대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 4, 437-452. Nov 2007

# 수학교육에서 상보성

강 현 영* · 이 동 환**

그동안 수학교육에서는 상보성, 상보적 원리, 상보적 접근이라는 말이 자주 사용되어 왔으나 그 의미가 분명하지 않았다. 따라서 이 글에서는 수학적 지식의 상보적 특성을 살펴봄으로써 그 의미를 명확히 하고자 하였다. 먼저 일반적인 상보성의 의미를 살펴보고, 통약불가능성과 제논의 역설을 통해 수학적 개념의 상보적 특징을 고찰하도록 한다. 이를 바탕으로 학교수학에서 상보적인 접근을 고찰하였다. 학교수학에서 수학적 개념에 대한 상보적 특성을 이해하고 드러내는 것은 그 개념에 대한 통찰을 가능하게 하고 명확하고 올바로 이해하게 한다. 따라서 학생들은 단편적인 정보와 규칙의 기계적인 적용이 아닌 살아있는 체계로서 수학의 이미지를 가질 수 있다.

## Ⅰ. 서 론

흔히 개념과 언어(언어적 표현, 기호)는 동일한 것으로 이해된다. 그것은 아마 개념 획득의 증거가 일반적으로 언어로 표현되기 때문일 것이다. 그러나 '언어가 개념을 표현한다'고 말하더라도 '표현하는 것'으로서의 언어가 '표현되는 것'으로서 개념과 동일할 수는 없다. 언어가 개념을 표현하는 것은 사실이지만, 개념은 여러 형태, 여러 차원의 언어적 표현을 허용하기 때문이다. 이러한 점이 기호로 표현되어 있는 수학의 개념을 이해하는 데 어려운 점일 것이다.

> 수학적 개념(대상)은 그것의 가능한 모든 표상들의 총체(totality)와 독립적으로 존재하는 것이 아니며, 그렇다고 그 개념(대상)을 그러한 표상과 혼동해서도 안 된다.(Otte, 2003a, 2003b, 2006)

모든 수학적 활동은 수학적 대상 그 자체보다는 그것의 표상과 관련이 있으며, 주어진 표상을 계속해서 다른 것으로 변형하는 과정으로 곧 표상적인 등식 A=B를 정립하는 과정이다. 이 과정에서 나타나는 표상들을 가리켜 표상들의 총체라고 할 수 있으며, A와 B가 대상을 직접 표현하는 것이 아니라, 표상들의 총체가 수학적 대상을 상보적으로 표현하고 있다. 우리는 등식 A=B를 통해, 역설적이지만 두 표상이 같으면서 다르다고 해석할 수 있다. 수학적 대상은 표상되어야 우리가 대상으로 인식할 수 있다. 그러나 표상되는 순간 그 대상은 이미 표상하고자 했던 것과 다른 새로운 것이다. 바로 이 점 때문에 상보성을 고려해야 하는 것이다.

또한 인식주체와 무관하게 수학적 대상이 고립되어 존재할 수 없다. 인식주체와 대상사이의 관계가 중심이 되어야 하며, 그 과정에서 인식주체의 활동이 지식의 형성에 중요한 역할을 한다. 인식주체는 인지활동에 의해 수학적

* 홍익대학교 강사, sunrayk@empal.com
** 서울대학교 대학원, 2donghwan@paran.com

대상에 대한 표상을 획득하고, 지식을 얻게 되지만, 그것이 지식의 완성은 아니다. 이와는 다른 인지활동에 의해 또 다른 표상을 획득하게 된다. 이것은 수학적 대상을 있는 그대로 단번에 받아들일 수 없는 인식주체의 한계라고 볼 수 있다. 그러나 이러한 한계를 인정하고 각각의 표상들을 상보적으로 수용한다면 수학적 대상을 보다 명확하게 이해할 수 있을 것이다.

학교수학은 학습자 혹은 교사가 이미 기호로 표상된 개념을 이해하는 과정이라고 해도 과언이 아닐 것이다. 수학적 개념 또는 대상을 이해하는 과정에서 수학적 개념의 상보적 특성을 이해하고 드러내는 것은 중요하며, 수학적 개념에 대한 경험적이고 구성적인 연구에 유용하다는 것이 입증되고 있다(Biehler, 2005). 이에 따라 본 논문은 수학적 대상 및 개념이 상보적으로 발달하는 모습을 살펴보고, 이를 학교수학과 관련하여 생각해보고자 한다. 먼저 일반적인 상보성의 의미를 살펴보고, 통약불가능성과 제논의 역설을 통해 수학적 개념의 상보적 특징을 고찰하도록 한다. 이를 바탕으로 학교수학에서 음수와 피타고라스 정리를 소재로 한 상보적인 접근을 고찰하고자 한다.

## II. 상보성

'상보성'이란 1927년 Bohr가 양자역학의 해석을 위한 틀로 도입한 개념으로 원자현상의 입자-파동 이중성 및 위치-속도 측정의 불확정성 등을 이해하는 인식론적 바탕을 제시하고 있다. 간단히 말하자면, 원자세계에서는 우리가 일상생활에서 경험하는 두 종류의 상반되는 명제가 동시에 성립한다고 보는 것이다. 서로 모순되는 두 관점을 상호보완적으로 합쳐서 사용할 때 원자현상을 이해할 수 있고, 그 중 어느 하나만으로는 설명할 수 없다. 대표적인 예로 빛은 파동의 성질과 입자의 성질을 모두 가지고 있다. 빛은 파동의 성질이 나타날 수 있는 실험을 하면 파동성을 보이고, 입자의 성질이 나타날 수 있는 실험을 하면 입자성을 보인다.

상보성 원리는 이렇게 모순되는 현상을 이해하기 위하여 도입한 것으로 물리학적 진술이라기보다는 인식론적 진술에 가깝다. 보어에 따르면, 상보성 원리의 인식론적 의의는 관찰행위가 대상에 미치는 영향과 그에 따른 정보획득(관찰)의 한계에 있다는 것으로, 이는 곧 관찰이 대상에, 동시에 대상이 관찰에, 영향을 주고 있다는 뜻이다. 실제로 물리학보다는 과학철학에서 상보성에 관한 논의가 많이 이루어지고 있으며, Otte, Steiner 등을 비롯하여 여러 학자들이 수학교육에서도 상보성 원리를 인식론의 관점에서 논의하고 있다.

수학적 지식은 주어진 대상에 대한 관찰에만 기초하지 않지만 또한 수학이 논리와 다른 점은 바로 대상이 있다는 점이다. 따라서 인식주관과 무관하게 대상이 고립되어 존재할 수 없다. 그 대상은 표상되어야 우리가 대상으로 인식할 수 있다. Kant가 말하였듯이, 개념은 사물 그 자체보다는 사물의 직관이나 정신적인 표상에 적용되는 것이다. 그러나 표상되는 순간 그 대상은 이미 표상하고자 했던 것과 다른 새로운 것이 된다. 바로 이점 때문에 상보성을 고려해야 하는 것이다.

모든 지식은 주체와 대상 그리고 주체의 활동[1]에 의해 확립되는 관계를 전제로 하며(Otte, 1990: 39), 모든 지식은 뚜렷하게 이중 구조를 가지게 된다. 지식의 이론적인 일반화 그리고

1) 수학적 활동에는 이론을 정립하는 활동과 문제 해결 활동이 있는데, 이 두 측면은 수학에서 상대적이다.

그 지식의 적용의 맥락에서 야기되는 이론의 틀은 상호대립하게 된다. 이 대립은 본질적이지만 단 한 번에 해결될 수 없기 때문에 지식에 대한 일반적인 이중형태를 초래한다. 이 이중형태를 '상보성(complementarity)'이라고 부른다(Jahnke & Otte, 1982: 98).

특히, Otte는 보어의 설명에서 '관찰행위가 대상에 미치는 영향'을 인지적 활동으로, '대상으로부터의 정보획득'을 수학적 실체에 대한 정의로 재해석하여, 다음과 같이 주장하였다(2003: 205).

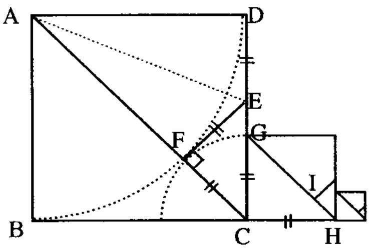
> 나는 (인식주체의) 인지적 활동과 무관하게 수학적 실재(reality)를 정의하는 것이 불가능하다는 점에 근거하여 수학적 대상에 대한 상보적 접근을 제기한다.

수학적 개념이 발달하는 과정에서 인식주체의 인지활동으로 인하여 수학적 개념은 상보적 특성을 가지게 된다는 것이다. 즉 수학적 개념은 서로 대립되는 영역이나 요소들이 서로 모자란 부분을 보충하는 관계를 맺으면서 발달하는 것이다. 수학사를 보면, 이산과 연속은 계속 대립하는 관계를 이루어 왔으며, 이에 따라 산술과 기하라는 두 줄기로 발달하였다고 볼 수 있다. 그러나 수학적 대상이나 개념은 각 분야에서 독자적으로 발달하는 것이 아니라 서로에게 토대를 두면서 상보적인 발달을 하며 비로소 그 개념이 올바르게 표상되거나 이해된다. 즉, 수학에서는 기하와 산술, 이산과 연속 등에 근거한 두 가지 대립적인 인지 활동이 수학적 대상의 이해에 상보적인 역할을 한다고 할 수 있다.[2] 이에 따라 다음 절에서는 수학적 지식을 이해하는 데 있어서 이산과 연속, 산술과 기하가 주요한 상보적인 역할을 하고 있음을 살펴 볼 것이다.

## III. 산술과 기하 사이의 상보성: 통약불가능성

Otte(1990: 44)에 따르면, 사물의 본질을 확정된 방식이나 단번에 모든 것을 나타내는 상징적 기호로 이론화하는 것은 불가능하다. 이 보다는 본질 그 자체는 새로운 형식과 관점으로 자신의 모습을 무한히 드러내는 과정에 가깝다는 것이다. 앎은 '알고 있는 것'과 '알게 되는 것'이라는 두 가지 점을 함의하고 있다. 결국 수학에서의 상보성은 다른 관점의 존재에 의존한다는 것으로 이러한 이질적인 영역이 사고의 발달에서 완벽하게 대칭적인 역할을 한다는 것이다. 다시 말해, 이질적인 영역은 각자 상대 영역의 토대가 되고 동시에 상대 영역을 확장하는(목표) 역할을 하면서 사고의 발달을 유도한다.[3]

다음의 예를 통해 산술과 기하라는 두 이질적인 영역에서 무리수의 본질인 통약불가능성이 어떻게 상보적으로 발달할 수 있는가를 살펴보도록 하겠다.




[그림 III-1]

2) 물론 이외에도 수학은 분석과 종합, 직관과 논리 등의 상보적 측면 그리고 Steiner(1988)가 제안하였던 기하원론 교육의 개선을 위한 종합적 연역적 접근과 발생적 분석적 접근의 상보적 접근 등이 있다. 그러나 이 글에서는 수학적 대상에 대한 기하와 산술, 이산과 연속 사이의 상보적 접근에 관해서만 논의할 것이다.

3) 상보성은 절대적인 토대를 찾아 그것으로 모든 것을 설명하려는 정초주의 및 환원주의와 다른 것임에 주의해야 한다.

[그림 Ⅲ-1]은 정사각형에서 변과 대각선 사이의 통약불가능성을 시각화시킨 것이다.[4] 그림을 보면 처음의 정사각형의 대각선과 한 변의 차이가 새로운 정사각형의 한 변의 길이가 됨을 알 수 있다. 그리고 다시 새로운 정사각형에 대해서도 똑같은 방법으로 다음의 더 작은 정사각형을 만들 수 있다. 이 방법을 자세히 살펴보면, 유클리드 알고리즘과 대응한다는 사실을 알 수 있다. 대각선 AC와 한 변 AB의 차이는 CF이다(AC=AB+CF). 유클리드 알고리즘에서 보면, AC와 AB의 공통측도(공약수)는 AB와 CF의 공통측도와 같음을 알 수 있다. AB(=CD)와 CF사이에는 AB=2×CF+EG가 성립하는데, 이는 CE=CF+EG를 함의한다. 따라서 AB와 CF의 공통측도는 CE와 CF의 공통측도와 같다. 그런데 CE=GH, CF=CG, EG=IH 이므로 CE와 CF의 공통측도는 새로운 정사각형에서 대각선과 한 변 사이의 공통측도와 같다 (GH=CG+IH). CE가 새로운 정사각형의 대각선과 같다는 점에서 이 방법은 계속 될 수 있다. 첫 정사각형에서 대각선과 한 변 사이의 공통측도는 새로운 정사각형의 대각선과 한 변 사이의 공통측도와 같게 된다. 이러한 정사각형을 계속해서 만들 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&AC=AB+CF\\
&AB=2\times CF+EG \Leftrightarrow GH=CG+IH\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad CG=IH+\ldots
\end{aligned}
$$

유클리드 알고리즘에 앞서 우리는 정사각형들의 나열이라는 시각적 표현에 의존하여 새로운 정사각형을 만들어가는 이 방법의 순환적 구조를 통찰할 수 있다. 정사각형의 닮음에 의해 이 방법이 무한히 계속된다는 사실을 쉽게 알 수 있다. 연속량을 다루는 기하에서 순환성은 규칙적인 현상으로만 보일 뿐, 더 이상의 함의점을 발견하기가 힘들다. 그러나 바로 여기서 유클리드 알고리즘의 순환적 구조가 드러난다. 사실, 산술의 이산적인 양에 대한 유클리드 알고리즘은 모두가 유한하다. 항상 통약가능하다.

반면에 산술의 영역에서 유클리드 알고리즘의 무한한 순환적 구조를 통찰하기는 불가능에 가깝다. 그러나 기하(닮음)를 산술(유클리드 알고리즘)로 해석하는 순간, 닮음의 순환성이 유클리드 알고리즘으로 스며든 것이다. 유클리드 알고리즘의 순환성은 계속되는 나머지를 뜻한다. 통약불가능성을 보여주는 것이다. 그러나 산술의 영역에 한정해서 그 알고리즘을 생각한다면, 오직 수와 관련해서 그 알고리즘을 사용하게 되고 기하학적, 시각적으로 해석하지 않는다면, 그것은 본질을 드러내지 않을 것이다. 순환적 구조를 보여주지 않을 것이다. [그림 Ⅲ-1]의 정사각형(기하)은 순환성을 보여준다는 점에서 유클리드 알고리즘(산술)을 해석하는 토대가 되었고, 유클리드 알고리즘에서 순환성은 통약불가능성으로 실현되었다는 점에서 기하는 산술의 영역을 확장하였다. 기하 영역의 순환성과 산술 영역의 통약가능성은 각 영역에서 자연스럽고 익숙한 성질일 뿐이었다. 그러나 이러한 산술과 기하의 상보적 접근으로 인해, 우리는 순환의 개념을 가진 상태에서 통약가능성의 절차인 유클리드 알고리즘을 보았기에, 알고리즘의 순환적 구조를 통찰하여 통약불가능성에 도달하게 되었다.

---

4) Toeplitz가 통약불가능성의 증명에서 사용한 그림과 비슷하다. 변희현 외(2002)는 이 증명이 아르키메데스 공리와 간접증명법을 사용하므로, 고등학교 과정 이후에 다루는 것이 바람직하다고 하였다. 그러나 본 논문의 그림을 사용한 상보적 접근에 의하면 닮음의 순환성을 인식할 수 있는 중학교 과정에서도 충분히 다룰 수 있다고 생각된다.

## Ⅳ. 이산과 연속 사이의 상보성: 제논의 역설

수학적 지식을 이해하는 데 있어서, 산술과 기하 사이의 상보적 접근 뿐 만 아니라 이산과 연속 사이의 상보적 접근 역시 기본적인 것으로 간주할 수 있다. 특히 학교 수학의 관점에서 이러한 상보적 접근은 기본적인 것이라 할 수 있다. 이산과 연속 사이의 상보성을 명백하게 보여주는 고전적인 예로 아킬레스와 거북이라는 제논의 역설을 들 수 있다(Otte, 1990). 제논의 역설 속에 이산과 연속이 어떠한 역할을 하고 있으며, 함수가 이산과 연속의 상보적 이해에 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있다.

> 아킬레스가 거북이보다 10배 빨리 달리며, 거북이는 100미터 앞서서 출발한다고 하자. 아킬레스가 경주에서 이기려면 우선 100미터를 따라잡아야 한다. 그러나 아킬레스가 거북이가 출발한 그 지점에 도착했을 때, 거북이는 10미터 앞에 있게 된다. 다시 아킬레스가 10미터 따라 잡으면, 거북이는 1미터 앞에 있게 된다. 그리고 아킬레스가 1미터를 달리면, 거북이는 1/10미터 앞서게 된다. 그리고 이러한 과정은 끝없이 계속 된다. 거북이가 조금이나마 항상 아킬레스를 앞서기 때문에, 결국 아킬레스는 결코 거북이를 따라잡지 못하게 된다.

제논은 운동을 시간과 위치의 관계로 파악하고 있는데, 이러한 시간과 위치의 관계를 이산적인 관점에서 접근하는 가 또는 연속적인 관점에서 접근하는 가에 따라 제논의 역설이 제기된다.

제논은 시간과 위치의 관계를 이산적인 관계로 파악하여 다음과 같은 점화식을 통해 접근하였다고 볼 수 있다.

$$x_0 = 0$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{10} x_n + 100, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

아킬레스가 $x_n$에 도착했을 때, 거북이는 이미 $x_{n+1}$( $x_{n+1} > x_n$)에 도착한다. 거북이가 있었던 위치에 아킬레스가 도착하고, 그 때 거북이의 위치는 점화식으로 구할 수 있다. 점화식은 연속인 시간의 측면은 고려하지 않으며, 아킬레스가 빠르다는 사실은 둘 사이의 위치가 $\frac{1}{10}$씩 좁혀지는 것으로 표현되고 있다. 이 식은 수열의 점화식에 해당하는 것으로, 아킬레스의 운동은 거북이가 지나간 점에 의해 제약을 받는다. 즉, 이산적인 접근인 경우에는 거북이가 이미 지나간 모든 점들을 아킬레스가 반드시 지나야만 한다. 수열과 점화식은 속도와 같은 동적인 개념이 아닌 위치에만 주목하는 이산적 개념이다. 제논은 이산적인 관점에서 운동을 취급하여, 연속적인 관점에서 볼 때 빠른 자가 느린 자를 따라잡는다는 사실과 모순이 되는 것이다. 아킬레스는 오직 거북이가 지난 점들만 지날 수 있고, 그 점이 아킬레스가 도달할 수 있는 유일한 위치이다. 점화식은 아킬레스와 거북이의 위치를 계산하는 방법으로는 적절하다.

그러나 운동에는 다른 측면, 즉 점화식과 같은 이산적인 관점으로는 포착할 수 없는 측면이 있다. 위치만이 운동을 결정하는 것은 아니다. 점화식으로는 아킬레스가 거북이보다 10배 빠르다는 것을 제대로 표현할 수 없다. 점화식을 통해 주어진 순간에서 아킬레스와 거북이의 위치를 각각 구할 수 있으나, 아킬레스와 거북이의 전체적인 운동은 각각의 순간을 모두 연속적으로 보아야 드러난다. 아킬레스와 거북이의 운동은 연속량인 거리와 관계를 갖는다. 아킬레스가 운동한 거리 $x$에 대해, 거북이는 다음의 거리를 지나가게 된다.

$$f(x) = \frac{1}{10} x + 100$$

아킬레스가 거북이의 처음 위치 $x = 100$에

도착했을 때, 거북이는 $f(100)$에 도착한다. 다시 아킬레스가 $f(100)$에 도착하면, 거북이는 $f(f(100))$ 에 도착한다. 이렇게 보면 점화식과 같다. 그러나 함수는 각 점에서의 함수값 뿐만 아니라 $f(x)$라는 전체적인 함수의 모습을 보여 준다. 아킬레스는 자유롭게 $x$를 가질 수 있으며, 자유로운 $x$ 위치에 따라 거북이의 위치가 함수의 그래프로 표현된다.

운동의 연속적인 측면은 이산적인 관점과 모순되는 것이 아니다. 함수를 각각의 점의 값을 계산하는 이산적인 표현으로 보면 아킬레스와 거북이의 위치를 정확히 계산할 수 있지만, 여기서 멈추면 운동을 설명할 수는 없다. 특정 함수값이 아닌 전체로서 $f(x)$를 보아야 아킬레스와 거북이의 운동을 전체로서 볼 수 있다. 다시 말해, 주어진 위치(거북이가 정해주는 위치) $x_0$에서 함수 $f(x_0)$의 함수값은 상수이지만, $x$에서의 함수 $f(x)$는 상수가 아닌 운동이다. 함수에 대해 위와 같이 이산(함수값)과 연속(운동)의 상보성을 고려할 때, 제논의 역설이 해결될 수 있다. 함수의 그래프를 통해 아킬레스가 거북이를 앞서는 것을 볼 수 있다.[5] 제논의 역설처럼 점화식으로 접근할 때와 함수를 통해 전체적인 모습으로 접근할 때, 모두 정당한 주장으로 보이는 것처럼, 이산과 연속의 상보적 접근은 어느 하나가 틀린 것이 아니라 현상을 보다 올바로 이해하기 위한 상보적인 관계에 있는 것이다.

## V. 학교수학에서의 상보성

상보성은 빛이 파동성과 입자성의 서로 상반되는 성질을 가진다는 역설을 이해하는 인식론으로서 등장하였다. 수학에서의 상보성을 유클리드 알고리즘의 산술과 기하의 측면, 제논의 역설의 이산과 연속의 측면을 통해 살펴보았다. 수학적 개념에 대한 상보적인 접근은 A와 B 사이에서 생각할 수 있는 관계들의 대칭적인 측면을 강조하는 것이다. A를 B의 측면에서 생각해보고 B를 A 측면에서 생각하는 것이며, A를 B로 환원하는 것이 아니다. 특히 수학적 개념에 대한 상보적 특성을 이해함으로써 그 개념의 의미(또는 본질)를 통찰할 수 있으며, 보다 올바로 이해할 수 있다. Otte(2003)는 상보성을 고려한 교수학적 원리를 구체적으로 제시하지 않았지만 상보성이 수학교육에 기여할 수 있는 가능성을 암시하였다.

> (수학적)지식이 발달하는 과정에 주목하는 발생적 관점에서 상보성을 보아야만, 상보성은 분명해지고 단순한 이중성(duality)과도 구별된다. 이러한 발생적 관점에서 볼 때, 대상 그 자체보다는 주체와 대상 사이의 관계가 중심이 된다. 따라서 상보성의 개념은 수학교육의 인식론적 기초에 대한 어떠한 연구와도 관련된다(Otte, 2003: 205).

지식이 발달하는 과정에서 상보성이 분명해진다고 지적했듯이, 상보성은 학생의 지식획득에 관심을 가지는 수학교육에 커다란 기여를 할 수 있다. 따라서 주어진 개념의 상보적인 측면을 이해하는 것이 필요하다. 그러나 단순히 역설적인 성질들을 소개하는 것은 학생들에게 혼란을 야기할 수도 있을 것이다. 교수학적 원리로서 상보성이 수학교육에서 의미를 가지려면, 수학적 개념이 발달하는 과정에서 자연스럽게 밝혀지는 상보적인 특성을 수업에서 구현할 수 있어야 한다.

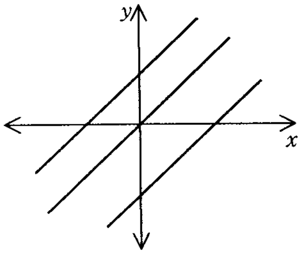
5) 이러한 점에서 생각해 보면, 학교수학에서 표로서 함수와 그래프로서의 함수는 각각 이산과 연속이라는 상보적 접근을 시사하고 있다고 할 수 있다.

## 1. 음수의 상보적 접근

수학적 개념의 상보성이 수학교육에 기여할 수 있는 가능성을 보여 준 시도가 있었다. 함수 개념은 학교수학에서 상보성에 대한 대표적인 예라 할 수 있다. Steinbring(1977)은 수학적 대상으로서 그리고 사고 도구로서 함수 개념의 상보적인 측면들에 대해 일찍이 언급하였다. 또한 다른 상보적인 특성은 기술적-관계적인(discriptive-relational) 측면 대 알고리즘적-구성적인(algorithmic-constructive) 측면(Richenhagen, 1990), 기하학적-집합론적-외연적인(geometrical-set theoretic-extensional) 측면 대 대수적-해석적-내포적인(algebraic-analytical-intensional) 측면(Steiner, 1969), 과정과 대상 각각 동적인 사상(dynamic mapping) 대 정적인 관계(static relation)(Sfard, 1992), co-variational(공-변량적인) 측면 대 co-rrespondence(대응적인) 측면(Confrey & Smith, 1904) 등이 있다. 이러한 함수 개념의 상보성에 대한 연구들은 함수에 대한 경험적이고 구성적인 연구(Dubinsky & Harel, 1992; Fennema & Carpenter, 1993)에 유용하다는 것이 입증되었다(Biehler, 2005). 또한 권석일(2006)은 역사-발생적 기하 원론 교육이 고전적 원론 교육의 문제점을 상보적으로 보완하여 중학교 기하교육을 개선할 수 있는 방안이 될 수 있다고 보고 그 통합방안을 모색하고 있다.

그러나 유클리드 알고리즘에 대한 상보적 관점에서도 볼 수 있듯이, 상보성은 한 개념을 두 측면에서 대칭적으로만 이해하는 것이 아니라 서로 다른 영역을 관련시킴으로써 반성을 통해 수학적 관계망을 형성하는 데 도움이 된다. 또한 서로 다른 영역 사이의 관련성을 통해 새로운 개념을 생각하는데 출발점이 되기도 한다.

[그림 V-1]와 같은 일차 함수의 그래프는 여러 가지 측면에서 생각해 볼 수 있다. 함수의 그래프라는 측면에서 보면, 변수 $x$와 $y$ 사이의 관계로 볼 수 있다. 방정식이라는 측면에서는 방정식 $ax+by=c$(또는 $y=ax+b$)를 만족하는 해의 집합으로 볼 수 있으며, 기하학적 측면에서는 직선의 방정식이라고 볼 수 있을 것이다.

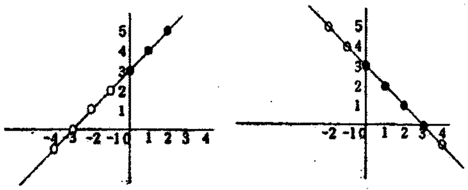



[그림 V-1]

이러한 함수의 그래프를 통해 대수적 필요성에 의해 등장한 음수를 기하학적인 측면에서 생각해 볼 수 있다. 음수는 좌표평면을 도입하고 도형을 방정식으로 나타내는데 의미 있게 작용함으로써 수학에서 그 위치가 확고해지는 것을 볼 수 있다. 음수가 없이는 좌표평면과 함수의 그래프 및 도형은 반쪽만 나타내어지고 도형을 방정식을 나타내는데 한계를 갖는다. 예를 들어 $x \to x-3$, $x \to x+3$, $x \to 3-x$, $x \to 2x$ 와 같은 함수를 양의 범위에 한정하여 그래프로 나타내면, 직선의 일부분만 상으로 보여준다(Freudenthal, 1982: 17). 그러나 음수를 받아들이면 모든 일차함수의 그래프는 직선으로 나타내어질 수 있다. 또한 원, 타원, 포물선 등 여러 가지 곡선을 방정식으로 나타낼 수 있게 되는 것이다.

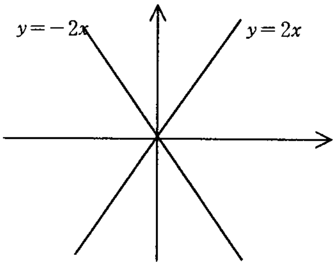
특히 음수 $-x$를 $x+(-x)=0$이 되는 수로 정의하는 것이 아니라 정수의 연산을 사상으로 해석하면 상태와 연산을 나타내는 양음 부호의 이중역할에 대한 혼란이 감소될 것이다. 다음의 [그림 V-2]에서 함수 $x \to 3+x$ 와 $x \to 3-x$의 그래프는 정수의 덧셈 $3+x$ 와 정

수의 뺄셈 $3-x$를 나타낸다.



[그림 V-2]

또한 원점을 지나는 여러 가지 일차함수의 그래프는 제 1, 2 사분면에서는 각각 양수 × 양수 = 양수, 음수 × 음수 = 양수 라는 것을 보여주며, 제 3, 4 사분면에서는 양수 × 음수 = 음수, 음수 × 양수 = 음수 임을 보여준다. 여기서 대수와 기하 및 함수 사이의 아름다운 조화의 모습을 볼 수 있다(우정호 외, 2004: 106). 예를 들어, $y=2x$와 $y=-2x$의 그래프에서 생각해보자([그림 V-3]). $y=2x$에서 $x$에 양수를 넣으면, 그 결과 $y$의 값은 양수가 되는데 1 사분면에 위치한 그래프가 해당된다. $y=-2x$에서 $x$에 음수를 넣으면, 그 결과 $y$의 값은 양수가 되는데, 2 사분면에 위치한 그래프가 해당된다. 따라서 음수의 연산이 그래프를 통해 자연스럽게 이해될 수 있는 것이다.




[그림 V-3]

물론 현재 교육과정에서는 음수를 배운 후에 함수를 배우기 때문에 음수를 처음 도입할 때 이러한 방법으로 도입하기에는 무리가 있다. 그러나 함수를 배운 후에 음수와 관련하여 음수의 기하학적 측면을 제시한다면 음수에 대한 새로운 이해와 함수에 대한 관점이 보다 넓어질 것이다. 이렇게 수학적 개념을 한 가지 측면이 아니라 이질적으로 보이는 다른 영역을 토대로 살펴봄으로써 그 의미가 새롭게 드러나고 이해될 수 있는 것이다. 또한 서로 관련이 없어 보이는 영역들 간의 관련성을 보임으로써 영역 간의 관계망 형성에도 도움이 된다고 할 수 있다. 뿐만 아니라 한 가지 수학적 개념이나 원리를 상보적으로 접근함으로써 그 개념이 다른 영역으로 확장될 수도 있다. 그러한 예로서 학교수학과 관련하여 피타고라스의 정리에 대한 상보적인 접근과 그것이 발견의 단초가 되어 다른 영역으로 확장되어가는 과정을 살펴보도록 한다.

## 2. 피타고라스 정리의 상보적인 전개

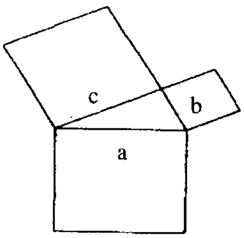
초등 기하학에서 가장 매력적인 정리 중 하나이고, 분명히 가장 유명하고 가장 쓸모 있는 정리 중 하나는 '피타고라스 정리'이다. 또한 수학의 모든 분야에서 피타고라스 정리보다 다양하고 많은 증명이 주어졌던 정리는 없을 것이다 (Eves, 1999: 31-34). 평면기하의 가장 중추적인 정리이며, 오늘날에도 수학의 기초가 되는 기본적인 정리로서 논증기하의 출발점으로서 평행선 공준과 논리적으로 동치이기도 하다. 특히 피타고라스의 증명방법은 직사각형의 닮음, 넓이, 원 등을 이용하는 대수적 증명 방법이나 직각 삼각형을 이용하는 기하학적 방법, 사원수를 이용하는 증명방법, 역학적 증명 방법 등 대단히 여러 가지 증명방법이 있다(Loomis, 2007).

학생들은 이 정리를 배움으로써 직각삼각형의 세 변 사이에는 특별한 관계가 있다는 것을 알게 되고, 이를 활용하여 평면도형에서의 변의 길이, 입체도형에서의 선분의 길이 등을 구할 수 있게 된다. 특히 우리나라의 경우, 학교수학에서 피타고라스 정리의 증명을 이해할 것을 요

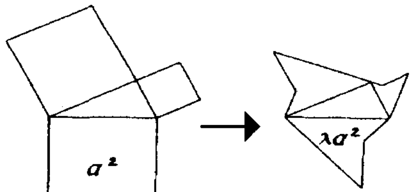
구한다. 우리나라의 제 7 차 교육과정에서 피타고라스의 정리의 지도와 관련하여 '피타고라스 정리를 증명하는 방법은 여러 가지가 있으나 가급적 간단한 방법으로 하며, 정리의 의미를 파악하고 활용하는 데 중점을 두어 지도한다. 또, 피타고라스의 정리의 역은 증명 없이 문제 상황을 통해 간단히 다룬다'(교육부, 1999: 77)라고 기술하고 있다. 특히 피타고라스 정리의 기하학적, 대수적 이해를 기초로 피타고라스 정리의 활용을 지도하도록 한다. 그러나 수많은 증명 가운데 한 두 가지를 택하여 학생에게 제시해야 하는 상황에서 제시되어야 하는 증명의 간결성을 고려하기 이전에 먼저 제시되어야 하는 증명의 의미, 다른 분야와의 관련성, 학습자에게 형성될 수 있는 표상 등을 고려해야 한다.[6)]

대수적 알고리즘을 이용하는 증명[7)]은 기하학적 상황을 대수적 문제로 환원함으로써 문자의 계산을 통해 간명하고 정확하게 피타고라스의 정리를 증명할 수 있다는 장점이 있는 반면에, 기하학적 직관이 결여되기 쉽다. 변의 길이 사이의 관계가 강조되고 길이의 제곱이 갖는 기하학적 의미, 즉 넓이 사이의 관계를 직관적으로 파악하는 것이 쉽지 않다(박문환, 홍진곤, 2002: 348).

피타고라스 정리를 나타내는 식은 $a^2+b^2=c^2$이며, 여기서 $a, b, c$ 는 각각 직각삼각형의 변의 길이를 의미한다.[8)] 따라서 직각삼각형이라는 공간적인 심상이 식 $a^2+b^2=c^2$와 관련될 수밖에 없다. 특히 식에서만 보았을 때 단순히 대수적 의미의 $a^2$, $b^2$, $c^2$은 [그림 V-4]와 같이 증명이 제시됨으로써 $a, b, c$를 각각 한 변




[그림 V-4]



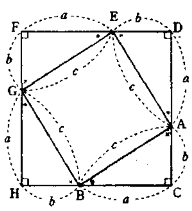

[그림 V-5]

---

6) Wittmann(1999)은 여러 가지 측면을 고려하여 피타고라스의 정리 학습에 대하여 연구하였다. 특히 학생들에게 제시되어야 하는 증명 방식을 역사적, 심리적 고찰 등을 통해 제시하고자 하였다. 이 글에서는 피타고라스 정리의 상보적 접근에 대해서만 논의할 것이다.

7) 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC와 합동인 네 개의 직각삼각형을 이용하여 한 변의 길이가 $a+b$ 인 정사각형 FDHC를 그리면 사각형 AEGB는 네 변의 길이가 모두 $c$ 인 마름모이다. 또, $\angle BAC+\angle EAD=90^\circ$ 이므로 $\angle BAE=90^\circ$ 따라서 사각형 AEGB는 정사각형이다.
이 때, □CDFH=□AEGB + 4△ABC이고,
□CDFH= $(a+b)^2$, □AEGB= $c^2$, △ABC= $\frac{1}{2}ab$이므로

$$(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$$
$$a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$$
$$\therefore a^2+b^2=c^2$$




(이준열 외 4인, 2003: 33).

8) 피타고라스의 정리를 나타내는 식과 관련하여, $a^2+b^2=c^2$ 을 만족하는 $a, b, c$가 피보나치 수열, 조화수열 등으로 일반화될 수 있다는 연구도 있다(Bertucci, 1991, DiDomenico & Tanner, 2001).

으로 하는 정사각형의 넓이라는 기하학적 의미를 가지게 된다.

더 나아가 보다 일반적인 정리, 곧 직각삼각형의 각 변 위에 닮은 다각형을 그리면 빗변 위에 그린 다각형의 넓이는 다른 두 다각형의 넓이의 합과 같다는 정리를 증명하는 것이다 (Polya, 2003: 22-25). 직각 삼각형의 빗변 위에 표현된 정사각형의 면적 $a^2$이다. 직각 삼각형 빗변 위에 표시된 다각형의 넓이를 $\lambda a^2$이라 하자[그림 V-5]. $\lambda$는 정사각형과 다각형의 넓이의 비율에 따라 결정된다. 직각 삼각형의 세 변 $a, b, c$ 위에 그려진 세 개의 다각형의 닮음으로부터 각각의 넓이는 $\lambda a^2, \lambda b^2, \lambda c^2$이 되고, 방정식 $a^2+b^2=c^2$이 사실이라면 $\lambda a^2+\lambda b^2=\lambda c^2$도 사실이 될 것이다. 이것은 일반적인 정리의 특수화에 의한 적용이며, 원리의 일반성을 드러내므로 정리 자체에 대한 보다 깊은 통찰을 제공한다(우정호, 2000: 92).

그동안 피타고라스 정리에 관한 연구 대부분은 정리의 증명 방식에 초점을 맞추었다. 피타고라스 정리의 본질을 드러내는 방식으로 증명하고, 여러 가지 문제 상황에서 그 정리를 활용하는 것을 목표로 지도해왔다. 실제로 피타고라스 정리의 증명방법은 수 백 가지에 이르며, 그 증명방법들은 충분히 흥미로울 수 있지만 단순한 여러 가지 증명의 나열은 학생들의 혼란을 가중시킬 위험이 있다. 따라서 본 논문에서는 피타고라스 정리에 대한 증명의 새로운 방법을 추가하는 것이 아니라, 피타고라스 정리가 수학의 다른 분야와 관련을 맺으며 자연스럽게 발전하는 모습을 살펴보고자 한다. 수학적 개념의 상보성을 교육적으로 논의하는 것은 단순히 역설적인 성질들을 소개하는 것이 아니라 학생들이 자연스럽게 따라갈 수 있는 개념의 발달과정을 구현하고 그 과정에서 드러나는 수학적 개념들 사이의 상보적인 관계를 밝히는 것이다.

피타고라스 정리는 항등식의 대수적 의미와 기하학적 의미를 상보적으로 통합할 뿐만 아니라 수의 영역을 확장하는 과정에서 출발점이 된다. 대수적인 항등식에서 시작하여 피타고라스의 정리를 거쳐 복소수 대수로 발달하는 과정에서 수학교육에서 상보성이 교수학적 원리로서 구현될 가능성을 생각해 보았다.

Diophantus는 「Arithmetica」에서 두 제곱수의 합인 5와 13의 곱은 두 제곱수의 합인 65와 같다고 말하였다($5=2^2+1^2$, $13=3^2+2^2$, $65=8^2+1^2=7^2+4^2$). 이는 실제로 다음 항등식의 한 예이다(Avigad, 2006: 10).

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$ [9)]

Diophantus의 항등식의 발견과정에 대해선 알려진 바가 없으며, 보통 학생들이 이러한 항등식을 발견하기는 불가능에 가깝다. 그러나 그 증명은 간단한 대수조작만으로도 쉽게 가능한데, 고등학생이면 누구나 이를 확인할 수 있을 정도이다[10)]. 다항식의 전개 및 인수분해와 관련된 연습문제로서 교과서에 등장할 뿐, 그 이상의 의미는 없는 것처럼 보인다. 빛의 입자성을 관찰하는 실험에서 빛의 파동성을 볼 수 없듯이, Diophantus의 항등식을 대수식의 하나로 보는 상황에서 그것의 숨겨진 의미는 드러나지 않는다. 상보적 접근은 억지로 숨겨진 의미를 강요하는 것이 아니라 새로운 맥락을 도입하는 것이다. 즉, '이미 알고 있는' 지식인

9) 본 논문에서 이 식을 가리켜 'Diophantus의 항등식'이라고 부르겠다.

10) 대수적 관점에서 이 증명은 덧셈과 곱셈의 교환법칙과 결합법칙, 곱셈의 덧셈과 뺄셈에 대한 분배법칙, 그리고 뺄셈은 덧셈의 역원이라는 사실만을 사용한다. 따라서 이 정리는 일반적으로 모든 가환환에서 성립하는 기본적인 관계이다(Avigad, 2006: 10).

Diophantus의 항등식은 대수가 아닌 기하의 맥락에서 피타고라스 정리를 발판으로 하여, '앞으로 알게 되는' 지식인 복소수의 곱셈 개념에 의해 그 의미가 새롭게 드러나게 된다. 물론 그 과정에서 피타고라스 정리 및 직각삼각형의 의미도 새롭게 드러난다. 수학적 개념의 획득은 '이미 알고 있는' 개념과 '앞으로 알게 되는' 개념의 상보적인 관계를 밝히는 것이라 할 수 있다. 즉, 전자는 후자가 밝혀져야 그 의미가 제대로 드러난다는 뜻에서 후자를 전제로 하며, 또한 후자는 전자에서 비롯된다는 의미에서 전자를 전제로 한다고 할 수 있을 것이다. 그리고 이러한 과정은 해당 지식이 발달하는 과정에 초점을 맞출 때 즉, 수학교육의 상황에서 더욱 분명하게 드러난다.

학교수학의 상보적 접근은 예를 들어, 피타고라스의 정리나 Diophantus의 항등식을 특정 단계에서 소개하고 활용하는데 그치는 것이 아니라, 그 개념이 발달하는 과정에서 새로운 개념의 창안에 기여하고 또한 그 창안된 개념에 의해 원래 개념의 새로운 의미가 드러나는 과정을 학습과정에서 구현하는 것이다. 그러면 자연스럽게 수학적 개념의 상보적 측면이 드러나게 되고, 개념들 사이의 관계가 더욱 풍성해지는 것을 학생 스스로가 인식할 수 있다.

실제로 Viete는 Diophantus의 항등식에서 피타고라스 정리를 떠올리고 이 식에 새로운 의미를 불어 넣었다. Viete는 $a^2+b^2$에서 직각삼각형의 빗변의 길이를 연상하였다. 피타고라스 정리를 배운 학생이라면, 누구나 $a^2+b^2$에서 직각삼각형의 빗변을 떠올릴 수 있을 것이다. Viete는 항등식의 우변 $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$도 좌변과 같은 형식이라는 데 주목하였다. 항등식의 좌변, 우변 모두에서 직각삼각형의 빗변을 연상할 수 있다.

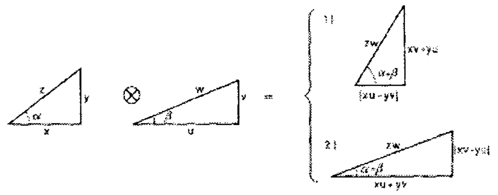
'Genesis triangulogrum'은 Viete의 「Ad logisticam speciosam notae priores」의 마지막 장의 제목이다(Bashmakova, & Smirnova, 2000: 80). 제목이 말해주듯이, Viete는 주어진 두 직각삼각형으로부터 새로운 직각삼각형을 만들어내는 방법을 연구하였다. [그림 V-6]처럼 두 직각삼각형 (x, y, z, $\alpha$) 와 (u, v, w, $\beta$)[11] 가 주어졌을 때, Viete가 제시한 새로운 직각삼각형은 아래와 같다(Bashmakova, & Smirnova, 2000: 80).

(방법 1) (xu-yv, xv+yu, zw, $\alpha+\beta$)

triangulus synaereseos

(방법 2) (xu+yv, xv-yu, zw, $\alpha-\beta$)

triangulus diaereseos




[그림 V-6]

그가 제시한 새로운 삼각형이 모두 직각삼각형인 것은 아래처럼 Diophantus의 항등식을 그대로 사용하여 바로 증명할 수 있다.

$$(zw)^2=(x^2+y^2)(u^2+v^2)=(xu-yv)^2+(xv+yu)^2$$
$$=(xu+yv)^2+(xv-yu)^2$$

Viete는 두 종류의 새로운 직각삼각형에 각각 'triangulus synaereseos', 'triangulus diaereseos'

11) 직각삼각형의 (밑변, 높이, 빗변, 밑각) 을 뜻한다. 물론 밑각은 앞의 세 변수에 의해 결정되므로 굳이 표기할 필요는 없지만, 이 방법의 특성을 보여주기 때문에 따로 표기한다.

라는 이름을 붙였다. 'synaereseos'와 'diaereseos'는 각각 그리스어 형용사로 '합하다'와 '나누다'를 뜻한다. 그는 직각삼각형의 밑각의 크기에 주목하여 이러한 이름을 붙였다. 'triangulus synaereseos'의 밑각은 처음 두 직각삼각형의 밑각들의 합과 같고, 'triangulus synaereseos'는 밑각들의 차와 같다.

Viete의 (방법1), (방법 2)는 주어진 두 직각삼각형으로부터 새로운 직각삼각형을 만들뿐만 아니라 그 직각삼각형의 밑각이 두 직각삼각형의 밑각의 합(차)과 같다는 놀라운 성질을 보여준다. 설명을 하기 위하여, 이러한 방법을 각각 (연산 1), (연산 2)라 하고, ⊗1, ⊗2라고 표기하도록 한다. 밑변, 높이, 빗변이 각각 x, y, z에 비례하는 닮은 직각삼각형들의 집합을 {x, y, z}라고 표기한다면, (연산 1), (연산 2)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(x, y, z, \alpha) \otimes 1 \ (u, v, w, \beta)$$
$$= \{xu-yv,\ xv+yu,\ zw,\ \alpha+\beta\}$$
$$(x, y, z, \alpha) \otimes 2 \ (u, v, w, \beta)$$
$$= \{xu+yv,\ xv-yu,\ zw,\ \alpha-\beta\}$$

(연산 1)에서 복소수의 곱셈 $(x+yi)(u+vi) = (xu-yv)+(xv+yu)i$이라는 규칙을 볼 수 있으며, (연산 2)는 복소수의 나눗셈을 연상시킨다. 그 당시 Viete는 복소수의 곱셈을 전혀 생각하지 않았으나 이러한 연산규칙을 이용하여 다음과 같이 De-Moivre의 정리를 예상하였다.

> 두 직각삼각형이 주어져 있고, 두 번째 직각삼각형의 밑각이 첫 번째 것의 밑각보다 n배 크다면, 두 번째 직각삼각형은 빗변의 길이가 zn이고, 밑변의 길이는 (x+y)n 전개식의 홀수 번째 항들을 번갈아가며 더하고 뺀 것과 같으며, 높이는 짝수 번째 항들을 번갈아가며 더하고 뺀 것과 같은 직각삼각형과 닮음이다[11].(x, y, z는 첫 번째 직각삼각형의 것이다)(Glushkov, 1977: 131)

Viete가 복잡하게 설명한 밑변과 높이는 $(x+yi)^n$의 전개식에서 실수부분과 허수부분을 뜻한다. 따라서 Viete의 정리를 복소수를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(x, y, z, \alpha)^n = \{\mathrm{Re}(x+yi)^n, \mathrm{Im}(x+yi)^n, zn, n\alpha\}^{12)}$$

Viete는 이 정리의 앞에 '피타고라스가 자신의 정리를 발견한 후에 소를 제물로 바쳤듯이, 나는 이 정리의 발견으로 인해 수백 마리의 소를 기꺼이 제물로 바칠 것이다'라고 적었다고 한다(Glushkov, 1977: 31). Viete가 이 정리에 얼마만큼의 중요성을 부여했는지 알 수 있는 대목이다. 실제로 이 정리는 직각삼각형들의 대수적 연산을 가능하게 하였고, 그 결과 직각삼각형과 삼각함수의 성질(예, 삼각함수의 덧셈정리)들이 분명하게 밝혀진다. 물론 복소수 곱셈의 초석이며 De Moivre 정리와 거의 일치하고 있다.

그러나 Viete의 정리는 직각삼각형에 한정되었기에, 밑변과 높이가 취할 수 있는 값은 양수로 한정되었고, 그 밑각도 예각으로 한정되었다. Viete는 복소수의 곱셈 규칙에 거의 도달했으나, 직각삼각형의 제약을 넘어서지는 못하였던 것이다. 다항식의 조작에 불과하던 Diophantus의 항등식이 직각삼각형의 연산이라는 새로운 의미를 획득하였지만, 그 의미를 획득하는 데 도움을 주었던 직각삼각형이 이제 장애로 다가온 것이다. Diophantus의 항등식은 그것을 조작하는 주체가 다항식의 전개 및 인

12) 예를 들어, $(x, y)\otimes_1(x, y)=\{x^2-y^2, 2xy\}$, $(x, y)\otimes_1(x, y)\otimes_1(x, y)=\{x^3-3y^2x, 3yx^2-y^3\}$
13) 극형식으로 표현하면 $[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=r^n(\cos n\alpha+\sin n\alpha)$ 이다.

수분해에서 볼 때와 직각삼각형과의 관련성을 볼 때, 그 의미가 동일하지 않다. 그러나 직각삼각형과의 관련에서 의미를 얻은 Diophantus의 항등식은 본래 모든 실수에 대해 성립하고 있었다. 직각삼각형의 의미와 본래 항등식의 의미 사이에 갈등이 생긴 것이다. 복소수 연산을 고려하면 이러한 갈등을 잠재울 수 있다.

예를 들어, 밑각이 45도인 직각삼각형 $(1,1,\sqrt{2})$과 60도인 $(1,\sqrt{3},2)$ 에 대하여, Viete의 연산을 적용하면 $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$의 결과가 나오지만, 이러한 직각삼각형은 존재하지 않는다(1사분면에 존재하지 않는다). 그러나 이 순서쌍을 직각삼각형이 아닌 말 그대로의 순서쌍 또는 평면 위의 좌표로 본다면, Viete가 자랑스러워한 그 정리에서 말하는 각과 연산과의 관계가 그대로 유지되는 것을 쉽게 찾을 수 있다. 직각삼각형에서 벗어나면, 두 순서쌍 연산이 사칙연산을 만족하며 그 결과도 여전히 순서쌍으로 표현되고 있는 그 형식이 보이게 된다. 실제로 두 제곱수의 합으로 표현된 수에 복소수의 곱셈 연산을 가한 결과는 여전히 두 제곱수의 합으로 표현된다는 것을 알 수 있다. 복소수의 곱셈 연산이 정당한 연산임을 보여주는 것이다. 게다가 그 연산이 평면위에서 점의 회전과 관계있다는 것도 알 수 있다.

Diophantus의 항등식과 복소수 곱셈 개념 사이의 관계에서, 음수의 제곱근이 무엇인가라는 논란의 소지는 등장하지 않는다. 산술의 가장 기본적인 항등식이 대수의 가장 신비로운 복소수 연산과 맞닿아 있는 것이다. 역설적으로, 가장 기본적인 산술의 결과는 그것이 완벽하게 발달한 다음에야 그 의미를 제대로 이해할 수 있는 것이다. 이렇듯 수학적 개념을 그것이 최초로 소개된 상황에서 완벽하게 이해하기는 힘들다. 그러나 완벽한 이해가 부족하다고 해서 그 개념에서 새로운 개념이 생성되지 못하는 것은 아니다. 발달과정을 지속시키면서 원래의 개념의 의미가 계속해서 새롭게 밝혀진다. 이 과정이 상보성을 고려한 학습과정이라고 할 수 있다. 즉 수학적 개념의 발달 과정의 결과를 보고 그 개념의 상보적 측면만을 지적하는 것이 아니라 그 발달과정 자체에 주목하는 것이다.

Diophantus의 항등식은 피타고라스의 정리를 발판으로 직각삼각형의 연산에 단초를 제공하였고, 이것은 복소수의 곱셈을 시사한다. 이러한 과정에서 피타고라스 정리와 복소수 곱셈 사이의 관계를 엿볼 수 있고, 다시 원래의 항등식은 새로운 의미를 가지게 된 것이다.

## Ⅵ. 맺음말

그동안 수학교육에서는 서로 부족한 부분을 보충해 준다는 의미로 상보성, 상보적 원리, 상보적 접근이라는 말이 자주 사용되어 왔으나 그 의미가 분명하지는 않았다. 따라서 이 글에서는 수학적 지식의 상보적 특성을 살펴보고 그것과 관련하여 학교수학에서 수학적 개념의 상보적 측면을 살펴보았다.

이미 살펴보았듯이, 상보성은 물리학에 그 기원을 두고 있다. 빛을 파동으로 이해할 수도 있고, 입자로 이해할 수도 있다. 빛은 입자인가 파동인가? 관찰자와 빛과의 관계를 생각하지 않고는 대답하기가 어렵다. 어떤 실험에서 빛은 파동처럼 행동하고, 다른 실험에서 빛은 입자처럼 행동한다. 단 한 번의 실험만으로 우리가 빛을 입자이면서 동시에 파동으로 해석할 수는 없다. 유클리드 알고리즘은 산술의 성질인가 기하의 성질인가? 제논의 역설은 이산과 연속의 모순을 보여주는가? 수학적 개념 역시 상보적인 해석이 필요하다. 유클리드 알고리즘이 발달하는 과정에서 산술의 통약가능성과 기

하의 순환성이라는 상보적인 특성이 밝혀지면서, 우리는 무리수의 통약불가능성을 이해할 수 있다. 또한 제논의 역설을 해결하는 과정에서 이산과 연속의 상보적인 특성이 분명히 드러나게 된다.

수학적 지식은 인간의 인지활동과 독립적이지 않으며 완전하고 절대적이며 명확한 방식으로 표현할 수 없는 대상과 관련된다. 특히 수학적 지식은 여러 분야들과의 관련성을 가지며 그 관련성이 확립됨으로써 비로소 올바르게 표현된다. 이러한 관계는 개념이 발달하는 과정에 주목하는 발생적 관점에서 분명히 밝혀질 수 있다. 따라서 상보성은 수학적 개념의 발달을 설명하는 데 유용한 개념이라고 할 수 있다.

특히 학교수학에서 수학적 개념에 대한 상보적 접근은 단지 수학적 개념이 두 가지 측면을 지니고 있음을 보여주는데 목적이 있는 것이 아니다. 그러면 이중성과 다를 바가 없다. 각각의 측면은 상대가 없이는 설명할 수 없고, 정의될 수도 없음을 보여줄 수 있어야 한다. 그러기 위해서는 발생적 관점에서 수학적 개념을 보아야 하는 것이다. 기존의 개념이 새로운 개념의 창안에 기여하면서, 그 창안된 개념에 의해 원래 개념의 새로운 의미가 드러나는 과정에서 수학적 개념의 상보성이 드러난다. Diophantus의 항등식은 피타고라스 정리의 의미를 보강하고, 역으로 피타고라스 정리는 Diophantus의 항등식에 의미를 제공한다. 이러한 과정에서 복소수 곱셈 개념이 등장한다. Diophantus의 항등식에 대수적인 상등과 피타고라스 정리라는 두 가지 측면이 있다는 것을 알려주는 것이 상보적인 접근은 아니다. 두 가지 측면을 통합하는 과정에서 복소수 연산이라는 개념이 등장할 수 있다. 수학교육에서 상보성은 이러한 과정을 드러내는 데 그 의미가 있다고 할 수 있다.

수학적 대상이나 개념에 대해 상보적으로 접근하고 이해하는 것은 현상을 보다 올바로 이해할 수 있는 수학적 안목을 형성하는데 기초가 되는 것이다. 즉, 수학적 대상이나 개념을 이해하는 데 있어서 폭넓은 시각을 제공해 줌으로써 통찰을 가능하게 하여 명확하게 이해하도록 한다. 그리고 무엇보다도 학교수학에서 수학적 개념의 상보적 발달은 학생들로 하여금 학교수학이 수많은 단편적 정보와 규칙들의 기계적인 적용이 아니라 살아 움직이는 체계로서 수학의 이미지를 갖도록 할 수 있을 것이다.

## 참고문헌


교육부(1999). **중학교 교육과정 해설(III)**. 대한교과서 주식회사.

권석일(2006). **중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰**. 서울대학교대학원 박사학위논문.

박문환 · 홍진곤(2002). 피타고라스 정리에 대한 Euclid의 증명이 갖는 교육적 함의. **학교수학, 4**(3), 347-360.

이준열 외 4인(2003). **중학교 수학 9-나**. (주)도서출판 디딤돌.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교 출판부.

우정호 외 4인(2004). **역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구**. 학술진흥재단 연구보고서 KRF-2002-074-BS1051.

Avigad, J. (2006). Mathematical method and proof. *Synthese,* 153, 105-159.

Bashmakova, I. G., & Smirnova, G. S. (2000). *The beginnings and evolution of algebra.* The Mathematical Association of America.

Biehler, R(2005). Reconstruction on meaning as a didactical task: the concept of function as an example, In J. Kilpatrick, C.

Hoyles, & O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp.61-81.). NY: Springer.

DiDomenico, A. S., & Tanner, R. J. (2001). Pythagorean triples from harmonic sequences. *Mathematics Teacher, 94*(3), 218-222.

Eves, H. (1999). **수학의 위대한 순간들**. (허민, 오혜영, 역). 서울: 경문사. (영어원작은 1983년 출판).

Freudenthal, H. (1982). Variables and functions. *Conference on functions,* SLO Foundation for curriculum development, 7-20.

Glushkov, S. S. (1977). An interpretation of Viete's 'calculus of triangles' as a precursor of complex numbers. *Historia Mathematica 4,* 127-136.

Jahnke, H. N., & Otte, M. (1982). Complementarity of theoretical terms : ratio and proportion as an example, *Conference on functions*, SLO Foundation for curriculum development, 97-113

Kant, I. (2005). **순수이성비판**. (최재희 역). 서울: 박영사. (독어원작은 1787년 출판).

Loomis, E. S. (2007). **피타고라스 정리**. (이만근, 전병기 역). 서울: 경문사. (영어원작은 1972년 출판).

Otte, M. (1990). Arithmetic and Geometry : Some Remarks on the concept of Complementarity. *Studies in philosophy and education 10*, 37-62

________(2003a). Does Mathematics have objects? In what sense? *Synthese, 134,* 181-216

________(2003b). Complementarity, sets and numbers. *Educational studies in Mathematics 53*(3), 203-228.

________(2005). Meaning and mathematics. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 231-260). NY: Springer.

________(2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational studies in Mathematics 61*(1), 11-31.

Polya, G (2003). **수학과 개연 추론(1권: 수학에서의 귀납과 유추).** (이만근 외, 역). 서울: 교우사. (영어원작은 1954년 출판).

Wittmann, E. C. (1999). Designing teacher: The pythagorean theorem. *Mathematics, Pedagogy and Secondary Teacher Education*, 97-165.

# Complementarity in Mathematics Education

Kang Hyun Young (lecturer at Hong-Ik University)
Lee Dong Hwan (Seoul National University, Graduate School)

Complementarity, complementary principle and complementary approach have been often used in school mathematics but its meaning has not been obvious. Thus this paper tries to make explicit the meaning by looking around complementary characteristic of mathematical knowledge. First of all, we examines the general meaning of complementarity and investigate complementary characteristics of mathematical concepts through incommensurability and zeno's paradox. From this, complementary approach to school mathematics is studied. To understand and uncover complementary characteristics of mathematical concepts make it possible for student to have an insight. It is the most important thing that students can have an image of mathematics as a living system rather than as a mechanical application of rules and fragmentary informations.

* **Key words** : complementarity(상보성), incommensurability(통약불가능성), zeno's paradox (제논의 역설), negative number and function(음수와 함수), pythagorean proposition(피타고라스의 정리)

논문 접수: 2007. 10. 4
심사 완료: 2007. 11. 20