+a|} J_m^- - \text{sgn}(x-a) \\
 &\quad \times e^{i\xi_m |x-a|} J_m^+]
 \end{aligned} \tag{18}$$

IGFM으로 얻어지는 반복 표현식은 식 (11)과 (12)이다. 제시된 수식은 기초적인 사칙연산만 있으면 계산이 되므로 매우 간소하다. 반복식 (11)과 (12)를 통해 얻어지는 모드 계수(modal coefficients)는 식 (17)과 (18)을 이용해 영역 (I)과 (II)의 자기장을 표현할 수 있다.

도파관 해석에 사용되는 반사 전력을 정의하자. 영역 (I)과 (II)에 입사하는 전력은

$$P_i^{(1)} = \frac{a\alpha_s \eta_s}{2\omega\epsilon_0} |A_I|^2 \tag{19}$$

$$P_i^{(2)} = \frac{b\alpha_s \xi_s}{4\omega\epsilon_0} |A_{II}|^2 \tag{20}$$

1,2,3번 포트에 반사되는 전력은

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_{-a}^a E_x(x, y) H_z^*(x, y) dx \right] \\
 &= \frac{a}{2\omega\epsilon_0} \sum_{m=0}^{M_1} \alpha_m \eta_m | [1 - e^{i\eta_m(2b+2h)}] I_m^- \\
 &\quad - [e^{i\eta_m b} - e^{i\eta_m(b+2h)}] I_m^+ \\
 &\quad - A e^{i\eta_s(2b+2h)} \delta_{ms} |^2
 \end{aligned} \tag{21}$$

(21)

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[- \int_0^b E_y(x, y) H_z^*(x, y) dy \right] \\
 &= \frac{b}{4\omega\epsilon_0} \sum_{m=0}^{M_2} \alpha_m \xi_m |e^{i\xi_m a} J_m^+ - e^{-i\xi_m a} J_m^-|^2
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 P_3 &= \frac{b}{4\omega\epsilon_0} \sum_{m=0}^{M_2} \alpha_m \xi_m |e^{-i\xi_m a} J_m^+ \\
 &\quad - e^{i\xi_m a} (J_m^- + A_{II} \delta_{ms})|^2
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

여기서 $M_1 = [2ak_0/\pi]$, $M_2 = [bk_0/\pi]$.

III. 수치 해석

제시된 반복 표현식의 명확성을 확인하기 위해 [6]의 식 (17)-(19)를 비교하였다. [6]의 구조는 $h = 0$ 에 해당하므로 본 논문의 식(21)-(23)에 있는 h 를 0으로 보내는 극한(limit)을 취하면 [6]의 식(17)-(19)에 수렴함을 확인하였다.

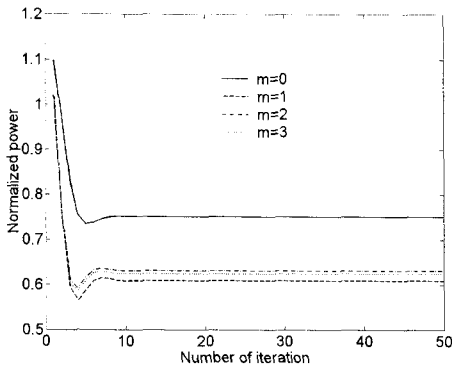
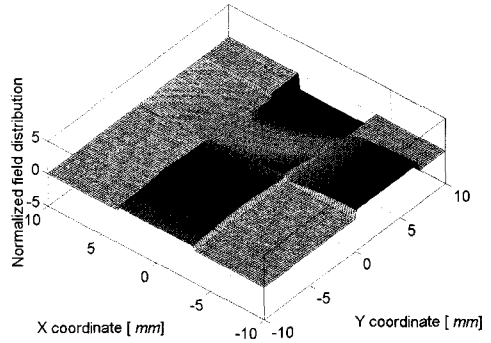


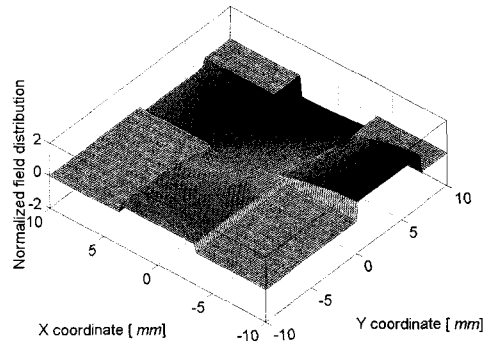
그림 3. IGFM의 수렴 특성($a = h = 3.5\text{mm}$, $b = 7\text{mm}$, $f = 10\text{GHz}$, $A_I = 0$, $A_{II} = 1$)

[그림 3]은 본 논문에서 제안하는 IGFM의 수렴 특성을 보여준다. $n \geq 30$ 가 만족하도록 반복 계산을 수행하면 한 값으로 수렴함을 볼 수 있다. 또한 $m \geq 1$ 가 되면 고차 모드(higher modes)의 수렴 값에 정확히 수

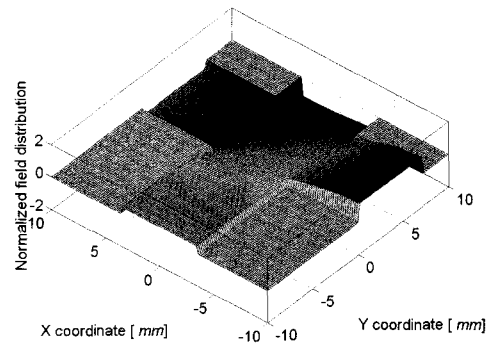
렴함을 볼 수 있다.



(a) $m = 0$



(b) $m = 2$



(c) $m = 4$

그림 4. 도파관 스텝 구조의 자기장 분포 ($a = h = 3.5\text{mm}$, $b = 7\text{mm}$, $f = 10\text{GHz}$, $n = 30$, $A_I = 1$, $A_{II} = i$)

[그림 4]는 IGFM의 자기장이 영역 중첩으로 인해 불

연속이 일어나는 $(-a < x < a, y = 0)$ 와 $(x = \pm a, 0 < y < b)$ 에서 연속이 됨을 보여준다.

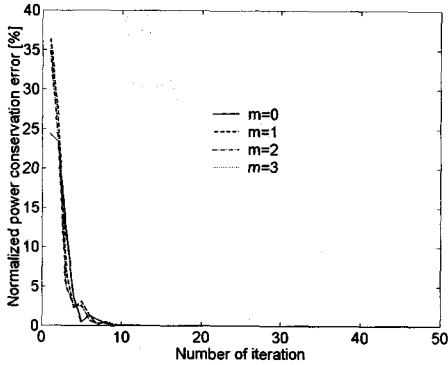


그림 5. IGFM의 전력 보존 특성($a = h = 3.5mm$, $b = 7mm$, $f = 10GHz$, $A_I = 0$, $A_{II} = 1$)

[그림 5]는 도파관을 해석할 때 기본적으로 확인하는 각 포트별 반사 전력의 보존(power conservation) 특성을 표시한 것이다. 초기 반복이 일어나는 $n \leq 10$ 인 영역에서는 전력 보존이 잘 되지 않지만 $n > 10$ 이 되면 반사 전력이 잘 보존됨을 볼 수 있다.

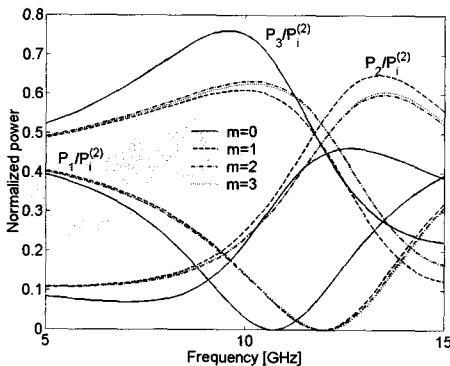


그림 6. 도파관 스텝 구조의 전자파 산란 특성 ($a = h = 3.5mm$, $b = 7mm$, $n = 300$, $A_I = 0$, $A_{II} = 1$)

[그림 6]은 [그림 1]의 해석구조에서 2번 포트에 전자파가 입사한 경우의 각 포트별 산란 특성을 나타낸다. $m \geq 1$ 이상이면 고차 모드 산란해와 거의 동일한 결

과를 얻을 수 있음을 볼 수 있다. $h = 0$ 를 계산한 결과인 [6]의 [그림 4]와 $h \neq 0$ 인 [그림 6]을 비교하면 1번 포트에 가는 전자파가 완전히 대역 차단(band stop)되는 특성이 $h \neq 0$ 인 경우 존재함을 확인할 수 있다.

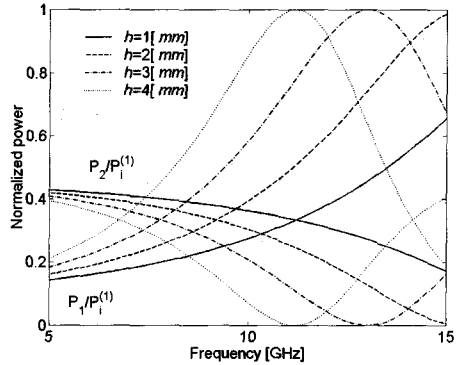


그림 7. 도파관 스텝 구조의 전자파 산란 특성 ($a = 3.5mm$, $b = 7mm$, $m = 3$, $A_I = 1$, $A_{II} = 0$)

[그림 7]은 1번 포트에 전자파가 입사한 경우의 반사 특성을 보여준다. [그림 1]에 제시된 것처럼 기하 구조가 좌우 대칭이므로 3번 포트 반사 전력은 표시하지 않았다. 스텝의 길이 h 를 가변하면 2번 포트에 투과하는 전력이 대역 차단(band stop)되는 주파수가 변함을 알 수 있다.

[그림 6][그림 7]을 고려하면 도파관 접합에 스텝을 삽입하여 특정 주파수 대역의 전자파를 대역 차단할 수 있다. 이때 대역 차단주파수는 스텝의 높이인 h 를 가변하여 조절할 수 있으며 대역 차단이 되는 대역폭은 h 에 관계없이 거의 고정이다.

IV. 결론

반복 그린 함수 방법(IGFM)을 도파관 스텝 구조에 적용하여 간단한 반복 산란식을 얻고 수치해석을 수행하였다. 최종 반복 산란식은 기초적인 사칙연산만 있고 다른 복잡한 수학 연산이 없으므로 수치 효율이 매우

좋다. 향후에는 제시된 접근법을 TE 모드에 적용하여 H평면 T접합 구조를 해석할 수 있을 것이다.

참고문헌

- [1] F. Arndt, I. Ahrens, U. Papziner, U. Wiechmann, and R. Wilkeit, "Optimized E-plane T-junction series power dividers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.35, No.11, pp.1052-1059, Nov. 1987.
- [2] J. M. Rebollar, J. Esteban, and J. E. Page, "Fullwave analysis of three and four-port rectangular waveguide junctions," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.42, No.2, pp.256-263, Feb. 1994.
- [3] T. Sieverding, U. Papziner, and F. Arndt, "Mode-matching CAD of rectangular or circular multiaperture narrow-wall coupler," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.45, No.7, pp.1034-1040, July 1997.
- [4] P. Lampariello and A. A. Oliner, "New equivalent networks with simple closed-form expressions for open and slit-coupled E-plane tee junctions," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.41, No.5, pp.839-847, May 1993.
- [5] K. H. Park, H. J. Eom, and Y. Yamaguchi, "An analytic series solution for E-plane T-junction in parallel-plate waveguide," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.42, No.2, pp.356-358, Feb. 1994.
- [6] Y. H. Cho, "New iterative equations for an E-plane T-junction in a parallel-plate waveguide using Green's function," *Microwave Optical Tech. Lett.*, Vol.37, No.6, pp.447-449, June 2003.
- [7] Y. H. Cho, "Iterative Green's function analysis of an H-plane T-junction in a parallel-plate waveguide," *J. Electromag. Waves Applicat.*, Vol.18, No.9, pp.1195-1202, Sept. 2004.
- [8] 조용희, "전파 교육에 적용할 수 있는 반복 그린 함수 방법을 이용한 전자파 도파관 구조의 새로운 해석법", 한국콘텐츠학회 2003 춘계 종합학술대회 논문집, 제1권, 제1호, pp.403-405, 2003(5).
- [9] 조용희, "반복 그린함수 방법을 이용한 평행도파관 H평면 T접합의 전자파 해석", 한국콘텐츠학회 2003 추계 종합학술대회 논문집, 제1권, 제2호, pp.249-252, 2003(11).
- [10] Y. H. Cho and H. J. Eom, "Analysis of a ridge waveguide using overlapping T-blocks," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.50, No.10, pp.2368-2373, Oct. 2002.

저자 소개

조 용 희(Yong-Heui Cho)

중신회원



- 1998년 2월 : 경북대학교 전자공학과 (공학사)
- 2000년 2월 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 (공학석사)
- 2002년 8월 : 한국과학기술원 전자전산학과 전기및전자공학전공 (공학박사)
- 2002년 4월 ~ 현재 : 한국전자통신연구원(ETRI) 무선방송연구소 위촉·선임·초빙연구원
- 2003년 3월 ~ 현재 : 목원대학교 정보통신공학과 조교수

<관심분야> : 안테나, 초고주파, 전자파 산란 및 분산