

생산라인의 병목공정에서 배치크기 결정 모형

구평희[†] · 고시근

부경대학교 시스템경영공학과

A Batch Sizing Model at a Bottleneck Machine in Production Systems

Pyung-Hoi Koo · Shie-Gheun Koh

Department of Systems Management and Engineering, Pukyong National University, Busan 608-739

All of the machines in a production line can be classified into bottleneck and non-bottleneck machines. A bottleneck is a resource whose capacity limits the throughput of the whole production facility. This paper addresses a batch sizing problem at the bottleneck machine. Traditionally, most batch sizing decisions have been made based on the EOQ (economic order quantity) model where setup and inventory costs are considered while throughput rate is assumed to be given. However, since batch size affects the capacity of the bottleneck machine, the throughput rate may not be constant. As the batch size increases, the frequency of the setup decreases. The saved setup time can be transferred to processing time, which results in higher throughput. But, the larger batch size may also result in longer lead time and larger WIP inventory level. This paper presents an alternative method to determine batch size at the bottleneck machine in a manufacturing line. A linear search algorithm is introduced to find optimal throughput rate and batch size at the same time. Numerical examples are provided to see how the proposed method works and to investigate the effects of some parameters.

Keywords: Batch Sizing, Bottleneck Machine, Lead Time, Throughput, Theory of Constraints

1. 서론

생산라인을 구성하는 각 기계는 병목기계와 비병목기계로 구분할 수 있다. 병목기계란 라인 내의 기계 중에서 가장 생산능력이 적어 라인 전체의 생산량을 제한하는 기계이고 비병목기계는 병목기계 이외의 기계를 말한다. 생산라인에서 사용되는 가장 일반적인 평가 지표는 '단위시간당 생산량' (본 논문에서는 '생산량'이라 칭한다)을 들 수 있다. 따라서 시스템의 생산량을 결정하는 병목기계에서는 가급적 가용한 모든 시간이 제품을 생산하는데 사용되어야 한다. 기계의 상태는 생산 셋업(setup), 유희 등 세 가지로 구분될 수 있다(Srikanth and Umble, 1997). 이 중 생산만이 부가가치를 창출하는 상태이고 셋업이나 유희 상태는 부가가치 창출에 기여하지 못한다. 병

목기계에서는 작업량이 많으므로 유희상태가 발생할 확률이 적다. 따라서 셋업을 위한 시간을 생산 작업으로 변환하여 생산량을 증대 시키는 것이 중요하다. 셋업시간을 줄이기 위해서는 QDC(quick die change)와 같이 셋업시간 자체를 줄이는 방법과, 셋업 횟수를 줄이는 방법이 있다. 이 중 셋업 횟수를 줄여 생산능력을 증대시키기 위해서 한 종류의 제품을 연속적으로 생산하는 배치생산(batch production)이 산업현장에 많이 도입되고 있다. 배치생산에서는 배치의 크기를 결정하는 것이 중요한 의사결정 사항이다. 배치크기가 커지면 라인체인지를 위한 셋업 횟수가 줄어들고 이는 생산량의 증가로 이어지는 장점이 있으나, 제품이 시스템에 투입된 후 완성되어 시스템을 나가기까지의 시간인 리드타임(lead time)은 증가된다는 단점이 있다. 리드타임은 납기준수, 품질, 수율, 안전재고, 오류

이 논문은 2004년도 부경대학교 연구년 교수지원에 의하여 연구되었음

[†] 연락저자 : 구평희, 608-739 부산시 남구 용당동 산100 부경대학교 시스템경영공학과, Fax : 051-620-1546,

E-mail : phkoo@pknu.ac.kr

2006년 08월 접수; 2006년 11월 수정본 접수; 2006년 11월 게재 확정.

에 대한 대응성, 계획의 정확성, 마케팅 등 여러 부문에 영향을 끼치므로, 현대 산업에서 중요한 경쟁력 요소이다. 본 논문에서는 배치크기를 결정하는 경우 병목기계와 비병목기계에서 고려해야 할 사항을 논하고, 병목공정에서 생산량과 리드타임을 동시에 고려하여 배치크기를 결정하는 절차를 소개한다.

일반적으로 사용되는 배치크기 결정 방법은 EOQ(economic order quantity) 모형을 기반으로 하고 있다. EOQ 기반의 배치크기 결정모형은 셋업 비용과 재고유지 비용의 합으로 이루어진 총 비용을 최소화 하는 것이 목적이다. 그러나 이러한 접근법은 생산라인에서의 배치크기를 결정하는데 몇 가지 결함이 있다. 우선 EOQ 모형은 주로 재고 비용을 완제품 재고를 대상으로 하고 있다. 생산라인에서는 완성품 보다는 재공품재고(WIP, work-in-process)가 중요한 비용 요소이다. 특히 병목기계에서는 대기하고 있는 WIP와 이에 따른 리드타임이 병목기계를 통과한 제품보다 더욱 중요한 역할을 한다. 둘째로, EOQ 기반의 배치크기결정모형에서는 재고만을 강조하고 리드타임의 비용에 대해서는 고려하지 않는다. 그러나, Srikanth and Umble(1997)이 지적하였듯이 리드타임과 관련된 비용과 비교하면 재고유지비용은 미미하므로 리드타임은 배치크기 결정에서 중요한 요소로 여겨져야 한다. 셋째로, EOQ 기반 모형에서는 생산량(주문량)이 주어진 상태에서 배치크기를 결정한다. 그러나 생산라인에서는(특히 병목공정에서는) 배치의 크기에 따라 생산량이 변경된다. 즉, 배치의 크기가 커지면 셋업 시간이 줄어들고 이는 생산량의 증가로 이어질 수 있다. 마지막으로, EOQ 모형은 비용의 최소화를 강조한다. 그러나 기업의 목표는 이익을 지속적으로 창출하는 것이다. 따라서 배치크기도 기업의 목표에 따라 결정되어야 한다. 위에서 설명한 여러 가지 EOQ 기반 배치크기모형의 비합리성을 인식하여 본 논문에서는 병목공정에서 리드타임과 생산량을 고려하여 배치 크기를 결정하는 새로운 방법을 제시하고자 한다.

2. 관련연구

앞에서 설명하였듯이 일반적으로 배치크기 결정 방법은 EOQ를 기반으로 하고 있으나, 셋업비용과 재고비용으로 구성된 총비용을 최소화 하는 EOQ 모형은 생산라인에서의 배치크기를 결정하는 문제에서는 적용하기에 불합리한 점이 있다. Karmarkar(1987)와 Srikanth and Umble(1997)이 지적하였듯이 셋업과 관련된 비용은 고정되어 있는 것이 아니라 변동적이고, 리드타임과 관련된 비용은 재고관련 비용보다 상대적으로 크다. 리드타임은 주로 대기시간에 의해 결정되므로 대기시스템을 이용하여 생산시스템을 분석하는 연구가 다양한 접근법으로 수행되어 왔다(Solberg, 1980; Shanthickumar and Buzacot, 1981, Whitt, 1984). 리드타임을 고려하여 배치크기를 결정하는 문제는 Karmarkar(1987)에 의해 본격적으로 논의되었다. 그는 배치크기, 리드타임, WIP 재고 사이의 연관성에 대하여 조

사하고, 배치크기를 결정하는 과정에서 리드타임의 중요성을 강조하였다. 또한, 기계의 부하율이 높을 경우 완제품 재고보다 WIP 재고에 기인한 비용이 상대적으로 크다고 주장하고 적정 배치크기는 EOQ 기반의 모델에서 얻어진 배치크기와 상당한 차이가 있다는 것을 보여주었다. Karmarker *et al.*(1992)은 다품종을 생산하는 환경에서 대기시간 최소화를 목적으로 하는 배치크기 결정 모형과 휴리스틱을 제시하였다. Benjaafar(1996)는 생산시스템에서 배치를 생산배치와 운반배치로 구분하고 최적의 운반배치크기를 결정하는 모형을 제시하였다. Tielemans and Kuik(1996)은 단일제품 생산시스템에서 리드타임을 최소화 하는 최적의 배치크기모형을 제시하였다. 배치생산인 경우 제품의 도착 분포가 지수(Exponential) 분포보다는 얼랑(Erlang)분포가 더욱 적합하다고 주장하고, 실험을 통하여 얼랑분포와 지수분포를 따르는 경우 결과의 차이를 보여주었다. Kuik and Tielemans(1998)는 다품종을 생산하는 단일기계의 경우에 대기이론을 이용하여 대기시간을 최소화 하는 배치크기모형을 제시하였다. 이후에 동 연구자들은 배치크기와 리드타임의 변동성과의 관계를 조사하고(Kuik and Tielemans, 1999), 또한 기계의 부하율이 낮은 경우에 리드타임을 고려한 배치크기 결정모형을 소개하였다(Kuik and Tielemans, 2004). Meng(2004)은 Whitt(1983)가 개발한 QNA(queueing network analyzer)를 기반으로 다품종을 생산하는 생산시스템에서 배치크기를 결정하는 모형을 제시하였다. Kenyon *et al.*(2005)은 배치크기가 리드타임과 생산량, 그리고 기업의 이익에 어떤 영향을 주는지 시뮬레이션을 통하여 분석하였다.

이상에서 살펴본 기존의 대부분의 논문은 생산량이 주어진 상태에서 WIP 재고와 리드타임과 관련된 비용을 평가지표로 사용하여 배치크기를 결정하고 있다. 생산량이 일정하다면 비용의 최소화는 곧 이익의 최대화를 의미한다. 그러나 배치크기가 생산량에 영향을 주어 생산량이 변한다면 비용만으로는 이익을 설명할 수 없고, 생산량도 함께 고려해야 한다. 병목기계에서는 배치크기에 따라 생산량이 변하고 이는 곧 시스템 전체 생산량의 변화로 이어진다. 따라서, 배치크기는 리드타임과 WIP재고와 관련된 비용요소와 생산량과 관련된 수익요소를 모두 고려하여 결정되어야 한다.

Goldratt(1984)에 의해 소개된 TOC(제약이론)는 병목기계에서는 배치의 크기를 가급적 크게 해야 한다고 주장하고 있다. 그러나 얼마나 크게 해야 하는지에 대한 해답은 주지 않고 있다. 본 논문에서는 저자들이 전자부품을 생산하는 기업체의 생산라인에 TOC를 적용하기 위한 프로젝트를 수행하면서 병목공정에서 배치크기 결정에 대한 적절한 모형이 필요하여 수행한 연구 결과를 소개한다. 생산라인의 병목기계를 대상으로 하여 생산량과 리드타임 두 가지 요소에 대하여 수리모형을 소개하고 이를 종합한 새로운 목적식을 제시한다. 문제를 해결하기 위하여 배치크기결정 알고리즘을 개발하고 수치예제를 통하여 제시된 알고리즘이 어떻게 적용될 수 있는지 보인다. 또한, 배치크기를 결정할 때 고려해야 할 사항들, 예를 들

어 셋업시간의 중요성, 리드타임 비용의 영향, 이익에 대한 배치 크기의 민감도 등을 논한다

3. 배치 크기를 결정하는 모형

배치 크기 결정 모형에 대한 설명에 앞서 논문의 기반이 되는 대상 시스템에 대해 간단히 소개한다. 대상 생산시스템은 반도체와 보드를 연결하는 기판을 생산하는 라인이다. 고객이 제품을 주문하면 영업부와 생산부문이 협의하여 납기를 결정하고 일정계획을 수립하여 투입 일정을 결정하는 주문생산 형태의 생산 환경을 가지고 있다. 제품은 로트단위로 생산되고 관리된다. 대상 생산 시스템에서는 많은 종류의 제품을 생산하고 있으나, 제품별 생산량, 제품의 특성 및 가공 순서를 고려하여 10가지 내외의 제품군으로 그룹핑하여 관리한다. 제품의 원재료인 동박막판(copper clad laminate)이 생산시스템에 투입되면 약 40가지의 주요 생산 공정을 거쳐 기판으로 완성된다. 각 제품은 상이한 생산 경로를 거치면서 생산된다. TOC의 VAT 흐름분석 방법에 따르면 대상 라인은 하나의 원재료에서 여러 가지의 제품이 생산된다는 점에서 V형의 라인으로 분류할 수 있다. 이러한 생산라인에서는 과다한 재공품재고인 리드타임, 납기 미준수, 수요변동에 대한 적응능력 미비 등의 문제점이 있고, 따라서 이러한 문제를 해결하는 것이 중요하다(Umble and Srikanth, 1993). <Figure 1>은 위에서 설명한 시스템을 제품 흐름 측면에서 일반화시켜 그림으로 나타낸 것이다. 대상 시스템은 제품별로 생산장비를 배치한 flow line 형태이지만, job shop 형태에서 여러 제품이 생산되고 병목공정을 통해 흐르는 생산형태에서도 적용될 수 있다. <Figure 1>에서 여러 종류의 제품이 각각의 공정경로를 따라 병목공정(BM: bottleneck machine)에 도달하고 가공 받은 후 남아있는 공정을 거쳐 생산이 종료된다. 일부의 제품은 이미 지나간 공정에 다시 돌아와 두 번 이상 동일한 공정을 거친다(re-entrant). 제품별로 병목공정에서의 처리 조건이 다르기 때문에 제품이 변경될 때에는 셋업 작업이 필요하다. 병목공정에서 모든 제품의 셋업시간과 배치 크기는 동일하다고 가정한다

본 논문에서는 이러한 시스템에서 병목공정에서의 배치 크기를 얼마나 크게 할 것인가를 결정하는 문제를 다룬다. 시스템 전체의 생산량은 병목공정에 의해 결정되므로 위와 같은 상

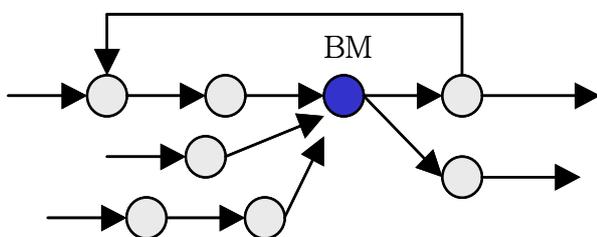


Figure 1. Production flow in the manufacturing system under consideration

황에서는 셋업 빈도에 의해 생산량이 결정된다. 배치 크기를 크게 하면 셋업 빈도가 줄어들어 셋업에 의한 병목공정의 시간손실이 줄어든다. 이는 시스템의 생산량 증대로 이어진다. 그러나 배치 크기는 리드타임에도 영향을 주어, 배치가 커지면 리드타임이 증가하게 되어 계획하는 납기를 어기는 경우가 발생할 수 있다. 따라서 이 두 생산성 평가 지표에 대한 trade-off가 필요하다. 본 절에서는 배치 크기가 리드타임과 생산량에 주는 영향에 대해 논하고, 배치 크기를 결정하기 위한 새로운 절차를 제시한다.

3.1 리드타임과 생산량에 대한 배치 크기의 영향

우선 배치 크기가 리드타임과 생산량에 주는 영향을 알아본다. 본 논문에서는 여러 종류의 제품이 하나의 생산시스템에서 생산되고, 병목공정에서도 여러 종류의 제품을 생산하는 시스템을 대상으로 한다. 병목공정에서의 셋업시간은 모든 제품에 대해 동일하고, 각 제품의 배치 크기도 동일하다고 가정한다. 반도체나 전자부품 등의 생산시스템에서 화학적 처리 공정에서 각 제품마다 처리조건을 바꾸어 생산하는 경우가 이러한 가정을 만족시키는 대표적인 예이다. 이와 같은 가정 하에서는 다제품을 생산하는 생산시스템에서도 배치 크기의 결정 측면에서는 단일제품으로 취급하여 문제를 단순화시킬 수 있다. 대상 시스템에서 제품은 기계에 배치단위로 도착하고 서비스를 위해 대기한다. 기계는 선입선출법에 의해 제품을 가공한다. 단위시간당 도착하는 배치수를 λ 라고 배치 크기를 b 라 하면 생산량 x 는 $x = b\lambda$ 로 나타낼 수 있다. 각 제품의 개당 생산시간은 p , 셋업시간은 s 라고 하면 셋업시간을 포함한 배치의 생산시간 τ 는 배치내의 모든 제품의 생산시간과 셋업시간의 합인 $\tau = bp + s$ 로 표현된다. 기계부하율 ρ 는 배치의 도착량과 생산시간의 곱으로 표현할 수 있으므로 아래의 식에 의해 계산된다.

$$\rho = \lambda\tau = xp + \frac{xs}{b} \tag{1}$$

여기서 xp 는 제품의 생산작업(예: 가공, 조립, 검사 등)에 대응하는 부하율(생산부하율)이고, xs/b 는 셋업작업에 대응하는 부하율(셋업부하율)이다. 위의 식(1)에서 배치 크기가 커지면 기계부하율은 작아진다는 것을 알 수 있다. 시스템이 안정화되기 위해서는 기계부하율은 1보다 작아야 하므로 생산량 x 가 주어지면 배치 크기의 하한값(lower bound)은 $xs/(1-xp)$ 이다. 제품(배치)의 도착간격과 서비스시간($1/\mu$)이 지수분포를 따른다고 가정하면, 평균 리드타임 T 는 대기이론에 의해 아래의 식에 의해 계산된다.

$$T = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{s + bp}{1 - xp - xs/b} \tag{2}$$

위에서 제품의 도착간격과 서비스 시간은 문제를 단순화 시

켜 본 논문의 주제인 배치크기 결정 문제에 초점을 맞추기 위해 지수분포를 따른다고 가정하였다. 제품의 도착과 서비스시간이 지수분포가 아닌 다른 일반적인 확률분포를 따르는 경우에는 Whitt(1883)가 제시한 일반 분포인 경우의 대기시간 근사치 식을 이용하여 평균리드타임을 구할 수 있다.

리드타임은 제품이 기계에 도착하였으나 기계가 먼저 도착한 다른 제품을 생산하기 때문에 발생하는 대기시간과 차례가 되어 기계에서 생산될 때 생산서비스 받는 시간의 합으로 이루어진다. 즉, $T = \text{대기시간} + \text{생산시간}$. <Figure 2>는 배치의 크기에 따른 리드타임의 변화를 보여주고 있다. 그림에서 배치의 크기가 하한선에서부터 시작하여 증가하면 리드타임은 급속히 감소하다가 어느 정도의 배치 크기 이상이 되면 리드타임이 증가하는 것을 볼 수 있다. 배치사이즈가 아주 작은 경우에는 식 (1)과 식(2)에서 알 수 있듯이 기계의 부하율이 높아져 대기시간이 크기 때문에 리드타임이 커지고 배치크기가 일정크기 이상이 되면 셋업횟수의 감소로 인하여 기계부하율이 줄어들기 때문에 대기시간은 줄어들지만 배치를 생산하는 시간이 증가하여 리드타임이 길어진다.

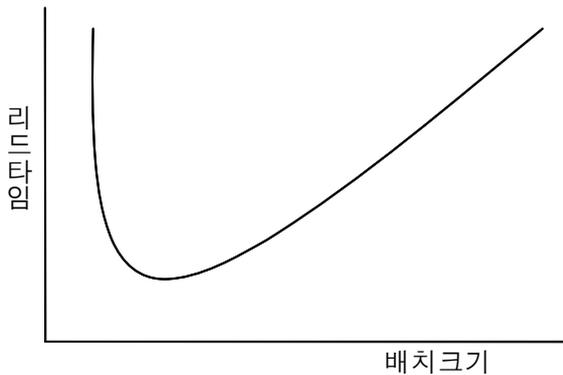


Figure 2. Impact of batch size on lead time

위의 식에서 리드타임 T 는 배치크기 b 에 대하여 볼록(convex) 함수이므로 1차 도함수에 의하여 최소의 리드타임 T^* 를 얻을 수 있는 최적의 배치크기 b^* 를 구할 수 있다.

$$b^* = \frac{xs(1 + \sqrt{1/xp})}{(1 - xp)} \quad (3)$$

$$T^* = \frac{s(1 + \sqrt{xp})^2}{(1 - xp)^2} \quad (4)$$

배치의 크기는 리드타임 뿐 아니라 생산능력에도 영향을 준다. 배치크기가 증가하면 셋업횟수가 줄어들고, 줄어든 셋업작업 시간을 생산시간으로 활용하면 생산량을 증가시킬 수 있다. 최대생산능력은 부하율이 1인 경우 달성되므로 식(1)로부터 최대 생산량 c 는 $c = b/(bp + s)$ 이다. <Figure 3>은 배치크기와 생산능력과의 관계를 보여주고 있다. 생산능력만을 본다면 최대의 생산량을 얻기 위해서는 배치크기를 가급적 크게 해야 한다. 그러나, 그림에서 배치크기가 증가하면 처음에는 생산

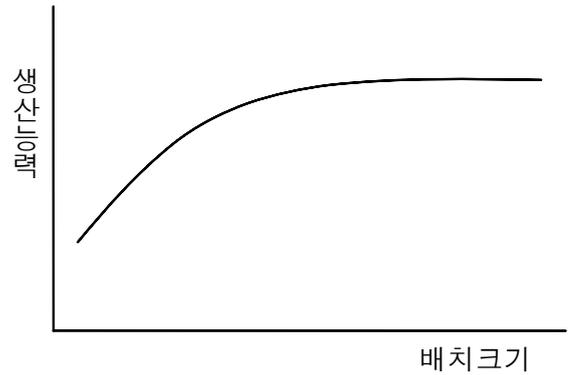


Figure 3. Impact of batch size on production capacity

량이 급격히 증가하다가 어느 정도 이상이 되면 생산능력이 거의 증가하지 않는다는 것을 알 수 있다.

3.2 배치크기 결정시의 고려사항

생산라인에서 제품을 생산하는 기계는 병목기계와 비병목기계로 구분할 수 있다. 병목공정은 생산라인의 생산량을 결정하고 생산성에 가장 큰 영향을 준다는 점에서 특별한 주의를 가지고 관리되어야 한다. 비 병목공정은 여유로운 생산능력을 보유하므로 배치를 작게 하여 셋업시간을 늘려도 라인의 운영에 문제가 발생하지 않을 수 있다. 만일 비병목공정에서 배치크기를 크게 하여 셋업시간을 절약하게 된다면 이 절약된 셋업시간은 생산적으로 사용되지 못하고 유휴시간만을 증가시키는 결과가 된다. 또한, <Figure 2>에서 보는 바와 같이 배치크기가 커지면 리드타임이 증가하여 제품의 원활한 흐름을 방해하므로 비병목기계에서는 배치의 크기를 가급적 작게 할 필요가 있다. 그러나 비병목공정에서도 배치크기를 극도로 작게 하면 생산 가능량이 생산목표보다 적을 수 있으므로 <Figure 4>에서와 같이 배치크기의 하한값이 존재하는 경우도 있다.

비병목공정에서의 생산량은 자체의 생산능력이 아니라 병목공정을 고려하여 얻은 라인의 생산계획에 의해 정해진다. 생산량이 주어진 상태에서는 배치크기는 가장 빠르게 제품을

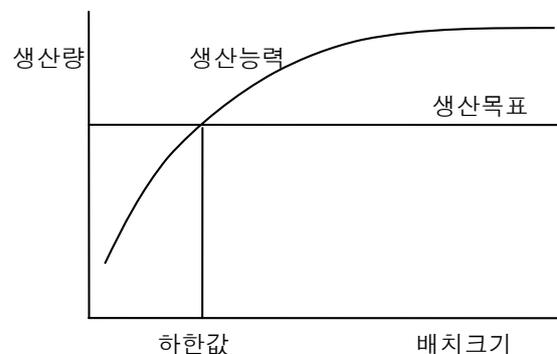


Figure 4. Batch size and its lower bound at non-bottleneck machine

흘러보낼 수 있도록 결정하는 것이 합리적이다. 최근에 관심을 끌고 있는 TOC(Theory of Constraints)에서의 관리 절차는 우선 병목공정을 찾아내어 이를 최대한 활용할 수 있는 방안을 찾아내고, 비병목공정은 병목공정이 최대한 활용될 수 있도록 병목공정을 중심으로 의사결정을 한다. 시스템에 제품을 투입할 때 병목공정의 능력이 맞추어 투입하고, 비병목공정은 제품이 도착하면 가능하면 빠르게 생산하여 병목공정에 제품을 전달해 준다. 병목공정에서 작업이 완료된 제품들은 다시 비병목공정을 거쳐 시스템을 흐르게 되는데 이때도 마찬가지로 빠르게 시스템을 빠져나가게 하는 것이 관리의 핵심이다. 따라서 비병목공정에서는 주어진 생산량을 고려하여 리드타임을 최소화 하는 식 (3)을 이용하여 배치크기를 결정하는 것이 타당하다.

반면에, 병목공정의 생산능력은 생산라인 전체의 생산량을 결정하므로, 비병목공정과 다르게 생산량이 주어지는 것이 아니라 결정해야 할 사항이다. 현재 일반적으로 총 수익이 극대화 될 수 있도록 목표 생산량을 결정하고, 배치크기 등의 부수적인 결정 사항은 주어진 생산량을 가지고 하위 단계에서 다루어진다. 이때, 병목공정이 시스템의 생산량을 결정하기 때문에 목표 생산량을 결정할 때는 병목공정의 생산능력을 고려한다. 그러나 병목공정의 생산 능력은 고정된 것이 아니라 <Figure 3>에서 보듯이 배치크기 등 하위 의사결정의 결과에 따라서 변한다. 생산량을 증가시키기 위하여 병목공정에서의 모든 가용한 시간은 생산에 활용되는 것이 필요하다 따라서 병목공정에서는 배치크기를 가급적 크게 하여 셋업시간을 줄이고 여기서 얻어진 추가적인 시간은 생산에 투입하여 생산량을 증대 시키는 것이 요구된다. 그러나 <Figure 3>에서 보는 것과 같이 배치크기가 일정한 수준 이상이 되면 배치크기가 커져도 생산량이 거의 증가하지 않는다. 반면에 배치크기가 커지면 <Figure 2>에서와 같이 리드타임은 배치크기에 비례해서 증대된다. 따라서 병목공정에서는 이 두 가지 평가지표, 즉 생산량과 리드타임을 고려하여 배치크기를 결정하는 것이 필요하다.

3.3 병목공정에서의 배치크기 결정 모형

앞서 논하였듯이 비병목공정에서는 제품을 빠르게 전달해 주기 위하여 리드타임을 최소화 하는 배치크기로 생산하는 것이 타당하나, 병목공정에서는 일반적으로 리드타임보다 생산량의 증대가 더욱 중요한 의사결정 지표이므로 본 절에서는 병목공정에서 생산량과 리드타임을 동시에 고려하여 배치크기를 결정하는 절차를 제시한다.

TOC를 소개한 Goldratt은 기업의 목표는 연속적으로 이익을 창출하는 것이라 하고, 이를 달성하기 위해서는 최소의 재고(IN : Inventory)와 운영비용(OE : operating expenses)으로 최대의 산출액(TH : throughput)을 달성해야 한다고 지적하고 있다 (Goldratt, 1990). 여기서 TH는 시스템이 생산판매를 통하여 얻은 수익으로 일반적으로 총 소득에서 원자재 비용을 제한 금

액이고, IN은 설비 등의 고정자산과 구매한 자재비용을 나타내고, OE는 재고를 TH로 변환하는데 소요되는 비용으로 정의하였다. 이때 시스템을 평가하기 위한 척도는 순이익NP(NP=TH-OE), 투자회수율 ROI(ROI = NP/IN), 납기준수율(OTD : On Time Delivery) 및 리드타임 등을 들고 있다. 본 논문에서는 TOC의 개념을 활용하여 이익이 최대화 되도록 배치크기를 결정한다. 이를 달성하기 위해서는 생산량(산출액)을 최대로 하는 것이 우선 요구된다. 또한 리드타임은 위의 TOC 평가항목 중에서 재고수준과 비례적인 관계가 있으며 납기준수율과도 직접적인 영향을 주므로 또 하나의 평가 지표로 사용한다.

대상 생산라인에서 생산되는 각 제품의 제품조합(product mix)은 주어져 있다고 가정하자. 전체제품의 생산량이 x 이고 제품 i 의 제품조합비율이 r_i 라면, 제품 i 의 생산량 x_i 는 $x_i = r_i x$ 로 표현된다. 생산된 제품의 단위당 수익과 리드타임에 관련된 비용을 알고 있고, 이러한 비용은 각각 선형관계가 있다고 가정하자. 이때, 이익 Z 는 다음과 같이 정의 된다. $Z = \alpha x - \beta x T^+$ 여기서 α 는 제품 단위 당 수익, β 는 목표 리드타임에서 초과하는 시간 T^+ 한 단위 당 비용을 나타낸다. 리드타임에서 초과되는 시간(T^+)은 리드타임 T 에서 미리 정한 목표리드타임 T^0 를 제한 값이다. $T^+ = \max(T - T^0, 0)$. 따라서, Z 의 첫 번째 항목은 생산에 의해 얻어진 수익이고 두 번째 항목은 리드타임과 연관된 비용을 나타낸다. 이익을 최대로 하는 최적의 배치크기를 결정하는 수리모형은 아래와 같다

$$\text{Max } Z = \max(\alpha x - \beta x T^+, 0) \tag{5}$$

$$\text{s.t } xp + xs/b < 1$$

위에서 목적식은 Z 가 음수인 경우는 생산 고려 대상에서 제외한다고 가정하여 최소값을 0으로 하였다. 제약식은 생산량과 배치의 크기가 기계 부하율 1이 넘지 않도록 결정되어야 함을 말하고 있다. <Figure 5>는 $s = 0.01$, $p = 0.01$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.05$, $T^0 = 1.0$ 의 경우에 목적식(5)를 그래프로 보인 것이다. 이때, 배치크기는 12, 생산량은 85일 때 최대이익이 달성된다

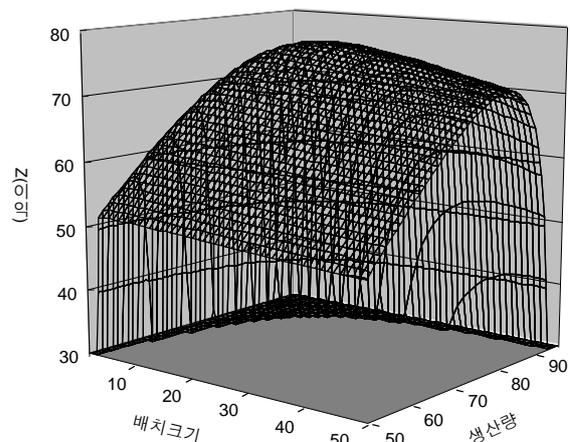


Figure 5. Relationship among batch size, throughput rate and profit

위의 수리 모형은 두 개의 결정변수로 이루어진 비 선형 모형이므로 최적의 값을 찾기는 쉽지 않다 그러나 생산량의 상한값은 $1/p$ 이라는 점과, T 는 b 에 대하여 볼록(convex) 함수이고 최소의 T 를 가지는 최적의 배치크기를 구할 수 있다는 특징을 이용하여 최적의 배치크기 b^* 와 생산량 x^* 을 구할 수 있다. 아래는 최적의 생산량과 배치크기를 동시에 찾을 수 있는 선형탐색절차이다.

단계 1 :	$Z^* = -\infty, x = \lfloor 1/p - \delta \rfloor$, 여기서 δ 는 아주 작은 수이고 $\lfloor a \rfloor$ 는 a 보다 작은 최대의 정수
단계 2 :	식 (3)을 이용하여 최적의 배치크기와 이에 따른 Z 산출
단계 3 :	$Z \geq Z^*$ 이면, 다음 사항 수정 : $x^* \leftarrow x, b^* \leftarrow b^*, Z^* \leftarrow Z$
단계 4 :	$x > 1$ 이면 $x \leftarrow (x-1)$, Step 2 부터 반복; $x = 1$ 이면 절차 종료

위의 절차는 생산량의 상한값에서 시작하여 주어진 생산량에서 최적의 배치크기를 계산하여 그중 최대의 이익을 주는 생산량과 배치크기를 찾아내는 절차이다. 각 생산량에 대해서 최적의 배치 크기는 식(3)에 의해서 결정된다. 여기서 생산량은 이산적(discrete)이라고 가정한다. 위의 절차는 생산 상한값부터 하나씩 생산량을 줄여나가면서 최적의 해를 찾아나가므로 x 회의 반복으로 총 이익을 최대로 하는 생산량과 배치크기를 구할 수 있다.

4. 수치예제 및 토의

본 절에서는 제시된 배치크기 결정 절차의 적용 절차를 이해하고, 적용시의 고려사항을 논하기 위하여 가상의 간단한 예제를 가지고 실험 분석하였다. 대상 시스템은 <Figure 1>과 같은 제품 흐름형태를 가지고 있으나, 본 실험에서는 병목공정에서의 작업만을 가지고 실험하였다. 앞 절의 예와 같이 병목 공정에서 단위당 생산시간은 $p = 0.01$ 이고, 제품이 변경할 때의 셋업시간은 $s = 0.01$ 이다. 제품 1개당 부가가치는 $\alpha = 1$ 이고, 기준 리드타임은 $T^* = 1.0$ 이며, 실현된 리드타임이 기준 리드타임보다 클 경우 단위시간당 발생하는 비용은 $\beta = 0.05$ 이다. 여기서 매개변수 값들은 전체제품의 평균값을 의미한다. 제시된 알고리즘의 단계 1에서는 $Z^* = -\infty, x = 99$ 가 얻어지고, 단계 2에서는 식 (3)을 이용하여 b^* 가 계산되며 이에 따른 Z 값이 산출된다. (b^* 는 198이고, Z 는 0) 단계 3에서는 Z 와 Z^* 를 비교하여 새로운 해 Z 가 지금까지의 $-\infty$ 최적해 Z^* 보다 우수하면 최적해를 갱신한다. 현재 Z^* 는 이므로 새로운 해 $x^* = 99, b^* = 198, Z^* = 0$ 이 된다. 생산량을 1단위 감소시키고 ($x = 98$) 반복하여 위와 같이 알고리즘을 수행한다.

<Table 1>은 제시된 절차에 따라 반복적으로 계산된 알고리

즘 수행 결과이다. 생산량을 99에서부터 94까지는 리드타임이 너무 길어 생산해서 얻는 수익보다는 리드타임과 관련된 비용이 더 많아 이익이 없는 경우이다 이러한 긴 리드타임은 기계부하율이 97%(생산량 94인 경우) 이상으로 기계부하가 많이 걸려 대기시간이 많기 때문이다 생산량이 94보다 작아지면 이익이 발생하기 시작하여 생산량이 감소할수록 이익이 증가하게 된다. 최대의 이익은 생산량이 85인 경우에 발생하며 이때의 이익은 82.27, 배치크기는 12, 리드타임은 1.64, 기계부하율은 92.2%이다. 최적의 생산량을 구했으면 주어진 제품조합에 의해 각 제품의 생산량을 알 수 있다. 예를 들어 어떤 제품의 제품조합비율이 0.2(20%)라면 최적 생산량은 $17 (= 85 \times 0.2)$ 이 된다. 리드타임 1.64는 한 배치의 제품 생산시간 0.12와, 셋업시간 0.01, 그리고 대기하는 시간 1.51로 구성된 것이다. 대기시간이 리드타임의 92%를 차지하고 있는데 이는 병목공정에서는 흔히 발생하는 현상이다. 따라서 리드타임을 줄이기 위해서는 대기시간을 줄이는 것이 절대적으로 필요하다는 것을 알 수 있다. 생산량을 84개 이하로 감소시키면 생산에 의한 수익이 감소하게 되어 이익은 줄어들게 된다.

Table 1. Results from the iterative batch sizing algorithm

생산량	배치크기	리드타임	이 익	기계가동률
99	198	398.00	0.00	99.5%
98	98	99.00	0.00	99.0%
97	65	43.78	0.00	98.5%
96	48	24.50	0.00	98.0%
95	38	15.60	0.00	97.5%
94	32	10.78	0.00	97.0%
93	27	7.87	61.03	96.4%
92	23	6.00	69.01	95.9%
91	21	4.71	74.10	95.4%
90	18	3.80	77.41	94.9%
89	17	3.12	79.56	94.3%
88	15	2.61	80.92	93.8%
87	14	2.21	81.74	93.3%
86	13	1.90	82.15	92.7%
85	12	1.64	82.27	92.2%
84	11	1.43	82.17	91.7%
83	10	1.26	81.91	91.1%
82	10	1.12	81.51	90.6%
81	9	1.00	81.00	90.0%
80	8	0.90	80.41	89.4%
79	8	0.81	79.75	88.9%
78	8	0.73	79.04	88.3%
77	7	0.67	78.28	87.7%
76	7	0.61	77.49	87.2%
75	6	0.56	76.66	86.6%
74	6	0.51	75.81	86.0%
73	6	0.47	74.93	85.4%
72	6	0.44	74.03	84.9%
71	5	0.40	73.12	84.3%
70	5	0.37	72.19	83.7%

일반적으로 기존에 행해지고 있는 배치크기의 결정 절차는 우선 병목공정의 생산능력을 고려하여 생산량을 결정한 후에 배치 크기를 결정한다. 여기서 만일 최대생산능력 100의 90%인 90단위를 생산하는 것으로 결정이 되었다면 최적의 배치크기는 리드타임을 최소로 하는 18이 될 것이고 이때의 이익은 77.41로 앞서 얻은 82.27보다는 약 6%의 이익 손실을 볼 것이다. 또한 리드타임의 상한선을 1.0으로 정해놓고 생산량을 결정한다면 생산량은 81단위가 될 것이고 이때의 이익은 81.0이 되어 최적의 해와 비교하여 1.5%의 이익 손실의 결과가 된다.

셋업시간이 최적의 배치크기에 어떠한 영향을 주는지 알아 보기 위하여 셋업타임을 0.001부터 0.10까지 변경해가면서 실험을 수행하였다. 제품 한 단위 당 생산시간을 0.01로 가정했으므로 생산시간과 비교하여 10%에서 10배까지의 범위이다. <Table 2>는 셋업시간이 변경될 때 얻어진 최적의 생산량과 배치크기이다. 셋업시간이 작으면 최적의 배치크기는 작아지고 생산량은 증가하게 된다. 예를 들어 셋업시간이 생산시간의 10% 수준인 0.001이면 최적의 배치크기는 3, 최적의 생산량은 93이 되고 이익은 93.99가 되어, 셋업시간이 0.01인 경우보다 이익이 14% 증대됨을 알 수 있다. 반면에 셋업시간이 길어지면 최적생산량이 줄어들고 따라서 이익도 감소하게 된다. 예를 들어 셋업시간이 현재의 0.01보다 2배 증가하여 0.02가 되면 이익이 76.95가 되어 6.5%의 이익 손실의 가져오게 된다. 이는 병목공정에서의 셋업시간의 중요성을 말해주고 있다.

Table 2. Optimal throughput rate and batch size over a variety of setup times

셋업시간	최적 생산량	최적 배치크기	리드타임	이익	기계 가동률
0.001	93	3	0.79	93.99	96%
0.002	91	4	0.94	91.26	95%
0.005	88	8	1.30	86.66	94%
0.010	85	12	1.64	82.27	92%
0.020	81	18	2.00	76.95	90%
0.030	79	24	2.43	73.36	89%
0.040	77	29	2.67	70.59	88%
0.050	75	32	2.79	68.30	87%
0.100	69	49	3.49	60.42	83%

생산량과 리드타임의 가치를 나타내는 α 와 β 는 그 상대적 값의 차이에 의해 최적해에 영향을 준다. 여기서 예를 들어 $\alpha = 1, \beta = 0.05$ 의 의미는 산업현장에서는 정해진 납기일자가 지나면 1일 납기를 어기는 경우 제품가격의 5% (= $100 \times \beta/\alpha$)를 페널티로 물어야 하는 경우를 생각할 수 있다. <Table 3>는 리드타임 관련 비용(β 값)이 변할 때의 최적해를 나타낸다. β 값이 작다는 것은 생산량에 비해 리드타임이 상대적으로 중요하지 않다는 의미이므로 배치크기를 크게 하여 생산량을 늘리도록 한다(이때 리드타임은 증가된다). 반대로 β 값이 크면, 리드

Table 3. The effect of the lead time cost, β .

β 값	최적 생산량	최적 배치크기	리드타임	이익
0.010	91	21	4.71	85.22
0.020	89	17	3.12	85.22
0.030	88	14	2.21	83.84
0.040	87	13	1.90	82.92
0.050	86	12	1.64	82.27
0.060	85	11	1.43	81.81
0.070	84	10	1.26	81.46
0.080	83	10	1.26	81.24
0.090	82	10	1.12	81.10
0.100	81	9	1.00	81.00

타임이 중요하므로 배치크기를 작게 하여 리드타임을 줄인다. 이때는 생산량도 함께 줄어들어 이익도 감소하게 된다.

<Figure 6>은 생산량을 85로 일정하게 한 상태에서 배치 크기를 변경하면 이익에 어떠한 영향을 주는지 보여준다. 이익에 대한 배치크기의 민감도는 리드타임의 비용인 β 값에 따라서 차이가 남을 볼 수 있다. 그림에서 모두 최적의 배치크기보다 배치크기를 크게 하면 이익은 완만하게 줄어드나 이보다 작게 하면 이익이 급속히 감소함을 볼 수 있다. 또한 리드타임과 관련된 비용이 크면(즉, β 값이 크면) 배치크기의 변화에 따라 이익이 더 민감하게 반응함을 볼 수 있다.

<Figure 7>은 배치크기를 12로 일정하게 하고 생산량이 이익에 어떤 영향을 주는지를 나타낸다. 이익에 대한 배치크기의 민감도도 리드타임의 비용인 β 값에 따라서 차이가 나지만 최적의 생산량보다 더 많이 생산하는 경우가 더 급속하게 이익이 감소함을 볼 수 있다. 이는 병목공정에서는 생산량이 조금만 증가해도 리드타임이 급격히 증가하여 이익을 감소시키기 때문이다. 따라서 병목공정에서의 생산량 증대는 주위를 기울여 결정해야 한다.

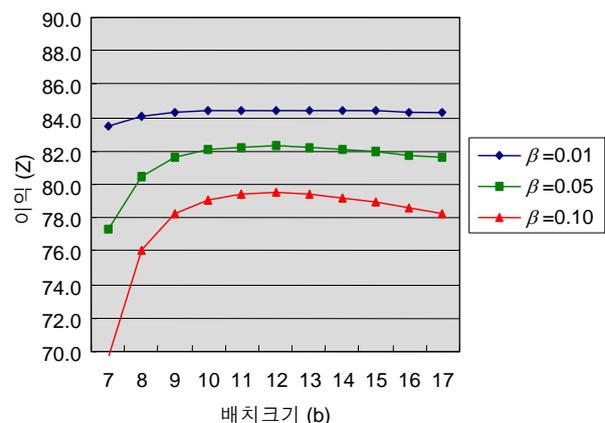


Figure 6. Sensitivity of profit over batch sizes

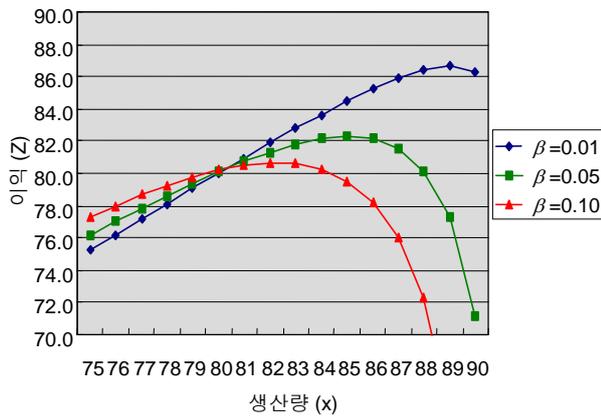


Figure 7. Sensitivity of profit over production rate

5. 결론

생산라인에서 병목공정의 생산능력은 시스템의 전체 생산량을 결정하므로 최대한 효율적으로 활용되어야 한다. 본 논문은 병목공정에서 배치크기를 결정하는 문제를 다루었다. 기존의 배치크기 결정모형은 대부분 병목공정과 비병목공정을 구분하지 않고 결정하였다. 비병목공정에서는 생산량이 병목공정의 생산능력에 의해 주어지므로 배치크기 결정시 급급적 빠르게 생산해 다음 공정으로 넘겨주어야 하므로 리드타임을 주요 성과지표로 사용한 모형을 사용하는 것이 합리적이라 할 수 있으나, 병목공정에서는 배치크기에 따라 생산할 수 있는 제품의 수가 변동되므로 생산량이 배치크기 결정시 함께 고려되어야 한다. 생산라인에서의 리드타임의 상당부분이 병목공정에서의 대기시간이 차지하므로 병목공정에서의 리드타임 또한 중요한 성과지표이다. 본 논문에서는 병목공정에서 리드타임과 생산량으로 표현되는 이익을 최대로 하기 위해 배치크기와 생산량을 동시에 결정하는 알고리즘을 제시하였다. 알고리즘은 생산량, 배치크기, 대기시간의 관계를 이용하여 반복적 선택탐색법에 의해 해를 찾는다. 예제를 통하여 제시된 알고리즘이 어떻게 적용될 수 있는지 보였고, 생산량을 고려하지 않을 경우의 기회비용을 알아보았다. 또한 배치크기를 결정할 때 고려해야 할 사항들, 예를 들어 셋업시간의 중요성, 리드타임 비용의 영향, 이익에 대한 배치크기의 민감도 등을 논하였다.

본 논문에서 다른 배치크기 결정모형은 몇 가지 가정을 기초로 하고 있다. 제품 배치의 도착시간간격과 생산시간은 지수분포를 따른다고 가정하여 대기시간을 산출하였고, 생산 배치와 운반배치를 동일하다고 가정하고 있다. 또한 모든 제품의 배치 크기는 동일하고, 각 제품의 제품조합(product mix)에 대한 의사결정이 미리 완료된 상태라고 가정하였다. 그러나 생산시스템에서 이러한 가정을 모두 만족하는 경우는 드물다.

따라서 본 논문에서 다른 시스템보다 복잡한 여러 가지 실제적인 생산 환경에서의 배치크기 결정문제에 대해 추가적인 연구가 요구된다.

참고문헌

- Benjaafar, S. (1996), On production batches, transfer batches and lead times, *IIE Transactions*, **28**, 357-362.
- Goldratt, E. M. and Cox, J. (1984), *The Goal : A Process of Ongoing Improvement*, The North River Press, Great Barrington, MA, USA.
- Goldratt, E. M. (1990), *The Haystack Syndrome*, North River Press, Croton-On-Hudson, NY, USA.
- Karmarkar, U. S. (1987), Lot sizes, lead time and in-process inventories, *Management Science*, **33**(3), 409-418.
- Karmarkar, U. S., Kekre, S., and Kekre, S. (1992), Multi-item batching heuristics for minimization of queue delays, *European Journal of Operational Research*, **58**, 99-111.
- Kenyon, G., Canel, C., and Neureuther, B. D. (2005), The impact of lot-sizing on net profits and cycle times in the n-job, m-machine job shop with both discrete and batch processing, *International Journal of Production Economics*, **97**(3), 263-278.
- Kuik, R. and Tielemans, P. F. J. (1998), Analysis of expected queueing delays for decision making in production planning, *European Journal of Operational Research*, **110**, 658-681.
- Kuik, R. and Tielemans, P. F. J. (1999), Lead-time variability in a homogeneous queueing model of batching, *International Journal of Production Economics*, **59**, 435-441.
- Kuik, R. and Tielemans, P. F. J. (2004), Expected time in system analysis of a single-machine multi-item processing center, *European Journal of Operational Research*, **156**, 287-304.
- Meng, G. (2004), Batch size model in a multi-item, discrete manufacturing system via an open queueing network, *IIE Transactions*, **36**(8), 743-753.
- Solberg, J. J. (1980), CAN-Q user guide: the optimal planning of computerized manufacturing systems, Report No. 9, School of Industrial Engineering, Purdue University, West Lafayette, IN, USA.
- Shanthikumar, J. G. and Buzacott, J. A. (1981), Open queueing network models of dynamic job shops, *International Journal of Production Research*, **19**(3), 255-266.
- Srikanth, M. L. and Umble, M. (1997), *Synchronous Management: Profit-Based Manufacturing for the 21st Century*, The Spectrum Publishing Company, USA.
- Tielemans, P. F. J. and Kuik, R. (1996), An explanation of models that minimize leadtime through batching of arrived orders, *European Journal of Operational Research*, **95**, 374-389.
- Umble, M. M and Srikanth, M. L. (1993), *Synchronous Manufacturing*, The Spectrum Publishing Company, Wallingford, Connecticut, USA.
- Whitt, W. (1983), The queueing network analyzer, *The Bell System Technical Journal*, **62**(9), 2779-2815.