대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 4, 453-475. Nov 2007

대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색[1)]

우 정 호[*] · 김 성 준[**]

오늘날 문자의 도입과 함께 시작되는 학교대수는 초등수학에서 중등수학으로의 이행에서 가장 큰 장애요인이 되고 있다. 이는 산술과 차별화된 대수의 본질에 기인하는 것으로, 문자와 식, 방정식에서의 구문론적 측면을 강조하는 것만으로 해결될 수 없다. 이에 최근 학교대수와 관련된 연구에서는 대수적 사고에 대한 논의가 집중적으로 다루어지고 있다. 본 연구는 대수적 사고 요소를 분석하여 산술에서 대수로의 이행과 초기 대수지도과정을 개선하기 위한 방안을 탐색해본 것이다. 먼저 역사-발생적, 인식론적, 기호-언어학적 관점으로부터 학교대수에서 요구되는 대수적 사고를 분석하고, 이로부터 형식 불역의 원리를 비롯하여 변수 개념과 양적인 추론, 대수적인 해석-식 세우기, 변환추론-식의 변형, 연산감각-식의 조작 등을 핵심적인 대수적 사고 요소로 확인한다. 그리고 초등학교와 중학교 수학 교과서를 분석하고 학생들을 대상으로 한 대수적 사고 능력 검사와 면담을 실시하고, 이를 토대로 학교수학에 포함된 대수적 사고 요소를 살펴본다. 또한 초등학교 수학에서부터 대수적 사고 요소를 강조함으로써 대수 입문기에 해당하는 중학교 이후의 대수 학습에 대한 준비와 더불어 대수적 사고 요소에 초점을 맞춘 산술에서 대수로의 이행을 이끌어내기 위한 지도 방안을 탐색해본다.

Ⅰ. 서 론

학교수학에서 산술과 대수는 오랫동안 초등수학과 중등수학을 대표하는 영역으로 자리매김해 왔으며, 이 가운데 대수는 일반화된 산술 즉, 문자 기호를 도입하여 산술을 일반화하는 것으로 받아들여져 왔다. 그러나 지금까지 산술과 대수를 초등과 중등과정으로 그 내용을 구분하여 지도해온 결과 학교대수를 학습하는 과정에서 많은 문제점들이 발생되었는데, 이는 이러한 엄밀한 구분이 산술에서 대수로의 이행을 어렵게 만드는 근본적인 이유 가운데 하나이기 때문이다. 일반적으로 학교대수는 문자 기호의 도입에 따르는 기호화와 함께 시작되고 있으며, 지금까지 이러한 기호화는 대수와 거의 동일시되었다. 이로 인해 대수 학습에서 문자와 식이 그 중심에 놓이게 되었으며, 문자 기호의 도입은 초등산술과 중등대수를 구분하는 경계선으로 여겨졌다. 그러나 대수 학습에는 이러한 기호화 측면과 함께 대수적 사고 측면을 고려해야 하는데, 이는 대수적 사고가 기호화와 더불어 대수를 구성하는 기본적인 요소이기 때문이다(Amerom, 2002; Kaput, 1994). 또

* 서울대학교, wjh@plaza.snu.ac.kr
** 부산교육대학교, joonysk@bnue.ac.kr
1) 이 글은 김성준의 박사 학위 논문을 요약 · 정리한 것임.

한 학교대수를 기호화에 제한할 경우 대수 학습은 산술과의 연결보다는 이 둘 사이의 간격을 심화시킬 수 있기 때문이다(Kaput, 1997). 곧, 문자 기호의 형식적인 도입만으로는 산술에서 학습한 내용과 대수와의 연결을 이끌어내기 어려우며, 결국 산술에서 대수로의 이행을 어렵게 만드는 주된 원인이 된다. 이로 인해 1990년대 이후의 수학교육연구에서는 산술과 대수간의 관계를 대수적 사고 측면에서 전반적으로 재검토하게 된 것이다(Amerom, 2002; Boulton-Lewis et al., 1997; Linchevski, 1995; Kieran & Chalouh, 1999; Lodholz, 1999).

1990년대 이전까지의 대수교육은 주로 문자 기호를 중심으로 변수, 대수식, 방정식과 관련된 논의가 그 중심에 놓여 있었다. 이 당시 연구의 대부분은 문항조사를 통해 변수와 대수식, 방정식 영역에서 학생들이 겪는 어려움을 밝히고, 오류의 유형들을 분석하는 것이었다(Chalouh & Herscovics, 1988; Kieran, 1981, 1988; Küchemann, 1981). 그 결과 오류의 원인을 산술과 대수간의 차이점을 분명하게 인식하지 못함에 있다고 보았으나, 그러나 이러한 차이를 어떻게 극복할지 그리고 대수 학습을 개선하기 위한 대안이 무엇인지에 대한 논의는 이루어지지 않았다. 한편 대수교육에서 대수적 사고와 관련된 공식적인 논의는 1984년 ICME 회의에서 처음 제기되었다. 그러나 이와 관련된 본격적인 논의는 1980년대에는 이루어지지 않았으며, 1990년대에 들어와 비로소 ICMI의 'algebra working group'의 조직과 함께 연구대상으로 구체화되었다(Kaput & Blanton, 2001; NCTM, 1997). 그러나 지금까지 대수적 사고를 중심으로 대수교육을 개선하려는 연구에서는 몇몇 제한점을 가지고 있다. 먼저, 대수적 사고의 정의를 대수의 역사, 기호, 문제해결 측면에서 나열하는 수준에 그치고 있을 뿐, 이들에 대한 이론적인 근거를 제시하지 못하였다. 그 동안의 연구에서 대수적 사고는 조작적 기호체계, 구조, 추상화 등으로 정의되어 왔으나, 이러한 정의가 어떤 근거에서 대수의 사고 측면과 관련되는지를 명확하게 밝히지는 못하였다. 다음으로, 대수 전반을 사고와 관련해서 다루었기에 그 가운데 학교대수에서 요구되는 대수적 사고의 특징을 제시하지 못하였다.

본 연구는 지금까지의 대수적 사고 연구에서의 이러한 제한점을 넘어, 대수적 사고에 대한 현상학적인 분석을 통해 대수적 사고의 지도에 따르는 그 본질을 분명하게 밝히고, 아울러 학교대수에서의 대수적 사고에 초점을 두어 대수교육을 개선하기 위한 방안을 탐색하는데 그 목적을 두고 있다. 또한 대수적 사고를 대수교육과정에 반영하는 것을 대수교육의 개선 방향으로 보아, 대수의 학습-지도에서 대수적 사고 요소를 구체화함으로써 그동안 문제가 되었던 대수 입문기의 대수교육에 기여하고자 한다. 지금까지의 대수교육이 문자식과 방정식의 형식적인 지도에 지나치게 치중하여 상대적으로 대수적 사고 측면이 소홀하게 다루어졌다면, 본 연구에서는 대수적 사고 요소를 중심에 놓고 이를 분석함과 동시에 교과서와 학생을 대상으로 그 학습 실태를 파악하여 대수 학습-지도를 개선하기 위한 방안을 탐색하고자 한다.

II. 대수와 대수교육

다음에서는 대수적 사고에 대한 분석에 앞서 대수교육과 관련해서 그동안의 선행 연구를 고찰하고 이러한 연구의 제한점을 살펴보고자 한다. 먼저 대수의 정의에 관한 Lins(1992), Radford(1996), Bell(1996) 등 여러 학자의 견해를 살펴보면, 대체적으로 대수는 문자 기호 측

면에서 정의되고 있다. 대수에서 문자 기호의 사용은 산술과 구분될 수 있는 분명한 특징이지만, 이것만이 대수를 결정한다고 볼 수는 없다. 대수는 단순한 기호 규칙의 습득이나 방정식의 풀이로 해석되어서는 안 되며, 문제해결이나 구조, 패턴과 규칙에서 사고와 관련된 요소에 대한 정확한 분석이 요구된다. 그러나 그 동안의 대수의 정의에서는 문자 기호의 조작과 함께 생각해볼 수 있는 사고의 측면이 소홀히 다루어져 왔음을 알 수 있다.

다음으로 학교대수에 관해 변수, 대수식, 방정식의 주제별로 이루어진 연구 결과를 살펴보면, 1980년대 이전의 연구에서는 문자나 방정식 학습에서 나타나는 문제점을 나열하는 수준에 그치고 있으나(Matz, 1979; Davis, 1975), 1980년대 접어들어 변수를 비롯한 대수식, 방정식에서 학생들이 범하는 오류가 체계적으로 분석되는 등 학교대수에서의 학습-지도에 대한 연구가 주로 이루어져왔다(Usiskin, 1988; Booth, 1984; Küchemann, 1981). 변수와 대수식을 조작하기 위해서는 구문론적인 규칙과 함께 그 규칙을 인식하는 과정에서 요구되는 사고가 중요하게 고려되어야 한다. 그러나 그 동안의 변수와 대수식의 연구에서는 대체로 구문론적 규칙에만 초점을 맞추고 있으며, 변수와 대수식의 조작에 요구되는 사고에 대한 논의는 충분하지 않았다. 이러한 경향은 방정식 지도와 관련된 연구에서도 동일하게 나타난다. 방정식의 지도에 관한 연구에서는, 1970년대에는 방정식의 풀이과정 곧 방정식의 표층 구조에 관한 이해를 주로 다루었으며(Petitto, 1979), 1980년대는 방정식 풀이 과정 이면의 변형 과정에 대한 지식 곧 심층 구조에 관한 지식에 초점을 두었다(Filloy & Rojano, 1989; Kieran, 1981). 그러나 이러한 논의는 방정식의 풀이에서 요구되는 사고 요소에 대한 구체적인 논의로 발전하지는 못했으며, 단지 이 두 구조의 이해에서 비롯되는 문제점을 확인하는 수준에 그치고 있다.

마지막으로 산술에서 대수로의 이행에 관한 연구를 살펴보면, 산술과 대수의 대비를 통해서 대수의 특징을 확인할 수 있으며(Sutherland, 2005), 산술에서 대수로의 이행 과정에 대한 연구 결과를 중심으로 학교대수에서 발생하는 장애를 살펴볼 수 있다(김남희, 1997; Herscovics & Linchevski, 1994; 김성준, 1995). 입문기의 대수를 일반화된 산술로 규정한다면, 일반화된 수를 나타내기 위해 문자 기호를 도입한다는 점을 제외하고는, 산술과 대수에 별 차이가 없는 것처럼 보일 수 있다. 그러나 이행 과정에서 학생들에게 반복적으로 나타나는 오류나 오개념을 살펴보면, 문자 기호의 도입에는 산술적인 것 이외의 대수 학습에서 요구되는 사고가 관련되어 있음을 확인할 수 있다.

이처럼 대수교육과 관련된 선행연구를 살펴본 결과, 1990년대 이후 대수 교육과정과 학습-지도를 개선하려는 여러 연구에서 대수적 사고가 점차 중요한 논의의 대상이 되어 왔으나, 대수적 사고를 다른 수학적 사고와 구분하거나 대수적 사고의 본질을 밝히려는 노력은 뚜렷한 성과를 거두지는 못하고 있다(Wheeler, 1996). 또한 선행연구에서 대수적 사고를 논의할 때 대수의 범위를 학교수학으로 제한하지 않고 있기에 학교대수에서 요구하는 대수적 사고를 제시하지 못하고 있으며, 이에 대수적 사고의 정의에 대한 이론적인 근거가 충분히 제시되는 동시에 학교대수에 대한 분명한 논의가 요구된다. 다음 장에서는, 이러한 선행연구를 보완하기 위해서 대수적 사고를 역사-발생적, 인식론적, 기호-언어학적 관점에서 분석하여 그 본질을 밝히고, 이에 기초하여 학교대수에서 요구되는 대수적 사고 요소를 추출하고자 한다.

Ⅲ. 대수적 사고의 현상학적 분석

Freudenthal(1983)에 따르면, 수학적 개념의 현상학은 그것이 창안되고 발전되어 온 현상과 관련하여 그 본질을 기술하는 것이며, 따라서 본 연구에서도 대수적 사고의 본질을 파악하기 위해서는 대수의 역사를 비롯하여 이와 관련된 자료를 분석할 필요가 있게 된다. 이에 대수의 역사-발생적 관점에서 대수적 사고의 기원을 고찰하고, 더불어 인식론적, 기호-언어학적 관점에서 대수적 사고를 구성하는 핵심이 무엇인지를 분석한다. 그리고 이러한 현상학적 분석을 통해 밝혀진 대수적 사고의 본질을 토대로 하여 학교대수에서 필요로 하는 대수적 사고 요소를 추출한다.

먼저 대수의 역사-발생적 분석은 16세기 Viète를 기준으로 하여 그 이전과 이후로 나누어 살펴본다. 대수의 역사를 보면, 16세기 이전까지는 방정식을 이용한 문제해결이 대수를 이끌어 왔으며, Katz는 이러한 이유로 방정식에서의 풀이 방법을 연구하는 것을 대수의 핵심으로 보았다(Melillo, 1999, 재인용). 따라서 방정식을 이용한 문제해결이라는 관점에서 대수를 본다면, 대수적 사고는 방정식의 풀이에 들어 있는 기본적인 아이디어를 의미하게 된다. 16세기 이전의 대수의 역사와 관련해서 Descartes의 《La Geometrie》에는 대수적 사고의 기원에 대한 흔적을 찾아볼 수 있다(Charbonneau, 1996). 여기서 그는 대수적 사고의 역사적 발달에서 중요한 역할을 한 분석적 사고와 비례적 사고를 강조하였는데, 이러한 사고는 바빌로니아 수학에서 방정식을 세우고 푸는 과정, 곧 양을 조작하여 해를 구하는 과정에서부터 시작되었다. 바빌로니아 수학은 문제해결 과정에서 비례와 분석의 아이디어를 기본으로 하는 '가정법'(the false position method)이라는 독특한 방식을 사용하였다. 이러한 비례와 분석의 아이디어는 그리스 수학에서 Euclid의 《원론》과 Pappus에 의해 정리되었다. 그리스 기하에서 이론화된 비례와 분석의 아이디어는 Diophantus의 《산학》(Arithmetica)에서 대수적인 형태로 재구성되었으며, 16세기에 이르러 기호 대수의 등장과 함께 분석과 비례의 아이디어는 Viète의 《해석학 서설》(Isagoge)에서 형식화되었다. 이처럼 16세기 이전까지 대수는 문제해결과 기하, 기호 대수를 거치면서 전개되어 왔으며, 이러한 흐름에서 분석과 비례의 아이디어는 계속해서 핵심적인 역할을 해왔다. 이러한 이유로 분석과 비례적 사고는 대수적 사고의 기원인 동시에 대수적 사고를 구성하는 본질로 볼 수 있을 것이다.

16세기 이후에는 문자 기호의 등장과 함께 산술을 일반화하는 오늘날의 현대대수에 포함된 개념들이 등장한다. 이 과정에서는 형식 불역의 원리가 핵심적인 역할을 하게 된다. 16세기 Viète 이후부터 대수에서는 식이나 연산이 일상언어와 구분되는 기호로 표현되었다. 그러나 기호 대수가 처음 등장하였을 때 그것은 '일반화된 산술'에 지나지 않았으며, 이러한 기호 사용에 있어서 논리적인 근거를 확보한 것은 Peacock과 Hankel로, 이들은 Viète에 이어 대수의 탈산술화(de-arithmetization)에 결정적인 역할을 하였다. Peacock은 산술과 구분되는 '산술대수'와 '기호대수'를 제안하였는데, 이 과정에서 그는 형식 불역의 원리(the principle of permanence of form)를 대수의 탈산술화를 위한 이론적인 근거로 사용하였다.[2] 그리고 이러한 Peacock의 아이디어는

2) 수학자들은 Peacock의 '형식 불역의 원리'에 근거해서 대수를 하나의 학문적 체계로 받아들이게 되었으며, 대수는 산술 법칙의 일반화에서 벗어나 그 자체가 하나의 학문으로 인정받게 되었다. 그 결과 수학적 아이디어의 내적 일관성이 수학자들의 관심을 끌게 되었으며, 형식적으로 정의된 수학적 대상의 본질이나 실세계와의 관계에 대한 질문은 더 이상 필요하지 않게 되었다.

Hankel에게 이어져 수 개념을 측정이라는 구체적 맥락에서부터 벗어난 형식적인 대상으로 다루게 되었으며, 그 결과 대수에서 기호는 더 이상 일반화된 수가 아닌, 어떤 의미도 고려되지 않은 상태에서 그 자체로 인정받게 되었다. 이러한 역사적 맥락에서 볼 때 16세기 이후 기호 대수를 완성시킨 '형식 불역의 원리'는 대수적 사고의 본질 가운데 하나가 된다.

다음으로 대수적 사고의 인식론적 분석에서는 대수적 사고의 형성에 있어 필연적으로 나타나는 과정(process)과 대상(object)간의 상호작용이 중심이 되어왔다. 일반적으로 수학적 대상은 일련의 과정에서부터 생겨나며, 대상을 중심으로 조작이 이루어지고 동시에 대상 사이의 관계에서부터 구조가 나타나게 된다. 이처럼 수학적 대상이 어떤 과정을 거쳐 구성되는가 하는 문제는 Piaget를 비롯하여 많은 연구자들의 인식론적 분석에서 다양하게 다루어져왔다(Gray & Tall, 1994; Dubinsky, 1991; Sfard, 1991; Davis, 1983; Greeno, 1983). 그리고 대수적 사고 역시 이러한 인식론적 분석을 통해 그 본질이 무엇인가를 살펴볼 수 있게 된다.

수학적 개념의 형성과 이해 과정에는 과정과 대상의 상호작용이 결정적인 역할을 하며, 실재화(reification) 또는 대상화(encapsulation)는 수학적 개념의 구성에서 과정이 대상으로 인식되는 것을 의미한다(Tall et al., 1999). Sfard(1995)에 따르면, 수학적 개념의 형성에 있어 대상에 앞서 구체적인 과정이 등장하였는데, 추상적인 개념은 조작적인 방식에서 구조적인 방식으로 전개되면서 형성된다. 이는 대수의 역사에서도 살펴볼 수 있는데,[3] 대수에서 새로운 추상적인 대상은 구체적인 과정에서부터 등장하였으며, 그리고 다시 과정이 대상으로 추상화, 구조화되어 왔으며, 따라서 대수적 사고의 본질은 이러한 일련의 절차와 함께 논의될 수 있을 것이다. 이를테면, 산술에서 대수로의 이행은 계산 절차를 수학적 대상으로 변화시키려는 시도 곧, 실재화를 거치면서 이루어지게 된다. 결국 대수적 사고를 이해하기 위해서는, 대수에서 다루어지는 수학적 대상들에 대해 그 이면에 이러한 대상들이 의미를 가지게 되기까지의 일련의 흐름을 보아야 하며, 그 결과 대수적 사고의 발달은 과정을 대상으로 보는 관점의 변화와 대상의 조작이라는 새로운 아이디어를 통해 이루어지고 있음을 보아야 한다. 곧, 과정과 대상의 반복적인 순환 과정을 통해 대수적 개념이 형성되어 왔으며, 이 가운데 대수적 사고가 드러나게 되는 것이다. 따라서 과정-대상과 조작-구조를 통해 개념적 실체를 인식하는 것은 무엇보다 과정과 대상간의 상호작용을 인식하는 것이 요구되며, 이는 대수적 사고 요소를 구성하는 본질 가운데 하나가 된다.

마지막으로 대수적 사고의 기호-언어학적 분석을 하였는데, 대수에서 구조적인 연결성은 문자 기호를 통해 가능하며, 절차적인 관점에서 구조적인 관점으로의 사고의 전환 역시 문자 기호에 대한 분석을 토대로 한다. 대수에서 문자 기호는 그 자체가 형식화된 언어이면서, 지시 대상이나 의미와 분리되지 않은 형태로 존재한다. 따라서 이러한 문자 기호의 특징을 기호-언어학적 관점에서 분석함으로써, 대수적 사고와 관련해서 그 본질을 이끌어낼 수 있을 것이다. 이를 위해서 'Frege의 의미론적 삼각형

3) 고정된 양을 다루었던 Diophantus의 대수는 '과정' 단계의 대수로 볼 수 있다. 구체적인 양을 문자로 표현함으로써 이러한 과정을 대상으로 인식한 Viète의 대수 단계는 '대상' 단계로 볼 수 있다. Peacock에 의한 형식적인 기호 조작의 대수는 '조작' 단계의 대수가 되며, 마지막으로 이러한 조작의 결과 도달한 대상 간의 관계 곧, 구조 중심의 대수는 '구조' 단계로 볼 수 있다. 이와 같이 대수의 역사에서 전개된 대수적 사고는 '과정-대상-조작-구조'의 틀을 통해 설명될 수 있다.

모델'을 대수적 사고에 대한 기호 언어학적 분석 모델로 차용하여 '대수적 사고 과정 분석 모델'을 생각해보고(Arzarello et al., 2001), 이 모델에서 문자 기호의 역할을 규정함으로써 대수적 사고의 본질을 찾고자 하였다. 그 결과 문자 기호를 동적으로 해석하는 능력 곧, 문자 기호에서 그 의미와 표현, 그리고 지시 대상 간의 관계를 이해하고 이들 사이의 상호 작용과 여기서 만들어지는 '개념적인 틀'(conceptual frame)[4)]의 변화를 파악하는 능력이 대수적 사고의 핵심임을 확인할 수 있었다. 곧, 대수에서 기호 해석과 관련된 여러 가지 사고 관련 요소들은 의미, 표현, 지시 대상 사이의 상호 작용을 통해 파악할 수 있다.

기호 언어학적 관점에서 대수적 사고는 구문론적 조작 즉, 기호 조작으로, 결합되는 방법과 형태에 따라 그 의미가 다르게 파악된다. 그리고 기호 조작은 문제와 상황에 따라 다양하게 나타나므로, 문자 기호를 의미와 지시 대상, 표현과 관련하여 파악하는 것이 요구된다. 경우에 따라서는 문자 기호를 조작하는 동안 의미, 지시, 표현이 불일치된 상태에서 이 중 어느한 부분만이 사고 과정에 나타나기도 한다. 그 결과 대수 기호의 구문론적 조작과 의미 사이에 생기는 불일치는 대수적 사고를 어렵게 만든다. 또한 기호 표현의 외연과 내포가 사고 과정에서 유기적으로 연결되지 못한 채, 단순한 기호 조작으로 일관하는 경우 대수적 사고의 유기적인 결합이 이루어질 수 없게 된다. 따라서 문자 기호와 관련해서 요구되는 대수적 사고는 문자 기호의 사용에서 상황에 따라 변하는 의미와 지시, 표현간의 관계를 정확하게 파악하는 것이며, 이러한 이유로 문자 기호에 대한 동적인 해석은 대수적 사고의 본질로 볼 수 있다.

이상에서 대수적 사고에 관한 역사-발생적, 인식론적, 기호-언어학적 분석으로부터 분석과 비례적 사고, 형식 불역의 원리, 과정-대상의 상호작용, 문자 기호에 대한 동적인 해석 능력 등을 대수적 사고를 구성하는 본질로 이끌어내었으며, 이러한 분석의 결과는 학교대수에서 문자와 식, 방정식 등 그 내용 영역별로 요구되는 '대수적 사고 요소'를 이끌어내고 분석하기 위한 준거로 작용하게 된다.

Ⅳ. 학교대수와 대수적 사고 요소

다음에서는 앞서 고찰한 대수적 사고의 본질에 대한 논의를 바탕으로 학교대수와 관련해서 대수적 사고 요소에 대한 분석을 시도한다. 이를 위해 먼저 문자와 식, 방정식의 학습에서 요구되는 대수적 사고 요소를 추출하고, 이를 토대로 초등학교와 중학교 수학 교과서에서 대수와 관련된 단원을 분석하였다. 본 연구는 대수 도입 시기와 관련해서 대수 학습-지도의 개선을 논의하는데 있으므로, 대수적 사고 요소에 대한 논의의 범위는 두 영역 즉, 문자와 식 및 방정식으로 제한하였다. 그리고 대수적 사고 요소와 관련된 대수 학습의 실태를 파악하기 위한 검사를 실시하였으며, 문항 검사만으로 파악하기 힘든 사고 요소에 대해서는 면담

4) Arzarello et al.(2001)에서는 '개념적 틀'을 사용하여 문자 기호를 역동적으로 해석하는 사고 능력을 정의한다. 대수에서 문제를 해결하는 것은 식을 조작하고 해석하면서 그 의미를 문제 상황과 연결하는 것이다. '개념적 틀'은 이러한 과정에서 사용되는 지식의 집합과 가능한 행동을 모두 포함한다. 따라서 대수 학습은 이러한 '개념적 틀' 안에서 자신의 사고와 활동을 표현하는 기호 체계를 사용하는 동안 이루어진다. 이 때 중요한 것은 기호를 사용하면서 지시 대상과 의미 사이의 관계에서 서로 다른 '개념적 틀'이 각 단계마다 만들어진다는 점이다.

을 통해 검사결과에 대한 분석을 실시하였다. 먼저 대수적 사고의 본질과 관련해서 학교대수에서 요구되는 대수적 사고 요소를 나열하면 아래 <표Ⅳ-1>과 같다.[5)]

역사-발생적 분석에서 이끌어낸 분석적 사고와 비례적 사고에는 방정식 영역과 관련해서 '분석적 사고'와 '비례적 사고'라는 사고 요소에 대응된다. 또한 16세기 이후 대수의 역사에서 드러난 대수적 사고인 형식 불역의 원리는 일반화된 산술에서 대수를 이끌어낸다는 점에서 문자와 식 영역에서의 '대수적인 원리'에 대응된다. 인식론적 분석을 통해 추출한 대수적 사고인 과정-대상의 상호작용은 문자와 식과 관련된 사고 요소인 '관점의 전환'과 연결된다. 문자식의 연산에서 문자식을 과정으로 볼 수도 있고 결과로 해석하여 대상으로 볼 수도 있는데 이는 관점의 전환이 필요하기 때문이다. 그리고 과정-대상의 상호작용은 방정식과 관련된 사고 요소인 '관계를 파악하는 능력'과도 연결된다. 이는 경우에 따라 문제에서 제시된 자료와 조건 사이의 관계를 하나의 대상으로 보면서 문제 상황을 파악해야 하기 때문이다. 기호-언어학적 분석을 통해 추출한 대수적 사고인 문자 기호에 대한 동적인 사고 능력은 문자와 식과 관련된 사고 요소인 '변수', '대수적인 해석', '변환추론'과 '연산감각', '대입'과 관련된다. 문자 기호에 대한 동적인 사고 능력은 문제해결 과정에서 상황에 따라 문자 기호의 표현과 의미, 지시 대상간의 관계를 서로 다르게 해석하는 능력이므로, 문자 기호(변수)를 사용한 대수적인 해석은 대수적 사고 요소 가운데 하나로 볼 수 있다. 변환추론과 연산감각 역시 문자 기호에 대한 동적인 사고 능력의 일종으로 볼 수 있는데, 이는 식의 변형과 식의 조작 과정에서 문자식의 표현 형태를 파악하기 위한 사고 요소이다. 대입은 식의 값을 구하는 과정에서 변수와 수를 동시에 생각해야 하므로, 이것 역시 문자 기호에 대한 동적인 사고 측면에서 볼 수 있다. 한편, 등호를 해석하는 능력은 기호 해석 능력의 일종이며, 방정식을 문제해결 도구로 보는 것은 산술적 전략을 비롯하여 여러 가지 전략들을 방정식 세우기 전략과 비교하면서 방정식 세우기 전략의 가치를 인식하는 것으로, 이를 위해서는 문제 상황을 문자 기호를 사용하여 방정식으로 전환하는 사고 능력이 요구되기에, 문자 기호에 대한 동적

<표Ⅳ-1> 대수적 사고와 대수적 사고 요소

대수적 사고	대수적 사고 요소	
	문자와 식	방정식
분석적 사고와 비례적 사고		분석적 사고, 비례적 사고
형식 불역의 원리 (일반화)	대수적인 원리	
과정-대상의 상호작용	관점의 전환	관계 파악 능력 가역적 사고
문자 기호에 대한 동적인 해석 능력	변수, 대수적인 해석, 변환추론, 연산감각, 대입	미지수, 대칭성 알아보기 문제해결 도구로 인식하기

5) 대수적 사고 요소 가운데 양적인 추론은 모든 대수적 사고의 배경이 되기에, 대수적 사고와 내용 영역 가운데 어느 하나에만 속한다고 보기 어렵다고 판단하여 <표Ⅳ-1>에서 생략하였다.

인 해석 능력의 한 요소가 된다. 다음에서는 이와 관련해서 그 범위를 학교대수로 제한하여 문자와 식, 방정식 각 영역에서 요구되는 대수적 사고 요소에 대해 간략하게 살펴본 것이다.

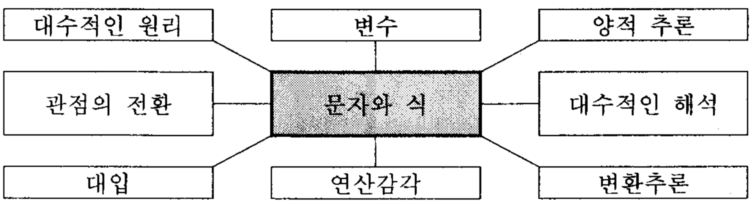
1. 문자와 식, 방정식과 관련된 대수적 사고 요소

가. 문자와 식에 관련된 대수적 사고 요소

중학교 수학에서 학교대수는 문자와 식에서부터 시작되고 있으며, 그 내용은 문자의 사용, 식의 값, 식의 계산으로 이루어져 있다. 문자와 식 단원에서는 문자를 사용하여 식을 나타내고 식의 값을 구하고 일차식의 계산 등을 학습하게 되는데, 이러한 학습내용들은 다양한 대수적 사고 요소와 관련되어 있다. 다음에서는 문자와 식과 관련된 대수적 사고 요소를 대수적인 원리, 변수, 양적 추론, 대수적인 해석, 변환 추론, 연산 감각, 대입, 관점의 전환 등 8가지 사고 요소로 구분하여 살펴보기로 한다.

1) 대수적인 원리: Freudenthal(1983)에 따르면, '대수적인 원리'는 앞서 대수적 사고의 역사-발생적 분석에서 보았듯이 대수적 사고에서 필요로 하는 형식 불역의 원리를 강조하기 위한 것이다. 곧, '대수적인 원리'는 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수와 연산, 관계를 확장하는 것으로, 이것은 수학을 만들어내는 원리일 뿐만 아니라 교수학적인 기능까지 함께 가진다. 곧, '대수적인 원리'는 19세기 현대대수가 형성되는 과정에서 중요한 역할을 하였을 뿐만 아니라 오늘날 중학교 수학에서 문자와 식을 도입하는 과정(산술의 일반화)에서 결정적인 역할을 하게 된다. 실제 중학교 7-가 교과서에서 처음 문자를 도입할 때, 문제 상황에서 먼저 수를 제시한 다음 수를 대신하여 문자를 도입하는 방식을 취하고 있으며(강옥기 외 2인, 2001; 양승갑 외 6인, 2001), '대수적인 원리'는 이러한 도입에 대한 이론적 근거로 산술의 일반화를 가능하게 하는 대수적 사고 요소이다.

2) 변수: 중등수학에서 변수에 대한 이해는 대수를 비롯하여 학교수학 전반을 이해하는 바탕에 놓여 있다. 변수에 대한 이해는 학교대수가 시작되는 문자와 식의 지도 단계에서부터 가능해야 하며, 그 지도는 여러 가지 상황에서 해석 가능한 변수의 의미를 강조하면서 이루어져야 한다. 이를테면, 문자와 식에서 변수는 일반화된 수, 다가명사, 변하는 양 등 다양한 의미를 지니게 된다(김남희, 1997). 산술에서 제시된 패턴을 일반화하는 과정에서 변수를 다룸으로써, 문자(변수)가 지니고 있는 다가명사와 변하는 양의 의미를 함께 파악할 수 있게 된다. 더불어 변수의 의미를 변하는 양과 관련하여 파악하게 되면, 문자가 포함된 식과 함수에 대한 이해를 보다 다양하게 할 수 있다. 이에 변수는 대수 학습에서 대수적 사고 요소를 구성하는 기본적인 요소로 볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-1] '문자와 식'과 관련된 대수적 사고 요소

3) 양적 추론(quantitative reasoning): 문자와 식의 학습은 산술로부터 일반화하는 동시에 산술과는 다른 사고방식을 요구한다. 초등수학에서 수의 산술을 다루는 동안 형성된 사고방식은 대수에서 문자와 식을 하나의 대상으로 보고 다루는 것을 오히려 방해할 수 있다. 곧, 문자와 식을 하나의 대상으로 인식하지 못한 상태에서 곧바로 식의 값을 계산하여 문제를 해결하는 것은 이후 대수 학습에서 장애가 될 수 있다. 그러나 수와 문자는 모두 '양'(quantity)을 그 바탕에 두고 있으므로, 수나 문자가 의미하는 '양'에 초점을 맞춘 양적 추론은 산술과 대수를 연결하는 사고 요소가 될 수 있다. 즉, 양적 추론은 수에 대해서 뿐 아니라 문자 기호에 대해서도 동일하게 작용될 수 있으며, 주어진 상황에서 양의 변화를 파악하여 문자와 식으로 나타내는 데에도 중요한 역할을 하며, 따라서 양적 추론은 학교대수의 학습에서 요구되는 대수적 사고 요소 가운데 하나가 된다.

4) 대수적인 해석: 대수적인 해석은 문제 상황에서 적합한 문자를 선택하여 주어진 상황을 식으로 표현하는 것으로, Freudenthal(1983)은 대수적인 해석을 산술과 대수를 구분하는 중요한 대수적인 전략으로 보았다. 산술에서는 수의 성질이나 수 사이의 관계가 문제를 해결하는 과정에서 바로 나타나는데 비해, 대수의 경우는 주어진 상황이 문자나 식을 통해 간접적으로 표현되고 다시 이것을 대상으로 연산을 수행하게 된다. 학교수학에서 대수적인 해석은 초등학교 수준에서는 문제 상황을 수식으로 표현하거나 □, △와 같은 기호를 사용해 식으로 표현하면서 시작된다. 그리고 중학교 수준에서는 제시된 문제 상황을 문자 기호를 사용해서 문자식으로 나타내는 과정에서 대수적인 해석이 요구된다. 이러한 대수적인 해석은 문자나 기호를 보다 효과적으로 선택하고 식을 조작할 수 있는 기호 감각으로, 문자와 식의 학습에서 중요한 역할을 하는 대수적 사고 요소이다.

5) 변환추론(transformation reasoning): 변환추론은 식의 변형을 통해 동치인 식을 이끌어내는 과정에서 요구되는 사고로, 주어진 대수식의 동치 변형에서 중요한 역할을 한다. 앞서 대수적인 해석이 문제 상황을 문자와 식으로 나타내는데 초점을 맞춘 것이라면, 변환추론은 식의 변형에서 요구되는 대수적 사고 요소이다. 일반적으로 문자식의 변형에서는 구문론적 규칙이 우선하는데 비해, 변환추론을 이용한 식의 변형에서는 문제에서 요구하는 맥락을 우선시하고 구문론적 규칙은 이에 뒤따르게 된다. 이를테면, 문제에서 주어진 패턴을 어떻게 파악하는가에 따라 문자식의 표현이 달라지는데, 이때 각기 다르게 표현된 식의 동치 여부는 변환추론을 통해 결정된다. 곧, 패턴을 일반화하여 대수식으로 표현하는 과정에서 변환추론은 식의 변형과 동치관계를 파악하는 역할을 한다. 따라서 변환추론은 단순한 구문론 규칙이 아닌 일련의 사고 과정을 거쳐 문자식을 이해하기 위한 것으로, 문자와 식의 학습에서 요구되는 대수적 사고 요소 가운데 하나가 된다.

6) 연산감각(operation sense): 연산감각은 식의 조작에서 사칙 연산과 교환, 결합, 분배법칙 등의 연산법칙과 함께 사용되는 사고 요소이다. 연산감각은 서로 다른 상황을 표현한 문자식을 하나의 대상으로 보면서 서로 다른 상황을 결합하고자 할 때 요구된다. 산술과 달리, 대수에서는 문제를 해결하는 과정에서 상황에 따라 연산을 결정해야 한다. 이를테면, 산술에서 문제를 해결하기 위한 전략으로 '거꾸로 풀기'를 사용할 경우, 문제의 결과에서부터 시작하여 문제의 출발점을 향하는 과정에서 연산은 이미 결정되어 있다. 반면 대수에서는 문제해결을 위해 식을 세우게 되면서 다음 단계에 적

합한 연산 규칙을 결정하고 또 이를 적용하게 된다. 연산감각은 이러한 식의 계산에서 사용되는 연산과 그 순서를 결정하는 것으로, 이러한 이유로 연산감각은 문자와 식의 학습에서 요구되는 대수적 사고 요소가 된다.

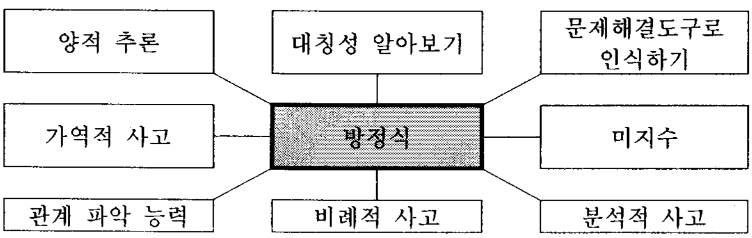
7) 대입: Freudenthal(1983)에 따르면, 대수 학습에서 대입은 전술적인 측면에서 여러 가지 장점을 갖는다. 곧, 수를 변수로 대치하면 일반화가 되고, 변수에 수를 대입하면 특수화가 된다. 수를 변수로 대치하는 일반화 과정은 앞서 대수적인 원리로 보았으며, 변수에 수를 대입하는 특수화는 식의 값을 구하는 과정에서 나타난다. 따라서 대입은 대수와 산술 사이의 가역적인 관계를 보여주며, 일반화와 특수화 사이의 관계를 확인하는데 중요한 역할을 한다. 대입은 일반적으로 문자를 대신하여 수 값을 넣는 것인데, 이는 좁은 의미의 대입이라 할 수 있다. 이에 비해 보다 넓은 의미에서의 대입은 주어진 무엇을 다른 무엇으로 대치하는 것이다. 이를테면, 산술에서 곱셈을 동수누가로, 거듭제곱을 거듭된 곱셈으로, 뺄셈을 역원의 덧셈으로 대치하는 것까지도 포함한다. 이에 대입은 식의 값을 구하는 문제로만 제한되는 것이 아니라, 보다 넓은 맥락에서 문자와 식을 이해하기 위한 본질적인 사고 요소로 볼 수 있다.

8) 관점의 전환: 관점의 전환은 대수 학습에 필요한 전략 가운데 하나로(Freudenthal, 1983), 특히 문자와 식의 학습에서 중요한 사고 요소로 작용한다. 문자나 기호는 맥락에 따라 서로 다른 기능을 하며, 수행하는 역할에 따라 서로 다른 의미를 갖게 된다. 그러나 문자 또는 기호와 관련된 다양한 관점(미지수, 변수, 다가명사 등)을 이해하는 것은 결코 쉽지 않으며, 상황에 따라 관점을 바꾸어가면서 문제를 해결하는 것은 더욱 그러하다. 또한 산술에서 수식은 일련의 과정에 따라 진행되고 과정과 결과가 명확하게 구분되지만, 문자식은 상황에 따라 과정으로 해석되는가 하면 결과(대상)로 해석되기도 한다. 관점의 전환은 문제에 제시된 조건으로부터 경우에 따라 부분 또는 전체로 문제를 파악하는 것을 포함한다. 이처럼 관점의 전환은 패턴과 관계를 문자로 표현할 때 중요한 역할을 하게 되며, 따라서 문자와 식의 학습에서 요구되는 대수적 사고 요소 가운데 하나이다.

나. 방정식과 관련된 대수적 사고 요소

학교수학에서 방정식은 7-가 단계에서 문자와 식에 이어서 학습되고 있다. 문자와 식에서처럼 방정식의 풀이 과정에는 다양한 대수적 사고 요소가 포함되어 있다. 다음은 앞서 분석했던 대수적 사고의 본질에 기초하여 방정식의 학습에서 요구되는 사고 요소를 양을 비교하는 양적 추론, 대칭성 알아보기, 문제해결 도구로 인식하기, 미지수, 분석적 사고, 비례적 사고, 관계 파악 능력, 가역적 사고 등으로 구분하여 살펴본 것이다.

1) 양을 비교하는 양적 추론: 대수의 역사를



[그림 Ⅳ-2] '방정식'과 관련된 대수적 사고 요소

보면, 대수는 수의 산술과 달리 양과 관련된 문제해결에서부터 시작되었다. 대수를 양의 조작으로 보는 것은 16세기 이후 문자 기호가 등장한 이후에도 계속된다. 이는 양을 대상으로 하는 활동과 양적 추론이 방정식에서 매우 중요함을 의미한다. Smith & Thompson(2005)은 대수에서 요구되는 이러한 기본적인 사고 방법으로 양적 추론에 주목하였는데, 특히 방정식을 세울 때 서로 다른 방식으로 양을 비교하여 표현하기 위해 요구되는 사고로 양적 추론을 강조하였다. 양적 추론은 산술에서는 일정한 값에 대해 사고하는 것으로 제한되지만, 대수에서는 양을 대상으로 보고, 관계를 일반화하는 것, 변하는 양과 미지수를 사용하는 것 등에서 광범위하게 적용된다. 그리고 양을 비교하는 활동은 여러 가지 문제해결전략과 연결될 수 있으며, 이를 통해 주어진 자료를 파악하고 문제 상황에 내재된 의미를 이해할 수 있게 된다. 따라서 양을 비교하는 양적 추론은 방정식의 학습에서 중요한 사고 요소 가운데 하나이다.

2) 대칭성 알아보기: Freudenthal(1983)은 대수에서 요구되는 사고 전략 가운데 하나로 대칭성을 강조하였는데, 방정식에서의 등호 해석과 동치 개념을 대칭성의 관점에서 해석하였다. 대수에서 등호와 동치 개념은 산술과 차이가 있으며, 이 차이를 극복하기 위해서는 문자 기호의 형식적인 사용이 아닌 사고 측면에서 등호와 동치 개념에 대한 이해가 우선되어야 한다. 산술에서는 등호를 하나의 과정으로 해석하는 경향이 있는데, 이는 방정식을 비롯한 대수 학습에서 여러 가지 오류를 낳는 원인이 된다. 이를테면, 3+4는 두 수의 합이라는 하나의 대상으로 인식되기보다 두 수를 더하는 과정으로 인식되고, 이 과정에서 등호는 무엇을 하라는 명령이나 과정과 결과를 구분하는 기호로 받아들여진다. 이러한 등호 해석은 산술을 학습한 이후에도 계속 남아, 대수에서 요구하는 가역적인 사고를 비롯해서 대칭이나 추이 관계를 이해하는데 장애가 된다. 대수에서는, 산술에서의 등호에 대한 이러한 과정 인식을 넘어, 등호를 관계를 나타내는 기호로 이해할 수 있어야 한다. 그리고 이러한 등호 해석은 방정식에서의 동치 개념과 연결된다. 곧, 방정식은 양변에 있는 서로 다른 형태의 문자식을 동치관계를 의미하는 등호를 사용하여 연결한 것으로, 이러한 동치관계를 파악하는 것은 방정식 풀이에서 중요한 역할을 하게 된다. 따라서 방정식의 학습에서는 등호를 동치관계 즉, 대칭적인 관계로 파악할 수 있어야 하며, 이러한 대칭성에 대한 이해는 대수적 사고 요소의 하나가 된다.

3) 문제해결도구로 인식하기: 방정식은 주어진 문제 상황을 체계적이고 효율적으로 해결하는 강력한 도구가 될 수 있다. 초등수학에서 다루었던 여러 가지 문제해결전략을 대수에서의 문제해결전략과 비교하여 방정식을 문제해결도구로 볼 수 있어야 한다. Freudenthal(1983)에 따르면, 방정식의 풀이는 차례로 수를 대입하거나, 항을 옮기고 분배하거나, 동일한 연산을 적용해서 항을 소거하는 것으로, 대수에서 유용한 문제해결전략 가운데 하나이다. 이에 학생들은 문제 상황에 적합한 해결전략을 선택하는 과정에서 방정식을 보다 효과적인 문제해결도구로 인식할 수 있어야 한다. 곧, 방정식을 다른 문제해결전략과 비교하고 보다 효과적인 전략을 선택하는 과정을 통해 방정식이 지닌 문제해결도구로서의 기능을 인식하는 것은 중요한 사고 요소가 된다.

4) 미지수: 방정식에서 미지수는 방정식의 해를 나타내는 자리지기(placeholder)에 해당한다. 미지수를 이용한 방정식의 풀이는 산술에서 다루었던 식 세우기 전략과 연결해서 생각해 볼

수 있다. 초등학교에서 다루었던 □, ○ 등은 방정식의 미지수와 같은 역할로, 방정식에서 사용하는 문자와 연결된다. 방정식에서 문자의 사용은 수의 맥락에서 보면 미지인 수를 대신하는 자리지기로 한정되어 있다. 그러나 미지수를 미지인 수를 나타내는 것으로만 지도할 경우 문자의 다양한 기능을 가르치기 어려우므로, 수와 문자를 연결하는 미지인 양을 다루는 맥락에서 미지수를 이해할 필요가 있다. 양적 추론은 이 과정에서 방정식에서 사용된 문자를 미지의 양을 표현하는 것으로 인식하는 것이며 여기서 미지인 양은 미지수로 파악되는 것이다. 이러한 이유로 미지수는 방정식을 구성하는 기본적인 사고 요소에 해당한다.

5) 분석적 사고: 대수의 역사적 분석에서 보았듯이 분석적 사고는 방정식의 풀이에서 기본적인 사고로, 방정식을 세우기 위한 전제가 된다. 곧, 방정식은 문제가 풀렸다고 보고 이 방정식을 만족하는 값을 구하는 과정으로, 이 과정에서 분석적 사고는 기본적으로 내재되어 있다. Radford(2001)에 따르면, 문자를 사용한 방정식 속에 분석적 사고가 내재되어 있지만, 그렇다고 하여 문자를 사용한 방정식을 학습하기만 하면 그 속에 내재된 분석적 사고까지 자동적으로 학습되는 것은 아니다. 오히려 방정식 풀이에서 문자의 구문론인 역할 곧, 등식의 성질이나 이항만을 강조함으로써 문자에 포함된 분석의 아이디어를 놓치게 되고, 그 결과 문제가 풀렸다고 생각하여 미지수 x를 사용하는 것이 아니라 단순히 기계적으로 구하고자 하는 것을 x로 놓게 된다. 중요한 것은 분석적 사고가 방정식을 구성하는 기본적인 사고 요소라는 점이며, 이러한 이유로 분석적 사고는 방정식에서의 대수적 사고 요소가 된다.

6) 비례적 사고: 비례적 사고는 역사적으로 볼 때, 방정식과 관련된 문제에서 사용된 비례관계에서 찾아 볼 수 있다. 또한 중학교 7-가 수학에서 일차방정식은 ax=b와 같은 기본 형태를 제시하고 있는데, 이러한 방정식은 비례관계의 또 다른 표현이다(ax=b $\Rightarrow$ ax=b×1 $\Rightarrow$ $\frac{x}{1}=\frac{b}{a}$ $\Rightarrow$ x=$\frac{b}{a}$). 보통 방정식의 풀이는 등식의 성질로부터 도입되지만, 이후에는 이항과 역연산의 알고리즘만이 학습된다. 이항을 이용한 풀이에는 비례관계가 드러나지 않지만, 등식의 성질을 이용한 풀이에는 비례관계를 이용한 추론이 보다 분명하게 드러난다. 이러한 등식의 성질을 이용한 풀이는 초등수학에서 다루었던 비례개념을 중학교 이후의 대수 학습과 연결하여 새롭게 조명해 볼 수 있는 기회를 제공한다. 특히 일차방정식의 경우 비례적 사고는 선형성(linearity)과 함께 방정식의 풀이에서 그 핵심에 놓여 있는 사고 요소 가운데 하나이다.

7) 관계 파악 능력: 관계를 파악하는 능력은 주어진 조건이나 정보를 다양한 형태로 인식하는 능력을 의미한다(Amerom, 2002). 미지인 양과 주어진 양을 파악하여 동치인 두 양으로 표현하고 비교하는 것은 방정식 풀이에서 기본이 된다. 그러나 초등산술에서의 절차적인 특징은 대수 학습에서 주어진 조건들 사이의 관계를 이처럼 파악하기 어렵게 만든다. 이를테면, 방정식에서 복잡한 식을 치환하여 간단한 방정식으로 만든 후 문제를 해결하거나, 방정식을 일련의 과정이 아닌 하나의 대상으로 보는 것은 관계를 전체적인 관점에서 보고 이를 재구성하는 사고를 통해 가능하다. 방정식에서 이러한 관계를 적절히 파악하기 위해서는 식을 대상으로 보는 능력, 관계를 통해 양을 파악하는 능력, 문제 상황을 표현하기 위해 관점을 바꾸는 능력, 문제 결정 요소 간의 관계를 파악하는 능력이 요구된다. 그리고 이러한 능력들은 모두 관계를 파악하는 능력에 따라 결정된다.

8) 가역적 사고: 가역적 사고는 초등학교의 경우 예상과 확인에서 연산의 순서를 바꾸어서 추론하면서 나타나고, 중학교에서는 방정식 풀이의 검산 과정에서 다루어지고 있다. Amerom (2002)은 가역적 사고를 방정식에서 요구되는 본질적인 사고 가운데 하나로, 방정식에서 그 풀이과정과 결과를 확인하기 위한 역할을 한다고 보았다. 방정식에서 해를 검산하는 과정은 달리 표현하면 등식의 참, 거짓을 판단하는 과정으로 곧, 풀이과정을 되돌아보면서 주어진 문제 상황을 반성적으로 종합해서 볼 수 있는 능력을 요구한다. 이러한 일련의 과정은 가역적 사고를 통해 진행되며, 따라서 가역적 사고는 방정식 학습을 위한 대수적 사고 요소 가운데 하나가 된다.

2. 수학 교과서의 분석 및 대수적 사고 요소의 검사 결과

다음으로 학교대수의 학습-지도와 관련해서 문자와 식, 방정식에서 요구되는 대수적 사고 요소들이 초등학교와 중학교 수학 교과서에 어떻게 반영되어 있는지를 분석하였다.[6]

제7차 수학과 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에는 문자 기호를 사용한 형식적 표현을 직접적으로 다루지는 않지만, 대수적 사고 요소를 반영하고 있을 것으로 추측되는 초등학교 수학 교과서 4-가 단계에서부터 6-나 단계까지 문제 푸는 방법 찾기 단원에서 제시된 문제해결 전략을 중심으로 이를 확인하였다. 그 결과 초등학교에서는 대수적 사고 요소 가운데 양적 추론과 대수적인 해석, 관계 파악하기 등은 자주 등장하는 것으로 밝혀졌다. 양적 추론은 문제 상황에서 주어진 자료와 조건 속에서 포함된 양을 대상으로 보고 양 사이의 관계를 파악하는 것으로, 초등학교에서 많은 문제에서 양적 추론이 가능하다는 것을 확인할 수 있었다. 대수적인 해석은 문제 상황을 간단하게 정돈하거나 규칙을 식으로 표현할 때, 주어진 양 사이의 관계를 파악하여 식을 세울 때 반영되어 있었다. 초등학교에서는 간단하게 수식을 세우는 경우도 있고, □, △와 같은 시각적인 기호를 사용하여 식을 세우기도 하는데, 이러한 표현은 대수적인 해석을 바탕으로 한다. 방정식에서 요구되는 대수적 사고 요소 중 초등학교에서 가장 많이 포함되어 있는 것은 관계를 파악하는 능력이었다. 이는 예상과 확인, 거꾸로 풀기, 그림 그리기, 간단히 하기, 식 세우기 등 초등학교에서 다루는 문제해결 전략 대부분은 주어진 조건 사이의 관계를 적절히 파악하는 과정을 필요로 하기 때문이다. 한편 변수와 미지수는 각각 변하는 양과 미지의 양으로 초등학교수학에서 확인할 수 있었다. 변수는 간단히 하기나 표 만들기, 규칙 찾기 문제에 반영되어 있는 것으로 나타났다. 학생들은 문제에서 일정한 패턴을 탐구하면서 변하는 양에 주목하게 되고, 그 가운데 규칙이 성립하는지 파악하면서 변수 개념의 초보적인 형태를 경험할 수 있다. 이에 비해 예상과 확인, 거꾸로 풀기, 식 세우기와 같은 전략을 다루는 문제에서는 미지수와 관련된 사고 과정이 반영되어 있다. 문자와 식과 관련된 대수적 사고 요소에서 변환추론과 연산감각, 관점의 전환, 대입 등은 초등학교 수학에서 많이 고려하지 않

6) 교과서 분석은 초등학교 수학의 '문제 푸는 방법 찾기' 단원과 중학교 수학의 '문자와 식', '방정식' 단원으로 제한하고 있는데, 이는 본 연구가 대수 도입과 관련해서 산술과 대수 사이의 비교·분석을 목적으로 하며, 이를 위해 7차 교육과정에서 '문자와 식' 영역에 해당하는 대표 단원을 초등학교와 중학교에서 각각 추출했기 때문이다.

는 사고 요소였다. 반면 대입은 표를 만들거나 식을 세워서 문제를 해결할 때 이미 만들어진 표와 식을 확인하려는 의도로 사용하는 경우에 발견할 수 있었다. 방정식과 관련해서는 분석적 사고와 비례적 사고, 가역적 사고가 드물게 확인되었다. 분석적 사고는 □를 이용하여 식을 세우고, 방정식과 비슷한 방법으로 조작하는 과정에서 나타났으며, 문제 상황 자체가 비와 관련된 것일 때 비례적 사고를 확인할 수 있었다. 가역적 사고는 연산의 순서를 바꾸어 생각하거나 해결과정 전체를 살펴보면서 반성적으로 추론할 때 나타났다. 한편 대수적인 원리와 문제해결 도구로 인식하기는 문자 기호의 사용을 염두에 둔 사고 요소이기 때문에 초등학교에서 발견하기 어려웠다. 그리고 초등학교에서의 등호 사용은 대칭성과 관련된 등호해석이나 동치개념은 전혀 고려하지 않는 것으로 확인되었다. 물론 등호를 사용하기는 하지만 동치관계를 나타내는 것으로 볼 수 없으며, 단지 계산 과정의 일부 또는 계산 흐름을 나타내는 기호 정도로 다루고 있었다.

중학교 수학 교과서에서는 초등학교 교과서에서와 같이 문자와 식을 다룰 때에는 변수와 더불어 양적 추론을 하도록 하고 있으나, 방정식을 다룰 때에는 미지수를 고려하지 않을 때 양적 추론을 하도록 하고 있다. 초등학교 교과서에서 전혀 고려하지 않던 대수적 사고 요소인 등호해석과 동치개념을 직접적으로 다루고 있다. 초등학교와 달리 중학교에 와서는 등호를 대칭적으로 해석하고 동치개념을 이용하는 명시적인 대수적 접근을 하고 있다. 문제해결 도구로 인식하기 역시 중학교 교과서에서 처음으로 고려되는 대수적 사고 요소이다. 초등학교 교과서에서도 미지인 값을 □나 ○을 사용하여 식을 세우는 과정 가운데 분석적 사고가 암묵적으로 내재되어 있다고 보아야 하지만, 중학교 교과서에서는 미지수 x를 명시적으로 다루고 있으므로 분석적 사고가 (비록 의식적인 지도가 이루어지지는 않는다고 하더라고) 보다 분명하게 사용되고 있는 것으로 확인되었다. 초등학교 교과서에서 가장 많이 다루었던 대수적 사고 요소인 대수적 해석과 관계를 파악하는 능력은 중학교 교과서에서도 문제해결의 중심적인 요소로 다루어지고 있었다. 약화된 형태로 다루어지거나 거의 다루어지지 않았던 변환추론과 연산감각의 경우도 일차식을 변형하고 조작하는 과정에서 분명하고 적극적인 형태로 다루어지고 있었다. 중학교 교과서는 초등학교 교과서에서 전혀 다루지 않거나 약화된 형태로 다룬 대수적 사고 요소를 문자 기호를 도입하여 보다 직접적이고 명시적으로 다룬다는 특징이 있다. 이상과 같은 교과서 분석 결과 초등학교 교과서의 '문제 푸는 방법 찾기' 단원에서 제시된 문제해결전략 속에서 대수적 사고 요소를 찾을 수 있으며, 중학교 교과서에서는 '문자와 식', '방정식' 단원에서 보다 구체적인 대수적 사고 요소를 확인할 수 있었다.

한편 이러한 교과서의 내용이 학생들의 대수적 사고 능력으로 어떻게 드러나는지를 확인하기 위해 검사와 면담을 실시하였다. 초등학교 교과서의 '문제 푸는 방법 찾기'에 제시된 문제를 변형하여 <검사1>을 구성하고, 중학교 교과서의 '문자와 식', '방정식'에 제시된 문제를 변형하여 <검사2>를 구성하였다. 다음은 검사1, 2의 예시 문항이다.

<검사1> 문제3.
현서는 친구들을 만날 때마다 자신의 사과 바구니에서 전체 사과의 반에 한 개를 더한 개수만큼을 친구에게 건네준다. 세 명의 친구를 만난 다음, 현서의 사과 바구니에는 1개의 사과가 남아 있었다. 처음 현서의 사과 바구니에는 몇 개의 사과가 있었는가?

<검사2> 문제6.

기온이 t℃일 때, 공기 중에서 소리의 속력은 다음과 같은 것으로 알려져 있다.

$$331+0.6t \ (m/s)$$

기온이 a℃일 때, 소리의 속력은 339 m/s였다. 기온이 2a℃일 때, 소리의 속력은 얼마인가?

<검사1>의 목적은 문제해결전략에 직간접적으로 반영되어 있는 대수적 사고 요소가 어떤 형태로 학습되어 있는가를 확인하는데 있다. 문항에 대한 정답률을 비롯하여 서술형 답안의 내용을 분석하여 어떤 대수적 사고 요소가 얼마나 사용되고 내면화되어있는지를 검토하였다. <검사2>의 목적은 중학교에서 문자와 식, 방정식을 학습하면서 대수적 사고 요소가 어떻게 학생들에게 내면화되어 있는가를 알아보는데 있다. 그리고 검사에서 확인되지 않거나 불분명한 사고 요소에 대해서는 면담을 실시하여 확인하고자 하였다[7]. 검사와 면담 결과를 종합할 때, 면담 대상이었던 중학교 1학년 학생들 대부분은 대수적 사고 요소와 관련된 문항에서 낮은 정답률을 보였으며, 문자 기호의 사용이나 대수적인 해석, 관계 파악하기 등에서 이러한 사고 요소들과 대수 학습과의 관련성을 충분히 인식하지 못한 것으로 드러났다. 이러한 조사 결과는 대수 학습의 개선과 관련해서 보다 분명한 대수적 사고 요소의 지도가 학교대수에서 필요하다는 것을 의미한다.

Ⅴ. 대수적 사고 요소의 지도 방향

대수적 사고는 대수 자체가 가지고 있는 추상성, 형식성 때문에 교수학적 변환 과정을 어렵게 하는 측면이 있다. 그러므로 학교 대수에서 사고 측면을 강조하려는 시도가 끊임없이 이루어지고 있음에도 불구하고 계속해서 교육과정과 교과서 개선의 필요성이 제기되고 있다. 이를테면, Kaput & Blanton(2001)은 학교대수에서 대수적 사고의 개발을 대수 학습을 개선하는데 핵심적인 것으로 보고, 대수적 사고를 학생뿐만 아니라 교사에게까지 교육시킬 필요가 있다고 주장하였다. 더욱이 대수 학습을 주도하는 교사들조차 대수 학습의 핵심적인 내용 요소인 변수에 대하여 극히 제한된 개념을 가지고 있으면서, 학생들을 지도할 때에도 자신의 불완전한 변수 개념을 반영한다는 김남희(1997)의 연구는 우리나라에서의 대수교육 개선이 단기간에 이루어지기 어렵다는 것을 시사한다.

한편 지금까지 분석한 대수적 사고 요소는 반드시 동등한 비중으로 모든 문제에 반영되고 모든 수업에서 강조되어야 하는 것은 아니다. 오히려 추상적이고 형식적인 대수적 사고를 위한 신중한 접근을 목표로 서로 관련되는 사고 요소를 적절히 조합하는 것이 중요하다. 사실상 16개의 사고 요소는 완전하게 구분되는 것이라기보다는 내적으로 밀접하게 관련되어 있어서 몇 가지 요소의 조합에 의하여 그 의미가 드러나는 경우가 많다. 이를테면, 양적인 추론은 그 자체만으로 다루어지기보다 관계를 파악하는 과정과 종종 연결되며, 변수 개념 역시 대수적인 해석이나 관점의 전환 등과 관련을 맺는 경우가 많다. 이렇게 서로 결합되어 있는 것을 굳이 각각의 사고 요소로 독립시킨 것은 그만큼 대수가 복합적이고 다차원적인 특성을

7) 본 연구에서 실시한 면담의 형식은 반구조화된 집단면담(1차면담: 6명(2003년 11월 10일), 2차면담: 3명(2003년 11월 12일))으로, 면담대상 학생은 문항 검사에서 대수적 사고 요소로 여겨지는 풀이방법을 제시한 학생들을 선발하였다. 또한 연구자가 문항 검사에서 발견한 대수적 사고 요소에 대해 이를 학생들과의 면담을 통해 확인하기 위해 두 차례 면담이 실시되었으며, 이를 통해 교과서에 제시된 대수적 사고 요소와 학생들이 보유하고 있는 대수적 사고 요소 간의 간격을 확인하고자 하였다.

내포하고 있어 상황에 따라 그러한 여러 측면이 적절하게 고려되어야 한다고 보았기 때문이다. 그러므로 대수적 사고 요소를 지도하기 위한 구체적인 방향을 도출함에 있어서는, 사고 요소를 어떤 관점에 비추어 조합하고 어떤 식으로 다룰 것인가에 관한 보다 종합적인 관점이 필요하다. 이하에서는 이러한 대수적 사고에 관한 이론적 고찰과 우리나라에서 현재 이루어지고 있는 대수적 사고 교육의 실태 조사 결과를 종합하여 대수적 사고 요소의 지도 방향으로 다음 세 가지 관점을 도출하고자 한다.

1. 과정-대상의 상호작용

대수적 사고의 성장은 일련의 과정이 대상으로 추상화되고 그것이 구조화되는 가운데 이루어져 왔음을 확인한 바 있다. 한 수준에서 구체적인 과정에 머물러 있던 것이 추상적인 대상으로 실재화(reification)되고, 이렇게 실재화된 것이 보다 높은 수준에서 조작됨으로써 구조화되고 체계화되는 가운데 대수적 사고가 발달하는 것이다. 학교대수에서 대수적 사고 요소를 지도할 때, 이러한 과정-대상의 상호작용을 유기적으로 반영할 필요가 있다.

초등학교에서는 주로 수와 수의 계산에서 비롯되는 과정이나 절차를 중요하게 학습한다. 중학교에서는 문자 기호의 도입과 함께 문자 기호 자체에 주목하며, 문자 기호로 표현되는 대수식이나 방정식에 초점을 둔다. 이는 과정에서 대상으로의 관점 이동이라고 할 수 있으며, 대수의 역사를 단축하여 반영한 것으로 볼 수 있다. 그러나 단순히 문자 기호를 제시하는 것으로는 대수의 역사에서 일어난 관점의 이동이 재현되기 어렵다. 산술에서 대수로의 이행에 관한 많은 연구가 이렇게 관점의 이동이 원활하게 일어나지 않는 것에 주목하는 이유가 바로 이것이다. 이를테면, 등호에 관한 Kieran (1980)의 연구에서는 계산 결과를 도출하라는 뜻을 지닌 산술적 의미의 등호에서 동치관계를 나타내는 대수적 의미의 등호로 이행할 수 있는 방안을 제시하고 있다. 그리고 방정식에 관한 Filloy & Rojano(1994)의 연구에서는 방정식의 조작에서 산술방정식과 대수방정식을 구분하고 기하 모델 등을 이용하여 산술에서 대수로의 관점의 이동을 도모하고자 노력하고 있다. 이론적 논의를 통하여 그리고 실태 분석을 통하여 과정에서 대상으로의 관점 이동이 얼마나 이루어지기 어려운가를 확인할 수 있다. 달리 말하면, 과정에서 대상으로의 관점 이동은 과정과 대상에 초점을 두고 단계적으로 제시되는 교육과정이나 교과서, 수업만으로는 이루어질 수 없는 것이다. 결국 과정에서 대상으로의 관점 이동이 원활하게 이루어지고 그 의미가 충분히 다루어지기 위해서는 과정과 대상의 상호작용이 초등학교와 중학교에서 각각 적절하게 이루어지도록 해야 한다는 것을 알 수 있다.

과정과 대상의 상호작용은 과정을 다루면서 대상을, 대상을 다루면서 과정을 생각할 수 있어야 한다는 것을 의미한다. 과정이 과정 자체에만 머무르고 대상이 대상 자체에만 머무른다면 상호작용은 전혀 일어나지 않을 것이다. 초등학교에서 수의 산술을 다루는 동안 대수적 사고로의 확장 가능성을 고려하고, 중학교에서 문자와 식을 하나의 대상으로 보고 다루는 동안 산술적 사고와의 역동적인 관련을 고려하는 것이 중요하다. 문제 상황에서 제시된 자료의 양적 측면을 의미 있게 고려하고 조건 사이의 관계를 해석하면서 전체에 대한 해석을 내려보는 등 대수적 사고 요소에 초점을 둔 활동을 통하여 과정과 대상 사이의 상호작용을 꾀할 수 있으며, 이것이 산술에서 대수로의 이행은

물론이고 대수적 사고의 본질을 경험하게 하는 기회를 제공할 것이다. 이러한 이유에서 과정-대상 상호작용을 대수적 사고 요소 지도의 첫 번째 기본 방향으로 본 것이다.

2. 의미, 지시 대상, 표현 사이의 균형 추구

일반적으로 대수적 사고는 기호의 구문론적 조작을 하는 가운데 나타나며, 기호 조작이 이루어지는 방법과 형태에 따라 그 의미가 다르게 파악될 수 있다. 특히 대수 학습에서 기호의 조작은 문제 상황에 따라 다양하게 나타나므로, 기호를 의미와 지시 대상, 표현과 관련하여 파악하는 것은 쉽지 않다. 대수 기호를 조작하는 동안 의미, 지시 대상, 표현이 바뀌는 상태가 발생한다. 이러한 대수적 언어에 대한 불충분한 이해가 대수적 사고를 가로막고 기호의 형식적 조작에 의한 맹목적인 학습을 야기하는 원인 중의 하나가 된다. 이 글에서 실시한 실태 조사를 통하여, 학생들 대부분이 문제 상황 속에 반영된 자료의 의미와 관계, 표현 방법을 충분히 이해하지 못하고, 대수적 사고 능력에 의해서가 아니라 초보적인 시행착오 전략 또는 의미가 배제된 형식적인 계산 규칙의 적용에 의하여 문제해결을 시도한다는 것을 확인하였다. 심지어는 문제에 제시된 수를 우연적으로 조합하여 문제해결을 시도하는 학생도 있었다. 이는 기호 표현의 외연과 내포가 학생들의 사고 과정에서 유기적으로 연결되지 못하고 있다는 증거이며, 이러한 현상이 반복된다면 대수 학습은 결코 개선되지 못할 것이다. 그러므로 문제 상황에서 문자 기호를 사용하여 의미 있는 관계를 표현하고 해석하고 변형하는 조작에 주목하도록 하는 것이 대수적 사고 교육의 핵심이 된다는 것을 알 수 있다.

의미와 지시 대상, 표현 사이의 균형을 추구한다는 것은, 주어진 자료의 의미를 규칙과 구조, 관계 등의 측면에서 파악하고 문자 기호로 표현하며, 기호에 대한 조작이 어떤 의미를 갖고 원래 문제에서 제시한 자료와 어떻게 관련되는가를 파악하는 등의 활동을 하는 것을 의미한다. 양적인 추론에 기초하여 대수적인 해석을 내릴 때, 관계를 파악하고 관점을 전환할 때, 분석적으로 추론하고 방정식을 문제해결 도구로 인식할 때, 이러한 의미, 지시 대상, 표현 사이의 관계에 대한 인식이 부분적으로 또는 전체적으로 관여된다. 학교대수에 대수적 사고 요소를 반영한다는 것은 낱낱의 사고 요소를 모종의 순서성을 갖추어 연습하는 과정을 의미하는 것이 아니라, 의미, 지시 대상, 표현 사이의 균형을 추구하는 가운데 대수적 사고 요소를 적절히 조합하여 경험하게 하는 것을 의미하는 것이다. 그러므로 의미, 지시 대상, 표현 사이의 균형 추구를 대수적 사고 요소 지도의 두 번째 기본 방향으로 제시한다.

3. 산술과의 환원 시도

van Hiele(1982)는 수학 학습은 사고하는 것을 학습하는 것이라고 하면서, 학생들의 사고 수준을 파악하여 그에 따른 교육을 하는 것이 중요하다고 주장하였다. 그에 따르면 수학적 사고 활동은 경험 세계를 조직하는 활동이며, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지면서 그 다음 수준으로 비약하는 과정을 반복하는 바, 수학의 학습-지도는 그러한 불연속적인 사고 수준을 거치면서 수학적 사고를 재발명하도록 하는 것이다. 그는 이러한 생각에 기초하여 기하 학습 수준 이론을 제안하였으며, 일반적으로 수학 학습 수준을 시

각적 수준, 기술적 수준, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 이론적 수준, 형식적인 연역체계를 파악하는 수준, 논리적 법칙의 본질을 파악하는 수준으로 구분하였으며, 이것을 산술과 함수 등에 적용하고자 시도하였다.[8]

van Hiele는 수학 학습은 시각적 수준 즉, 기초 수준에서부터 시작하는 것이 바람직하다고 보았으며, 이러한 관점에서 시각적 수준을 강조하였다. 그는 산술에서의 시각적 수준을 구체적 대상으로, 함수에서의 시각적 수준을 함수 기계로 설명하였다. 그러나 산술이나 함수에서와 달리, 대수 학습을 위한 시각적 수준은 존재하지 않으며, 또 대수 학습에서는 매 순간마다 산술로의 환원(reduction, 수준 내리기)이 필요하기 때문에 대수 학습 수준을 구분하기가 쉽지 않다고 보았다.

대수적 사고의 의미와 대수적 사고 요소를 분석한 결과, 대수의 학습 수준을 일차원적으로 정돈하여 제시하는 것이 불가능하다는 판단에 이르렀다. 그러므로 대수적 사고 요소를 지도함에 있어서도 각 사고 요소를 고려하는 순서나 비중에 대해서 명확한 지침을 제시하기는 어렵다. 앞서 언급한 바와 같이 대수적 사고 요소는 문제 상황 속에 적절히 조합하여 다루어야 하며, 상황에 따라 다루어지는 사고 요소의 역할과 비중이 어떻게 달라지는가를 의식하고 조정하는 것이 필요하다. 초등학교와 중학교에서 대수 학습과 관련하여 제시하는 문제 상황 이를테면, 앞서 초등학교와 중학교 교과서 분석에서 제시된 문제 등에서 어떤 사고 요소가 어떤 식으로 조합되어 반영되었는지 분석한 결과를 참고하여 교사 개인의 보다 세밀한 교수학적 분석과 이해가 이루어져야만 대수적 사고 교육이 이루어질 것으로 생각한다.

대수 학습에서 산술로의 환원이 필요하다는 van Hiele의 주장은 이 연구에서 실시한 검사 문항에 대한 학생들의 반응을 참고할 때, 반드시 고려되어야 한다. 학생들은 중학교에 와서 배운 방정식으로 간단하게 해결되는 초등학교 문제에 성공적으로 대처하지 못하였다. 이는 중학교에서 문자 기호를 도입하는 맥락과 의의, 방법 등을 초등학교 때 다루었던 산술적 상황과 관련짓지 못한다는 증거가 된다. 산술로의 환원을 보다 적극적으로 시도해야만 학생들의 사고 과정에서도 산술적 상황으로의 회귀와 대수적 상황으로의 발전이 원활하게 이루어질 것이다. 이러한 의미에서 산술로의 환원을 대수적 사고 요소 지도의 세 번째 기본 방향으로 제시한다.

Ⅵ. 결 론

본 연구의 내용은 크게 두 가지로 정리된다. 하나는 대수적 사고의 본질을 분석하여 학교대수에서 대수적 사고의 지도와 그에 대한 평가와 반성을 할 수 있는 이론적 토대를 마련하고자 한 것이다. 이를 위하여 역사-발생적 관점, 인식론적 관점, 기호-언어학적 관점에서 대수적 사고를 분석하여, 대수에 내재된 사고의 본질을 규명하고자 하였다. 다른 하나는 학교수학에 대수적 사고가 반영된 양상과 학생들의 대수적 사고 능력을 확인하고, 이에 기초하여 대수적 사고를 중심으로 한 학교대수의 학습-지도 방안을 모색한 것이다. 이를 위해 초등학교와 중학교 교과서를 분석하여 대수적 사고 요

8) 이를테면, van Hiele(1982)는 ≪Structure and Insight≫에서 산술에서의 수준을 설명하면서, 시각적 수준은 구체적인 대상을 통해 전개되며, '수'는 산술에서 기술적 수준에 포함된다고 보았으며 연산법칙을 사용하여 새로운 수가 만들어지는 과정을 이론적 수준으로 보았다.

소가 어떤 형태로 제시되고 있는지를 검토하였으며, 학생들을 대상으로 대수적 사고 능력 검사와 면담을 실시하여 대수 학습의 실태를 분석하였다. 그리고 이러한 결과를 토대로 대수 도입에서 대수적 사고 요소를 중심으로 하는 대수 학습-지도 방안을 제안하였다.

대수적 사고 교육에서는 대수 자체의 형식이나 추상성으로 인해 교수학적 변환 과정을 생각하는 것이 쉽지 않다. 이는 학교대수에서 사고 측면을 강조하려는 시도가 끊임없이 이루어지고 있음에도 불구하고, 계속해서 교육과정, 교과서 개선의 필요성이 제기되고 있는 이유가 된다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 대수적 사고의 본질을 분석하는 것이 대수 학습을 개선하고자 하는 논의에서 중요하다는 것을 지적하였다. 그리고 대수적 사고를 학교대수에 적용하는 과정에서 대수적 사고 요소를 추출하였으며, 현행 초등학교와 중학교 수학 교과서에 대수적 사고 요소가 얼마나 또 어떤 식으로 반영되어 있는가, 학생들에게는 어떤 대수적 사고 능력이 발견되는가를 분석하였다. 이러한 일련의 과정을 통해 본 연구에서는 현재 우리나라의 대수적 사고 교육 실태와 문제점, 가능성을 확인하였다. 그리고 대수적 사고에 관한 이론적 고찰과 우리나라에서 현재 이루어지고 있는 대수적 사고 교육의 실태 조사 결과를 종합하여 대수적 사고 요소의 지도 방향에 대해 논의하였으며, 그러한 지도 방향을 토대로 대수적 사고 요소의 구체화를 시도하였다.

본 연구에서는 대수적 사고를 학교대수에서 반영하는 것을 대수교육의 기본 개선 방향으로 가정하였으며, 대수 학습-지도에서 대수적 사고 요소를 구체화함으로써 그동안 문제가 되어 왔던 대수 입문기의 교육을 개선하기 위한 방안을 탐색하였다. 본 연구에서 제시한 대수적 사고 요소를 중심에 둔 학교대수의 지도 방안이 실제 대수교육을 개선하는 데 반영될 수 있기를 기대한다. 또한 후속 연구를 통해, 본 연구에서 제시한 대수적 사고 요소의 지도 방안이 초등학교의 산술 단계에서, 중학교의 대수 입문기에서, 그리고 본격적인 대수 단계에서 보다 세분화되고 보완되어 대수 교육과정을 비롯한 대수교육 전반의 개선이 함께 이루어질 수 있기를 기대한다.

참고문헌

강옥기 외 2인 (2001). **중학교 수학 7-가.** (주) 두산.

김남희 (1997). **변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색.** 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

김성준 (1995). **산술에서 대수로의 전이에 관한 고찰.** 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

양승갑 외 6인 (2001). **중학교 수학 7-가.** (주) 금성출판사.

Amerom (2002). *Reinvention of early algebra.* Freudenthal Institute.

Arzarello, F. & Bazzini, L. & Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, et al. (eds.), *Perspectives on school algebra.* Kluwer Academic Publishers.

Bell, A. (1996). Algebraic Thought and the Role of a Manipulable Symbolic Language. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra* (pp.151-154). Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, Berkshire: NFER-Nelson.

Boulton-Lewis, Cooper, T., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L. & Mutch, S. (1997). The transition from arithmetic to algebra; a cognitive perspective. *Proceedings of 21st conference of International Group for the* PME. Vol. 2 (pp.185-192).

Chalouh, L. & Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. In A. Coxford & A. Shulte (eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp.33-42). Reston, VA: NCTM.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and Its Relation to Geometry. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra* (pp.15-37). Kluwer Academic Publishers.

Davis, R. B. (1983). Complex mathematical cognition. In H. Ginsburg (ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp.254-290). Academic Press, New York.

Davis, R. B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(3), 7-35.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in *advanced mathematical thinking*. In D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp.95-123). Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E. & Rojano, T. (1994). Algebra Reasoning in Elementary Mathematics -- Theory and Practice. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (22nd, Tucson, Arizona, October 7-10, 2000). Volumes 1-2.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9(2), 19-25.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer Academic Publishers.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 115-141.

Greeno, J. (1983). Conceptual entities. In D. Gentner & A. Stevens (eds.), *Mental Models* (pp.227-252). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78

Kaput, J. (1997). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "Algebrafying" the K-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics & Mathematical Sciences Education Board (Eds.), The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a National Symposium (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical thinking and Problem solving* (pp.77-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience Part I: Transforming task structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 344-351). The University of Melbourne, Australia.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. Coxford & A. Shulte (eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp.91-96). NCTM, Reston, VA.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

Kieran, C. (1980). Constructing Meaning for the Concept of Equation, *Mathematics Teacher;* vol. 73(8), 572-580.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1999). Prealgebra: The Transition from Arithmetic to Algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K-12* (pp.59-70). NCTM, Reston, VA.

Küchemann(1981). Algebra. In K. Hart, et al. (eds.), *Children's Understanding of Mathematics:11-16.* The CSMS Mathematics Team.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is.* PhD Thesis; Shell Centre for mathematical education, University of Nottingham, UK.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. Journal of Mathematical Behavior, 14(1), 113-120.

Lodholz, R. (1999). The transition form arithmetic to algebra. In B. Moses (ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 52-58). NCTM, Reston, VA.

Matz, M. (1979). *Towards a process model for high school algebra errors.* Working paper (181) . Cambridge: Massachusetts Institute of Technology.

Melillo, J. A. (1999). An Analysis of Students' Transition from Arithmetic to Algebraic Thinking. Kent State University Thesis (Ph. D.).

National council of teachers of mathematics. (1997). A framework for constructing a vision of algebra. In National Council of Teachers of Mathematics & Mathematical Sciences Education Board (Eds.), The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a National Symposium (pp. 145-190). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Petitto, A. (1979). The role of formal and non-formal thinking in doing algebra. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 2*(2), 69-82.

Radford, L. (2001). The Historical Origin of Algebraic Thinking. In R. Sutherland, et al. (eds.), *Perspectives on school algebra* (pp.13-36). Kluwer Academic Publishers.

Radford, R. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra* (pp.107-111). Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. (1995). The development of algebra:

Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 15-39.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Smith, J & Thompson, P. (2005). Quantitative reasoning as a foundation for the development of algebraic reasoning. In J. Kaput (ed.), *Employing children's natural powers to build algebraic reasoning in the content of elementary mathematics.*

Sutherland, R. (2005). A dramatic shift of attention: From arithmetic to algebraic thinking. In J. Kaput (ed.), *Employing children's natural powers to build algebraic reasoning in the content of elementary mathematics.*

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E. & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process?. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 223-241.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp.8-19). NCTM, Reston, VA.

van Hiele, P. M. (1982). The groundlevel of the thinking in algebra especially with regard to the concept of function. *Conference on functions, report 1.* Foundation for curriculum development.

Wheeler, D. (1996). Backwards and Forwards: Reflections on Different In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra* (pp.317-325). Kluwer Academic Publishers.

Analysis of the Algebraic Thinking Factors and Search for the Direction of Its Learning and Teaching

Woo, Jeong Ho(Seoul National University)
Kim, Sung Joon(Busan National University of Education)

School algebra starts with introducing algebraic expressions which have been one of the cognitive obstacles to the students in the transfer from arithmetic to algebra.

In the recent studies on the teaching school algebra, algebraic thinking is getting much more attention together with algebraic expressions. In this paper, we examined the processes of the transfer from arithmetic to algebra and ways for teaching early algebra through algebraic thinking factors.

Issues about algebraic thinking have continued since 1980's. But the theoretic foundations for algebraic thinking have not been founded in the previous studies. In this paper, we analyzed the algebraic thinking in school algebra from historico-genetic, epistemological, and symbolic-linguistic points of view, and identified algebraic thinking factors, i.e. the principle of permanence of formal laws, the concept of variable, quantitative reasoning, algebraic interpretation - constructing algebraic expressions, trans-formational reasoning - changing algebraic expressions, operational senses - operating algebraic expressions, substitution, etc.

We also identified these algebraic thinking factors through analyzing mathematics textbooks of elementary and middle school, and showed the middle school students' low achievement relating to these factors through the algebraic thinking ability test. Based upon these analyses, we argued that the readiness for algebra learning should be made through the processes including algebraic thinking factors in the elementary school and that the transfer from arithmetic to algebra should be accomplished naturally through the pre-algebra course. And we searched for alternative ways to improve algebra curriculums, emphasizing algebraic thinking factors.

In summary, we identified the problems of school algebra relating to the transfer from arithmetic to algebra with the problem of teaching algebraic thinking and analyzed the algebraic thinking factors of school algebra, and searched for alternative ways for improving the transfer from arithmetic to algebra and the teaching of early algebra.

* **Key words** : school algebra(학교대수), teaching early algebra(초기대수의 지도), teaching algebraic expressions(대수식의 지도), algebraic thinking(대수적 사고), algebraic thinking factors(대수적 사고 요소), transfer from arithmetic to algebra(산술에서 대수로의 전이)

논문접수: 2007. 9. 23
심사완료: 2007. 11. 13