대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 4, 395-418. Nov 2007

# 수학적 과제가 수학적 의사소통에 미치는 영향

이 미 연* · 오 영 열**

수학교육에서 수학적 의사소통을 강화하는 것은 교사에게 많은 것을 의존하는 교실 상황을 학생들이 그들 자신의 생각을 책임지는 상황으로 바꾸는데 도움을 준다. 이 연구는 수학적 의사소통에서 중요한 역할을 할 것으로 예상되는 수학적 과제가 수학적 의사소통에 미치는 영향에 대하여 탐구하였다. 이를 위해 인지적 요구수준에 따라 수학적 과제를 암기형, 절차형, 개념원리형, 탐구형으로 나누고, 각 과제 유형에 따라 학생들의 수학적 의사소통 참여, 수학적 정당화 유형, 수학적 합의 과정이 어떻게 달라지는지 양적 분석방법과 질적 분석방법을 병행하여 살펴보았다. 수학적 과제는 학생들의 수학적 의사소통과 밀접한 연관성을 갖고 있으며, 어떤 과제로 학습하느냐에 따라 학습 효과는 달라진다. 따라서 해결방법이 다양하고 인지적 요구수준이 높은 수학적 과제를 제공하는 것은 학생들의 수학적 의사소통 능력을 향상시키는데 중요하다.

## Ⅰ. 서 론

수학 교육의 궁극적인 목표가 고차원적 사고력을 육성하여 실생활의 문제해결능력을 높이는 것임에도 불구하고 오늘날 학교현장에서는 단순문제풀이 중심의 수학교육이 이루어지고 있는 경우가 많다. 이에 현재 시행중인 7차 교육과정은 수학교육의 목표를 수학적 힘의 신장에 두고 그 하위 능력으로 수학적 정보교환능력을 강조함으로써 학습자 중심의 교육을 실천하고자 노력하고 있다.

7차 교육과정에서는 이러한 노력의 일환으로 수학적 의사소통을 강조하고 있다. 수학적 의사소통은 수학적 언어와 사고를 연결시켜 수학에 대한 학습자의 이해를 높여주고, 언어를 통해 동료들과 서로의 아이디어를 토론하고 공유하게 함으로써 반성적 사고의 기회를 제공하며, 학습자에게 자신의 생각을 자유롭게 표현하는 기회를 줌으로써 수학에 대한 학습자의 불안을 감소시킨다(이종희 · 김선희, 2002; Griffiths & Clyne, 1994; NCTM, 1989; Rowan, Mumme, & Shepherd, 1990).

이와 같이 수학교육에 있어서 의사소통의 장점이 부각되면서 수학적 의사소통에 대한 연구를 국 · 내외 여러 문헌에서 찾아볼 수 있게 되었으며, 특히 최근의 연구들은 수학적 의사소통에 있어서 적절한 과제 선택을 강조하고 있다(Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, & Murray, et al., 2004; NCTM, 1991, 2000; Van de Walle, 2003). 논리적 사고와 수학적 의사소통을 요구하는 과제는 학생들이 특정 개념과

* 서울창동초등학교, prettypond@hanmail.net
** 서울교육대학교, yyoh@snue.ac.kr

수학적 아이디어 사이의 관계를 생각해보고 실생활에 적용할 수 있는 기회를 제공하며, 이것은 학생들의 문제 해결력과 수학적 관계 탐구 능력을 증진시킨다. 이처럼 수학적 과제가 수업 시간의 활동을 결정하여 학습 결과의 차이를 만들어 낼 수 있으므로, 수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위해서 바람직한 수학적 과제를 제시하는 일은 매우 중요하다.

그러나 지금까지 국내 연구들은 수학적 의사소통의 효과를 분석하거나 수학적 의사소통 능력을 신장시키는 방법을 연구하는 경우가 대부분이었다(김보영 · 김민경, 2003; 나소연, 2002; 유현주, 2000; 채미애, 2002). 또한 의사소통 자료 개발과 소집단 협동학습에서 나타난 의사소통 활동 특성에 대한 연구가 있었으나(이미애, 2001; 장영일, 2003; 최혜령 · 백석윤, 2005), 의사소통에서 중요한 역할을 할 것으로 예상되는 수학적 과제가 수학적 의사소통에 미치는 영향을 분석한 연구는 찾아보기 어려웠다.

이에 본 연구에서는 인지적 요구 수준이 다른 4가지 유형의 수학적 과제를 무작위로 추출하여 각 모둠에게 제시한 뒤, 수학적 참여, 수학적 정당화 유형, 수학적 합의 과정의 관점에서 학생들의 수학적 의사소통 모습을 분석해 봄으로써, 수학적 과제 유형이 수학적 의사소통에 어떠한 영향을 미치는지 알아보고자 한다.

## II. 이론적 배경

### 1. 수학적 과제

NCTM(1991)에서는 학생들이 수학을 학습하기 위해 참여하는 여러 가지 활동들을 총칭하여 수학적 과제라고 정의하고 있다. 또한 Hiebert et al.(2004)은 학습 환경을 구성하는 요소로써 과제 특성, 교사 역할, 교실 문화, 수학적 도구 활용, 접근 가능성을 제시하면서 수업 시스템의 첫 번째 주요 측면으로 과제를 뽑고 있다. Artzt와 Armour-Thomas(2002)는 교사의 교수 관행을 점검하기 위한 인지적 모델에서 과제, 학습 환경, 담화를 구성요소로 교수 관행을 분석하고 있는데, 거기에서 그들은 지식과 새로운 정보를 관련시켜 문제해결에 능동적으로 참여할 수 있는 기회를 제공하는 모든 자료를 수학적 과제로 규정하고 있다. NCTM(2000)은 수업에서 수학적 과제를 선택하는 것이 교사의 중요한 책임 중 하나라고 지적하면서, 바람직한 수학적 과제는 학생들의 이해와 관심을 반영하며, 문제해결력, 수학적 추론, 수학적 의사소통 등을 촉구할 수 있는 과제라고 언급하고 있다.

수학 학습에서 수학적 과제의 중요성이 부각되면서 수학적 과제를 유형화시키려는 시도가 나타났다. Stein, Henningsen, Silver, 그리고 Smith(2000)는 수학적 과제를 수학 아이디어를 개발하는데 기여하는 교실 활동의 일부분이라고 정의하고, 과제 해결을 위해 요구되는 인지적 사고 수준에 따라 수학적 과제 유형을 암기형 과제(memorization), 연계성 없는 절차형 과제(procedures without connections), 연계성 있는 절차형 과제(procedures with connections), 수학행하기 과제(doing mathematics)로 나누었다.

Stein et al.(2000)에 따르면 암기형 과제란 이전에 학습한 사실, 규칙, 공식을 단순히 재생하여 절차를 사용하지 않고도 풀 수 있는 과제를 말하는 것으로 암기형 과제의 예는 $\frac{1}{2}$을 소수와 퍼센트를 사용해서 나타내는 경우이다. 연계성 없는 절차형 과제는 절차가 개념과 관계없는 알고리즘적 과제로 과제 해결방법이 모호하지 않는 과제를 의미하며, 그 예는 $\frac{3}{8}$을 소수와 퍼센트로 바꾸어 나타내는 경우이다. 연계성 있는 절차형 과제는 절차가 수학적 개념

을 좀 더 깊이 이해하는데 도움을 주는 과제로, 그 예는 10×10 모눈종이에 $\frac{3}{5}$과 크기가 같은 소수와 퍼센트를 나타내는 것이다. 수학 행하기 과제는 연습된 접근방법이 소용없고, 비알고리즘적인 사고를 유발하며, 관련된 지식이나 경험을 활용해야 문제를 해결할 수 있는 과제이며, 그 예는 4×10 직사각형의 일부가 색칠된 격자를 보고 색칠된 영역을 퍼센트, 소수, 분수로 나타내고 설명하는 활동이다.

## 2. 수학적 의사소통

수학교육에서 의사소통을 통해 얻을 수 있는 가치들은 무수히 많다. 전통적인 교수·학습 방법과 비교하여 수학적 의사소통이 강조된 교수·학습 방법은 학생과 교사에게 많은 도움이 된다. Rowan, Mumme 그리고 Shepherd(1990)에 따르면 수학적 의사소통은 학습자의 수학적 이해를 증진시키고, 수학에 대한 이해를 공유하게 하며, 학습자가 자신의 학습을 제어할 수 있게 함으로써 편안한 학습 분위기를 조성하는데 기여한다.

Griffiths와 Clyne(1994)은 다양한 의사소통 방식을 수업에 적용함으로써 얻을 수 있는 의사소통의 가치를 학습자와 교사 측면으로 나누어 설명하고 있다. 학습자 측면에서 수학적 의사소통은 학생들의 이해를 명확하게 하고, 오개념을 찾아내는데 도움을 주며, 학습자들이 다양한 방법으로 학습할 수 있게 해준다. 또한 학습전략을 사용하는데 필요한 기술을 발전시키며, 지식을 확고히 하고, 자신의 이해를 다른 사람과 공유할 수 있는 폭을 넓힌다. 교사 측면에서 수학적 의사소통은 학생들의 수학적 이해 정도에 대한 정보를 얻게 하고, 학생들의 발전 과정을 학부모에게 보여줄 수 있는 증거를 제공하며, 더 효과적인 수업을 계획할 수 있도록 도움을 준다.

수학적 의사소통의 이러한 가치들을 고려하여 NCTM(1989)에서는 수학적 의사소통 능력을 수학 교육 목표의 하나로 포함시켰으며, 이를 구체화하여 초등수준에서 도달해야 할 수학적 의사소통 목표를 여섯 가지로 세분화하여 제시하였다. 학생들은 구체물, 말, 글, 도식, 그래프 등을 사용하여 상황을 모델링할 수 있어야 하며, 수학적인 문제 상황과 아이디어에 대하여 자신의 생각을 반성하고 명료화할 수 있어야 한다. 또한 정의의 역할을 포함하여 수학적인 개념을 일반적으로 이해할 수 있어야 하고, 수학적인 아이디어를 해석하고 평가하는 데 읽고, 듣고, 관찰하는 기능을 이용할 수 있어야 한다. 그리고 수학적 아이디어를 토의하고 가설을 설정하여, 설득력 있는 주장을 펼 수 있어야 하며, 수학 기호가 수학적 아이디어를 발달시킨다는 것을 인식할 수 있어야 한다. 이 밖에도 NCTM(2000)은 유치원에서 12학년까지의 학습자들이 의사소통을 통하여 수학적 사고를 굳건히 할 수 있고, 다른 사람의 수학적 사고와 전략을 분석·평가할 수 있으며, 수학적 언어를 적절히 사용하여 자신의 수학적 사고를 다른 사람들에게 일관되고 분명하게 전달할 수 있어야 한다고 권고하고 있다.

이러한 목표를 실현하기 위한 수학적 의사소통 방법은 다양하게 존재하며, 기준에 따라 여러 가지로 구분될 수 있으나 본 논문에서는 의사소통 수단과 주체에 따라 의사소통 방법을 구분하였다. 수학적 의사소통 수단을 기준으로 하면 문자언어(수학기호, 글)를 사용하는 의사소통과 음성언어(말)를 사용하는 의사소통으로 나눌 수 있다. 또한 수학적 의사소통 주체를 기준으로 하면 수학적 문제 해결을 위해 자신과 대화하는 메타인지적 의사소통과 타인과 의견을 교환하는 토의식 의사소통으로 구분할 수

있다(이종희 · 김선희, 2002).

교사는 이러한 수학적 의사소통 방법을 사용하면서 비형식적으로 학생들을 평가해야 하며, 학생들이 수학적 아이디어를 표현하고 해석하는 방법에 주의하여 그들이 사용하는 언어의 명료성, 정확성, 적합성 등을 평가해야 한다. NCTM(1989)에서는 이를 위해 수학적 의사소통 평가 규준을 세 가지로 제시하고 있다. 첫째, 학생들은 수학적 아이디어를 말하고, 쓰고, 시각적으로 표현할 수 있어야 한다. 둘째, 학생들은 글이나 말 또는 시각적으로 표현된 수학적 아이디어를 이해하고 해석할 수 있어야 한다. 셋째, 학생들은 수학 용어와 기호 체계, 구조를 사용하여 아이디어를 표현하고 관계를 기술함으로써 주어진 상황을 모델링할 수 있어야 한다.

### 3. 수학적 과제와 수학적 의사소통

수학적 과제는 학생들의 수학적 의사소통에 지대한 영향을 끼치므로 수학적 의사소통 능력 신장에 있어서 그 역할이 매우 중요하다(이미애, 2001; 장영일, 2003). 이러한 수학적 과제는 그것이 제시되는 형태나 종류에 따라 학습자의 수학적 의사소통 활동과 태도에 다른 영향을 미치기도 한다(최혜령 · 백석윤, 2005). 따라서 학생들의 수학적 의사소통을 촉진시키기 위해서는 바람직한 수학적 과제를 제공해야 한다.

바람직한 수학적 과제는 일반적으로 수학적인 내용을 담고 있고, 해결방법이 다양하며, 여러 가지 표상을 사용하는 공통된 특성을 지니고 있다. Artzt와 Armour-Thomas(2002)는 자신의 지식과 기능을 새로운 수학적 상황과 관련지을 수 있도록 다양한 표상양식을 제공하고, 학생들의 호기심을 자극하며, 이전에 배운 내용과 앞으로 배울 내용을 연관시킬 수 있는 과제를 가치 있는 수학적 과제라고 언급하고 있다. Hiebert et al.(2004)은 반성적으로 사고하고 의사소통하는 수업시스템을 구축하기 위해서는 수학적 탐구를 통해 여러 가지 해결방법을 제안할 수 있는 진정한 의미의 과제를 제공해야 한다고 주장하였다.

Van de Walle(2003)는 수학적인 내용을 포함하고, 모든 학생들이 접근가능하며, 해결방법에 대해 정당화와 설명을 요구하는 과제가 바람직한 수학적 과제라고 말하고 있다. 나소연(2002)은 의사소통 기회를 제공하는 수학적 과제는 해결방법이 다양하며, 여러 가지 표상을 사용하여 학습자 자신의 생각을 정당화하고 해석하게 하는 특성을 지닌다고 주장하고 있다.

이와 같이 지금까지의 선행연구들은 수학적 과제가 수학적 의사소통을 촉진시키는데 긍정적인 영향을 주며, 제공되는 수학적 과제의 종류에 따라 학습자들 간의 의사소통 모습이 달라질 수 있음을 시사하고 있다.

## III. 연구방법

### 1. 연구대상 및 절차

본 연구는 서울특별시 도봉구에 소재하고 있는 C초등학교 5학년 7개 학급 중에서 학생 24명(남 12명, 여 12명)으로 구성된 한 개의 학급을 연구대상으로 하며, 이 연구에서 사용된 학생들의 이름은 가명이다. 이 학급의 학생들은 기본 학력 진단평가에서 70점 이상을 획득함으로써, 대부분 기본적인 학습 능력을 갖추고 있으나 문제 이해력이 부족하여 문제 해결에 어려움을 호소하는 학생들도 5명 정도 존재한다. 정서발달 측면에서 주의가 산만한 학생들이 3~4명 있으나 전반적으로 집중력이 좋은 편이다. 가정환경 측면에서 살펴보면, 학부모님들이

대부분 고졸 이상의 학력을 갖고 있으며, 맞벌이 가정이 절반 이상이고 대체로 아파트와 빌라에 살고 있다.

연구대상을 선정한 후, 원활한 자료 수집을 위해 학생들이 자신의 생각을 말과 글로 표현할 수 있도록 2006년 8월 30일부터 2006년 10월 25일까지 약 2개월 동안 의사소통 훈련을 실시하였고, 그에 적합한 수학 문화를 형성하고자 노력하였다.

수학적 의사소통 훈련은 말로 표현하는 훈련과 글로 표현하는 훈련으로 이루어졌다. 우선 말로 표현하는 훈련을 위해 수학적 의사소통에 필요한 역할을 '이끔이', '기록이', '꼼꼼이', '칭찬이' 4가지로 나누어 모둠역할 훈련을 실시하였다. 글로 표현하는 훈련을 위해서는 수학공책과 수학일지를 사용하였다. 수학공책은 수학 수업시간마다 수업단계에 맞게 문제쓰기, 단서 찾기, 문제해결하기, 공유하기 순서로 자신의 해결방법을 공책에 구조화하도록 하였다. 또한 수학 수업이 끝난 후에 수학시간에 새롭게 알게 된 점, 궁금한 점, 느낀 점, 오늘 배운 것 중 실생활에 적용할 수 있는 점 등을 수학일지에 간단히 기록하게 함으로써, 학생들이 자신의 생각을 정리할 수 있는 기회를 제공하였다.

수학 문화 형성을 위해서는 크게 2가지 방법을 사용하였다. 첫 번째는 2학기 초에 수학적 의사소통의 중요성을 생각해보면서 학생들 스스로 모둠의 의사소통 규범을 만들어 보게 한 후, 매 수학 수업시간마다 그것을 노래로 부르게 하였다. 두 번째는 수학 수업시간에 '공유하기' 시간을 따로 만들어 학생들의 다양한 해결방법을 칠판에 적어두고, 각 방법이 '수학적으로 무엇이 다른지?' '무엇이 수학적으로 받아들일만한 설명인지?' '무엇이 수학적으로 세련된 설명인지?'에 대해 함께 토의해 보았다.

본 실험을 실기하기에 앞서 개발한 과제의 문항타당도를 알아보고, 예기치 못한 변수를 미리 추출하여 보완하려는 목적으로 2006년 9월 16일 예비실험을 실시하였다. 예비실험 모둠은 2006년 8월 30일 2학기 수학 진단평가 결과를 토대로 상 수준 1명, 중 수준 2명, 하 수준 1명으로 4명씩 6개의 모둠을 구성하였다. 예비실험에서 사용된 과제는 문항타당도를 확인하기 위해 본 실험과 같은 영역인 수와 연산 영역에서 5-나 단계의 소수 곱셈 단원을 선택하여 4가지 유형의 과제를 개발하였다.

2006년 10월 19일 모둠의 의사소통을 원활하게 하기 위해서 본 수업 녹화 1주일 전에 무선할당 방법에 의해 모둠을 구성하였다. 연구대상인 24명의 학생들에게 무작위로 A에서 X까지 서열을 부여하고 학생들을 4명씩 무선 할당하여 6개의 모둠을 구성하였다. 이로써 통계적으로 각 모둠의 동일성을 유지하였으며, 연구결과의 일반화 가능성을 높였다.

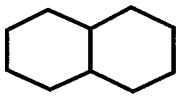
## 2. 검사 도구

연구에 필요한 검사 도구를 개발하기 위해 초등수학에서 차지하는 비중이 높고, 다른 영역에 비해 기계적 학습이 많이 일어나며, 인지적 사고수준에 따른 과제 수준이 명확하게 드러나는 수와 연산 영역에서 5-나 단계의 분수 나눗셈 단원을 제재로 선정하였다.

Stein et al.(2000)은 과제 유형을 공식 암기 중심의 '암기형 과제'와 개념원리와 관련 없는 단순 알고리즘 중심의 '연계성 없는 절차형 과제', 개념원리와 관련 있는 '연계성 있는 절차형 과제', 복합적인 사고를 요구하는 '수학행하기 과제'로 분류하였다. 그러나 이러한 분류는 과제를 지칭하는 명칭이 너무 길고, 용어가 명료하지 못한 점이 있기 때문에, 이 논문에서는 각 과제 유형을 대변할 수 있는 단어 중심으로 용

어를 약간 수정하여 암기형 과제, 절차형 과제, 개념원리형 과제, 탐구형 과제로 명명하였다.

<표Ⅲ-1> 검사도구로 사용된 과제

| 과제유형 | 과제 | 설명 |
|---|---|---|
| 암기형 | ♣ 다음 문제의 답을 구하시오.<br>1÷2 3÷8 5÷7 13÷9<br>4÷11 15÷6 2÷10 14÷3 | 이 문제는 제수가 자연수일 경우, 피제수에 관계없이 $\frac{1}{(자연수)}$의 곱셈 형식으로 전환해서 푼다는 사실만 암기해도 문제를 보는 즉시 답을 구할 수 있기 때문에 암기형 과제라 할 수 있다. |
| 절차형 | ♣ 다음 분수의 혼합계산을 하고, 계산값이 큰 것부터 차례대로 기호를 쓰시오.<br>㉠ $3\div4$ ㉡ $\frac{3}{8}\div6\times14$ ㉢ $10\frac{2}{3}\div8$<br>㉣ $17\frac{1}{3}\div5\times8$ ㉤ $8\frac{3}{5}\div7$ | 이 문제는 분수의 혼합계산 방법을 이용하여 자연수의 계산 순서와 같이 왼쪽에서 오른쪽으로 차례대로 계산하고, 대분수를 가분수로 고친 뒤, (분수)÷(자연수) = (분수)× $\frac{1}{(자연수)}$의 계산 절차를 적용하여 해결할 수 있다. 즉, 이 문제는 단순한 계산 방법을 사용하는 연습 문제의 성격이 강하므로 절차형 과제라 할 수 있다. |
| 개념원리형 | ♣ 주어진 정육각형 그림 두 개를 합쳐 놓은 모양을 1이라고 할 때, $\frac{2}{3}\div4$의 계산과정을 그림으로 표현하면서 간략히 설명하시오.<br> | 이 문제는 나눗셈과 분수 개념을 넓이 분할과 연결시키는 수학적 아이디어를 함축하고 있다. 또한 이 문제는 답에 이르는 방법이 다양하며, 개념원리를 이해해야지만 비로소 절차를 사용하여 문제를 해결할 수 있기 때문에 개념원리형 과제라 할 수 있다 (Stein et al., 2000). |
| 탐구형 | ♣ 다음의 규칙을 잘 읽고 보기에서 주어진 숫자를 이용하여 계산 결과가 $\frac{2}{3}$가 되는 식을 4개 이상 만들어 보아라. (단, 계산 과정도 함께 쓴다.)<br><규칙><br>※ 아래 <보기>에서 주어진 수를 꼭 한번만 사용하여 다음 식을 만든다.<br>· (자연수)÷(자연수)<br>· (분수)÷(자연수)×(자연수)<br>· (분수)÷(자연수)<br>· (분수)×(자연수)÷(자연수)<br>· (분수)÷(자연수)÷(자연수)<br><보기><br>· 사용할 수 있는 자연수: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8<br>· 사용할 수 있는 분수 : $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{14}{15}$,<br>$2\frac{2}{3}$, $6\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{7}$, $1\frac{5}{9}$, $1\frac{1}{3}$ | 이 문제는 분수의 나눗셈 단원에서 배운 모든 내용을 종합적으로 이해하고 적용해야 해결할 수 있다. 또한 분수의 혼합 계산에 대한 기본 원리를 바탕으로 창조적 사고를 통해 다양한 방법으로 문제 해결에 접근할 수 있으므로 탐구형 과제라 할 수 있다 (정동권, 송상헌, 김홍구, 이용길, 김성만, 정주자 외, 2002, p. 328). |

### 3. 자료 수집 및 분석 방법

본 수업 녹화는 2006년 10월 26일 정규수업 시간에, 개발된 수학적 과제를 무작위로 추출해서 각 모둠에 2가지 유형의 과제를 제공함으로써 실시되었다. 이 연구에서 사용된 수업모형은 여러 선행연구를 참고하여 탐구수업 모형을 연구목적에 맞게 변형시켜 적용하였다(김보영 · 김민경, 2003; 박성선, 2002; 채미애, 2002; Lampert, 2001; Stephan & Whitenack, 2003).

수업의 도입부에서는 사회수학적 규범을 상기시키는 노래를 만들어 부르고, 수학공책, 수학일지를 점검한 내용을 피드백하면서 수학문화세우기 활동을 하였다. 전개 부분은 문제쓰기, 단서찾기, 개인 문제해결하기, 모둠 공유하기 단계로 진행되었으며, 정리부분은 학습내용과 느낀점, 궁금한 점 등을 수학일지에 기록하도록 하였다.

자료 분석은 학생들의 문제해결 과정을 비디오로 녹화하여 작성한 트랜스크립트를 바탕으로 양적 분석방법과 질적 분석방법을 병행함으로써, 프로토콜 작성, 프로토콜 번호부여, 해석, 범주화 과정을 거쳐 이루어졌다. 자료 분석 과정에서 학생들의 수학적 의사소통 참여 정도가 수학적 과제에 따라 달라진다는 것을 알 수 있었다. 또한 수학적 의사소통은 개인의 수학적 정당화 과정과 모둠의 수학적 합의 과정에서 주로 이루어지며, 과제 유형에 따라 수학적 의사소통 내용이 변한다는 것도 알 수 있었다. 그리하여 수학적 의사소통 분석 관점을 수학적 의사소통 참여, 수학적 정당화 유형, 수학적 합의 과정으로 선정하여 수학적 과제에 따른 수학적 의사소통의 변화를 양적 측면과 질적 측면에서 균형 있게 분석하고자 하였다.

수학적 의사소통 참여는 의사소통 참여 횟수와 상호작용 내용을 바탕으로, 학생들이 수학적 의사소통에 어떻게 참여했는지 분석한 것으로, 우선 프로토콜에 나타난 발화를 의사소통이 이루어질 때의 역할에 따라 화자(발표하는 사람)와 청자(듣는 사람)로 나누었다. 그런 다음, 발화 종류를 설명 · 의견 · 제안 · 요청 · 질문과 긍정반응 · 부정반응 · 응답(진술)으로 추려내어 모둠토의를 하는 동안, 각각의 발화가 나타난 횟수와 내용을 살펴보았다.

수학적 정당화는 반성적 사고를 이용하여 자신의 풀이방법을 명료화시킬 때, 그 근거를 권위 · 직관 · 과거경험 · 수학적 논리 중 어디에 두고 설명하는지를 나타내며, 분석 기준은 크게 정당화의 근거가 학습자의 내부에 있는지, 외부에 있는지에 의해 1차적으로 나누어진다. 구체적인 정당화 유형은 정당화의 근거가 교과서 · 친구 · 선생님과 같은 외부의 권위인지, 자신의 직관인지, 문제집이나 생활 속의 경험인지, 수학 자체의 논리인지에 의해 결정된다. 이 밖에도 생략이라는 유형이 있는데, 이것은 답만 말한 경우와 풀이방법을 말했지만 절차를 있는 그대로 나열하는 경우를 의미하는 것으로 보았다. 앞에서 설정한 4가지 정당화 기준에서 살펴보면 위의 두 가지 경우는 크게 차이가 없기 때문에, 이 논문에서 사용된 '생략'이라는 용어는 '수학적 정당화의 근거가 없다'는 말과 같은 의미로 사용되었다고 보아도 무방하다.

수학적 합의 과정은 개인발표 후, 모둠토의 활동의 마지막 부분에서 모둠학습지에 기록할 모둠의 해결방법을 결정하는 논의 과정을 말하는 것으로, 합의에 참여하는 참가자 수와 모둠원들 사이의 상호작용 성격을 기준으로 나타낸다. 수학적 합의는 생략 · 수용적 · 논쟁적 · 정교화된 합의로 범주화하여 에피소드 중심으로 분석하였다.

## Ⅳ. 분석 및 논의

각 과제 유형에는 세 모둠씩 참여했으며, 한 모둠은 4명의 모둠원으로 구성되어 있어, 각 과제 유형에 참여한 학생 수는 모두 12명씩이다. 암기형 과제에 참여한 모둠은 2, 5, 6모둠이고, 절차형 과제에 참여한 모둠은 3, 4, 6모둠이다. 개념원리형 과제에 참여한 모둠은 1, 3, 5모둠이고, 탐구형 과제에 참여한 모둠은 1, 2, 4모둠으로 각각의 모둠은 무작위 추출에 의해 제공된 2가지 유형의 과제를 해결하였다.

### 1. 수학적 의사소통 참여 분석

#### 가. 암기형 과제

<표 Ⅳ-1>은 암기형 과제를 해결한 모둠의 수학적 의사소통 참여 횟수가 일인당 평균 4.67번으로 다른 과제에 비해 그 횟수가 낮음을 보여준다. 또한 암기형 과제에서 나타난 발화 유형은 설명 12회, 제안 3회, 요청 8회, 질문 12회, 긍정반응 9회, 부정반응 2회, 응답 10회로 설명과 질문이 다른 발화 유형에 비해 많이 나타났다. 이것은 암기형 과제의 특성상 학생들의 답이 비슷하게 되풀이되어, 처음 발표한 한두 명의 학생들만 열심히 자신의 답을 말하고 나머지 학생들은 간단히 동의만 표현함으로써 소극적으로 의사소통에 참여했기 때문에 나타난 현상으로 생각된다.

암기형 과제에 나타난 설명은 해결방법의 과정과 전략을 말하기보다는 단순히 제시된 문제의 답만 열거하거나 '앞 사람과 답이 같다'라고 표현하는 것에 그치고 있다. 질문 또한 발표된 수학적 해결방법을 정교화시키는 내용보다 '내 답 맞지?' '다 이렇게 풀지 않았어?'와 같이 예나 아니오로 대답할 수 있는 양자택일형 질문이 대부분을 차지했다. 세 모둠 모두 의견을 제시하는 발화가 한 번도 나타나지 않았으며, 제안의 경우도 문제의 해결방향을 모색하기 위한 것이 아니라 '답이 다 똑같으니 다음 문제로 넘어가자'와 같이 모둠토의를 빨리 끝내자는 내용의 제안으로, 이것은 암기형 과제의 모둠토의를 무의미하게 여기는 학습자들의 생각을 잘 보여주고 있다.

#### 나. 절차형 과제

<표 Ⅳ-2>에서 절차형 과제를 해결한 모둠의

<표 Ⅳ-1> 암기형 과제에서 의사소통 참여 횟수

| 모둠 | 화자 | | | | | 청자 | | | 계 | 평균 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 설명 | 의견 | 제안 | 요청 | 질문 | 긍정 | 부정 | 응답 | | |
| 2 | 3 | · | 1 | 3 | 4 | 2 | 1 | 3 | 17 | 4.25 |
| 5 | 5 | · | 1 | 4 | 3 | 3 | · | 3 | 19 | 4.75 |
| 6 | 4 | · | 1 | 1 | 5 | 4 | 1 | 4 | 20 | 5.00 |
| 계 | 12 | · | 3 | 8 | 12 | 9 | 2 | 10 | 56 | 4.67 |

<표 Ⅳ-2> 절차형 과제에서 의사소통 참여 횟수

| 모둠 | 화자 | | | | | 청자 | | | 계 | 평균 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 설명 | 의견 | 제안 | 요청 | 질문 | 긍정 | 부정 | 응답 | | |
| 3 | 4 | · | · | 3 | 3 | 4 | · | 2 | 16 | 4.00 |
| 4 | 4 | 1 | · | 4 | 3 | 6 | 2 | 1 | 21 | 5.25 |
| 5 | 6 | 1 | 1 | 4 | 2 | 4 | 1 | 1 | 20 | 5.00 |
| 계 | 14 | 2 | 1 | 11 | 8 | 14 | 3 | 4 | 57 | 4.75 |

참여 횟수는 일인당 평균 4.75회로, 암기형 과제보다 약간 높은 수치이나 여전히 낮은 참여를 보인다. 절차형 과제에 나타난 발화 유형은 설명 14회, 의견 2회, 제안 1회, 요청 11회, 질문 8회, 긍정반응 14회, 부정반응 3회, 응답 4회로 설명과 긍정반응이 가장 많이 나타났다.

절차형 과제에서의 설명은 답이 나오게 된 계산절차를 그대로 나열하는 형태로, 답만 말했던 암기형 과제보다는 설명이 길어졌다. 또한 절차형 과제에서는 의견과 제안이 수학적 의사소통에서 많은 비율을 차지하지 못했는데, 이것은 절차형 과제가 앞의 과제 유형에 비해 문제해결에 더 많은 시간과 노력을 요구함에도 불구하고, 여전히 생각하지 않고 기계적인 계산 숙달만으로도 쉽게 문제를 해결할 수 있기 때문에 나타난 현상으로 생각된다.

절차형 과제에서는 학생들이 자발적으로 답이 나오게 된 절차를 설명함으로써, 풀이 과정을 묻는 질문과 응답의 횟수가 많이 감소했다. 절차형 과제에서 사용된 질문은 '역수가 뭐야?' '첫 번째 식의 답은 얼마야?'와 같이 친구들이 이미 알고 있는 정보를 단순히 재생시키는 수준의 단답형 질문이 주를 이루었다.

### 다. 개념원리형 과제

<표 Ⅳ-3>에서 개념원리형 과제를 해결한 세 모둠의 수학적 참여 횟수를 살펴보면 1모둠 45회, 3모둠 50회, 5모둠 44회로 일인당 평균 11.58회 정도의 참여를 보이고 있다. 개념원리형 과제에 나타난 발화는 설명 26회, 의견 15회, 제안 6회, 요청 13회, 질문 26회, 긍정반응 28회, 부정반응 3회, 응답 22회로, 질문·긍정반응·응답의 횟수가 앞의 과제 유형들에 비해 2배 이상 많이 나타났다.

개념원리형 과제에서 가장 많이 나타난 반응은 질문과 응답으로, 이것은 개념원리형 과제에 접근하는 방법이 다양해서 서로의 기발한 생각에 대한 궁금증이 증폭되었기 때문에 나타난 현상으로 생각된다. 이러한 사실은 학생들 사이의 질문 내용을 보면 알 수 있는데, 개념원리형 과제에서는 '그것을 왜 곱해?' '거기서 어떻게 그렇게 될 수 있어?'와 같이 알고 있는 정보의 재구성을 통해 문제해결 이유나 근거를 묻는 사고촉진형 질문이 많이 제기되고 있다. 개념원리형 과제에서는 '전체를 똑같이 나눈 것 중에 몇 개를 나타내는 것이 분수 개념인데, 다이아몬드 그림을 사용하면 어떻게 그것을 분수로 나타낼 수 있습니까?'와 같이 학생들의 잘못된 용어 사용을 교정하는 질문도 나타나고 있다. 또한 한 학생이 문제 조건과 맞지 않는 그림막대로 자신의 풀이방법을 설명하자 다른 모둠원들이 '문제에서는 이 그림을 가지고 표현하라고 했는데 왜 그림막대로 했습니까?'와 같이 해결방법의 모순점을 지적하는 질문도 제기되었다. 이와 같이 개념원리형 과제에서는 수준 높은 질문을 통해 발표자가 어려워하는 부분을 알려주는 또래 교수 활동이 부분적으로 나타나고 있다.

<표 Ⅳ-3> 개념원리형 과제에서 의사소통 참여 횟수

| 모둠 | 화자 | | | | | 청자 | | | 계 | 평균 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 설명 | 의견 | 제안 | 요청 | 질문 | 긍정 | 부정 | 응답 | | |
| 1 | 9 | 8 | · | 3 | 10 | 7 | · | 8 | 45 | 11.25 |
| 3 | 8 | 3 | 6 | 4 | 9 | 13 | 1 | 6 | 50 | 12.50 |
| 5 | 9 | 4 | · | 6 | 7 | 8 | 2 | 8 | 44 | 11.00 |
| 계 | 26 | 15 | 6 | 13 | 26 | 28 | 3 | 22 | 139 | 11.58 |

제안의 성격도 앞의 과제 유형에서 나타난 것과는 확연히 달랐다. 암기형이나 절차형 과제에서는 '답이 다 똑같으니까 다음 문제로 넘어가자'는 차원의 제안이 제기되었다. 그러나 개념원리형 과제에서는 '겹치는 답이 존재할 수 있으므로 수학을 제일 잘 하는 학생을 나중에 발표시키자'와 같이 발표 순서를 정하는 제안이나 '다양한 풀이방법 중 어떤 것을 어떻게 모둠 활동지에 정리할까?'와 같이 문제 해결 방법의 수학적 유사성과 차이점을 다루는 제안이 등장하였다.

여기서 주목할 점은 개념원리형 과제에서 나타난 의견이라는 발화 형태이다. 의견은 어떤 설명에 대한 자신의 생각을 의미하는 것으로 메타인지적 특성을 지닌다. 암기형 과제에서는 학업성취수준에 관계없이 모든 학생들이 문제를 해결할 수 있었기 때문에, 친구의 발표에 대해 특별한 의견 제시가 한 번도 일어나지 않았다. 절차형 과제에서는 계산이 복잡해지면서 자신의 계산 실수를 지적하는 친구의 발화에 의견을 드러내는 경우가 2번 있었다. 그러나 개념원리형 과제에서는 의견이라는 발화가 세 모둠을 합쳐서 15번이나 나타났는데, 이것은 주로 친구들의 다양한 해결방법을 인정하거나 자신이 해결하지 못한 부분을 친구의 도움으로 해결하는 과정에서 나타났다.

### 라. 탐구형 과제

<표 Ⅳ-4>에서 탐구형 과제를 해결한 모둠의 수학적 참여를 살펴보면 1모둠 47회, 2모둠 47회, 4모둠 48회로 일인당 평균 11.83회 참여했으며, 모둠 간의 수학적 의사소통 참여정도가 거의 비슷함을 알 수 있다. 탐구형 과제에 나타난 발화 유형은 설명 21회, 의견 12회, 제안 8회, 요청 14회, 질문 21회, 긍정반응 48회, 부정반응 5회, 응답 13회로 긍정반응의 횟수가 가장 많이 나타났는데, 그것은 크게 2가지 이유에서 기인하는 것으로 보인다. 첫째는 학생들이 답을 발표하고 설명하는 과정에서 상호작용을 많이 했기 때문이고, 둘째는 학생들의 모둠토의가 단순히 문제의 답을 구하는 데에서 그치지 않고, 답의 규칙을 찾아내는 과정까지 확장됨으로써 친구 설명에 동의하고, 감탄하는 표현이 증가했기 때문이다.

탐구형 과제에서는 개념원리형 과제와 비슷하게 의견과 제안의 발화 횟수가 높게 나타났다. 이것은 탐구형 과제가 학생들에게 심화된 의사소통 기회를 제공하여, 모둠토의에서 의견과 제안이 활발하게 일어났음을 말해준다. 또한 탐구형 과제에서는 양자택일형 질문이나 단답형 질문에서 벗어나 한 단계 더 발전된 형태의 질문이 이루어졌다. 즉, 탐구형 과제에서는 '$\frac{8}{3}$에서 분자인 8을 반으로 줄여야 하니까 곱하기 4 대신에 나누기 4를 해야 되지 않을까?'와 같이 메타인지적 사고를 유발하는 질문이나, '어떻게 그렇게 됩니까?'와 같이 발화의 논리적 타당성과 이유를 묻는 확장형 질문이 주로 행해지고 있다. 이러한 질문은 발표한 친구의 잘못된 이해를 교정하는 과정에서 나타난

<표 Ⅳ-4> 탐구형 과제에서 의사소통 참여 횟수

| 모둠 | 화자 | | | | | 청자 | | | 계 | 평균 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 설명 | 의견 | 제안 | 요청 | 질문 | 긍정 | 부정 | 응답 | | |
| 1 | 6 | 4 | 3 | 6 | 8 | 15 | · | 5 | 47 | 11.75 |
| 2 | 7 | 6 | 5 | 2 | 8 | 14 | 2 | 3 | 47 | 11.75 |
| 4 | 8 | 2 | · | 6 | 5 | 19 | 3 | 5 | 48 | 12.00 |
| 계 | 21 | 12 | 8 | 14 | 21 | 48 | 5 | 13 | 142 | 11.83 |

것으로, 탐구형 과제가 활발한 또래 교수활동을 촉진시키는데 중요한 역할을 하고 있음을 보여준다.

여기서 주목해야 할 점은 탐구형 과제에서는 사회적 규범[1)]이나 사회수학적 규범[2)]에 입각한 제안이 등장했다는 것이다. 탐구형 과제를 해결한 학생들이 수식으로 제시된 답을 말로 설명하면서 발표하자, 학업성취도가 낮은 학생들은 친구들의 발표를 이해하기 어려워했다. 이 때, 어떤 학생이 '모둠원들끼리 풀이방법을 발표할 때 모둠학습지에 수식을 쓰면서 설명하자'고 제안했다. 그리고 이러한 제안에 나머지 모둠구성원들이 동의함으로써 사회적 합의에 의해 새로운 발표 규범이 정해졌다. 또한 모둠토의 마지막 부분에서 모둠원들이 발표한 것을 바탕으로 '수학적으로 효율적인 설명은 무엇인지?' '모둠원들의 해결방법이 수학적으로 무엇이 다른지?'에 대한 사회수학적 규범과 '모둠학습지에 어떻게 기록할 것인지?'에 대한 사회적 규범이 합의되었다(방정숙, 2001).

이뿐만 아니라 다양한 수식이 발표되자 한 학생이 '식을 좀 더 쉽게 찾아보는 방법을 알아보자'고 제안하면서 학생들이 발견한 규칙의 타당성 여부를 검증하는 의사소통이 의견·질문·응답의 형태로 이루어졌다. 이와 같이 탐구형 과제의 모둠토의는 답이나 기록방법을 정하는 데에서 그치지 않고, 일반적인 원리나 규칙을 이끌어 내는 상호작용으로까지 발전되어 학생들의 심오한 수학적 의사소통 참여를 유도해냈다.

이러한 사실로 미루어 볼 때, 탐구형 과제는 답이 여러 개 존재하는 개방적 성격을 지니고 있어 학생들의 수학적 의사소통 참여의욕을 고취시키고, 서로의 답에 대한 수학적 타당성을 검증하게 함으로써, 수학적 의사소통 참여를 높이는데 기여하고 있음을 알 수 있다.

### 마. 논의

각 과제 유형에 참가한 학생들의 일인당 평균 참여 횟수를 살펴보면, 암기형 과제가 4.67회, 절차형 과제가 4.75회, 개념원리형 과제가 11.58회, 탐구형 과제가 11.83회로 과제 해결에 요구되는 인지적 사고 수준이 높은 과제일수록 수학적 의사소통 참여가 높게 나타났다. 구체적 발화 유형을 살펴보면, 암기형이나 절차형 과제에서는 의견·제안과 같은 발화 형태가 거의 나타나지 않았으며, 양자택일형이나 단답형 질문이 주를 이루었다. 이에 비해 개념원리형이나 탐구형 과제에서는 의견·제안·긍정반응의 횟수가 높게 나타났고, 사고촉진형 질문이 자주 등장했으며, 학생들 간의 또래교수활동 모습이 나타났다.

이와 같이 단순 암기만으로 문제를 해결하는 암기형 과제나 알고리즘 적용에 초점을 둔 절차형 과제는 답이 제한적이고 접근 방법이 다양하지 못하기 때문에, 학생들의 의사소통 참여의욕을 저하시켜 수학적 의사소통 자체가 형식적으로 이루어지게 할 가능성이 높고, 이것은 학생들의 수학적 의사소통 참여 저하로 이어질 수 있다. 이에 비해, 다양한 접근 방법으로 문제를 해결할 수 있는 개념원리형 과제와 탐구형 과제는 해결방법의 개방성으로 인해 활발하고 유의미한 수학적 의사소통 참여를 촉진

---

1) 사회적 규범은 교실에서 교사나 학생이 그들의 행동 방식과 의사소통 방식에 관해 서로에게 가지고 있는 기대를 의미한다. 사회적 규범의 예는 '자신의 해결방법을 설명하고 정당화하기', '친구 의견에 동의여부 표시하기', '이해가 안 되는 내용 질문하기' 등이다(Stephen & Whitenack, 2003, pp. 150-151).

2) 사회수학적 규범은 수학적인 활동에 구체화된 사회적 규범을 말하는 것으로 어떤 것이 수학적 토의, 설명, 표상으로써 중요한지를 나타내는 기준을 포함한다. 사회수학적 규범의 예는 '무엇이 받아들여질만한 수학적 설명인지 정하기', '의사소통과 추론을 뒷받침하는데 있어서 용납될 수 있는 표기 정하기' 등이다 (Stephen & Whitenack, 2003, p. 154).

시킨다. 이것은 다양한 해결방법과 해가 존재하는 개방형 문제는 학업성취도가 높고 적극적으로 표현하는 학생에 의해 토의가 주도되는 현상을 둔화시키고, 구성원들이 고르게 참여할 수 있는 기회를 제공한다는 박우자 · 전평국(2003)의 연구 결과와도 일치한다. 또한 같은 맥락에서 NCTM(2000)은 학생들의 수학적 의사소통 참여를 촉진시키는데 과제의 특성이 결정적인 역할을 한다고 지적하고 있다. 따라서 학생들의 수학적 의사소통 참여를 장려하기 위해서는 과제의 인지적 요구 수준을 잘 고려하여 학생들이 수학적으로 생각할 수 있는 과제를 제공해야 한다.

## 2. 수학적 정당화 유형 분석

### 가. 암기형 과제

암기형 과제에서는 권위에 의한 수학적 정당화와 수학적 정당화 과정이 생략된 경우를 볼 수 있었다. 암기형 과제의 경우, 단순 사실을 암기함으로써 문제를 해결할 수 있기 때문에 자신이 암기한 공식을 알게 해준 교과서 · 선생님 · 친구들의 권위에 의존하는 수학적 정당화가 많이 나타났다. 또한 암기형 과제에서는 학생들이 암기한 공식을 적용한 것 이외의 특별한 문제 풀이방법이 없기 때문에, 자신의 답을 정당화할 생각조차 못하는 경우가 있었으며, 이것은 수학적 정당화 과정의 생략이라는 형태로 나타나고 있다. 다음은 암기형 과제에 나타난 권위에 의한 수학적 정당화의 예이다.

교과서에서 그렇게 배웠잖아. (준혁)

1 나누기 2는 1 곱하기 2분의 1과 같으므로 답은 2분의 1입니다.......14 나누기 3은 14 곱하기 3분의 1과 같으므로 4와 3분의 2입니다. 내가 푼 답 맞지? (연호)

수학시간에 선생님께 앞에 있는 수는 분자가 되고 뒤에 있는 수는 분모가 된다고 배웠습니다. 그래서 답은 연호와 같습니다. (수연)

위의 예를 살펴보면 준혁이는 교과서에서 그렇게 배웠다고 말함으로써 자신의 풀이방법과 답을 교과서라는 외부 권위에 의존하여 정당화시키고 있다. 연호는 답과 풀이과정을 제시하였지만 계산 절차를 자세히 기술하는 수준에 그치고 있으며, 다른 친구들에게 답이 맞느냐고 물어봄으로써 친구의 권위에 의존하여 답의 타당성을 입증하고 있다. 수연이는 수학시간에 선생님께 그렇게 배웠다고 말함으로써 교사의 권위에 의존하여 자신의 답을 정당화하고 있다.

암기형 과제를 해결한 모둠에서는 권위에 의한 수학적 정당화뿐만 아니라 수학적 정당화과정이 생략된 경우도 나타났다. 암기형 과제에서 수학적 정당화가 생략된 예는 다음과 같다.

저도 식과 답이 모두 수연이와 같습니다. (민경)

저는 그냥 답만 말하겠습니다. 1번은 2분의 1이고,......8번은 4와 3분의 2입니다. (현석)

1 나누기 2는 1곱하기 2분의 1과 같습니다. 그래서 1번 답은 2분의 1입니다. 이런 식으로 하면 답이 앞의 사람과 같게 나옵니다. (종찬)

위의 예에서 민경이는 앞 사람과 답이 같다는 말로 수학적 정당화를 시도조차 하지 않았으며, 현석이는 답만 발표함으로써 수학적 정당화 과정을 생략하고 있다. 종찬이는 답뿐만 아니라 풀이 과정도 설명하려고 시도하고 있으나 주로 답을 진술하는데 치중하고 있어 수학적 정당화 과정이 나타났다고 보기 어렵다.

### 나. 절차형 과제

절차형 과제를 해결한 모둠에서는 수학적 정

당화 과정이 생략된 경우가 많이 나타났다. 이러한 현상은 절차형 과제의 단순 명료한 성격으로 인해 학생들이 깊이 있는 수학적 정당화를 시도할 필요성을 느끼지 못했기 때문에 나타난 현상이다.

그러나 절차형 과제에서의 수학적 정당화는 앞의 암기형 과제와 미묘한 차이점이 있다. 암기형 과제는 답만 말함으로써 수학적 정당화를 생략하는 경우가 많았지만, 절차형 과제에서는 답에 이르는 계산 절차를 그대로 진술함으로써 수학적 정당화 과정을 생략하는 경우가 많았다. 이것은 절차형 과제가 복잡한 계산 절차를 강조하기 때문에, 학생들이 발표할 때 풀이절차를 그대로 나열하는 경우가 많아서 생긴 현상으로 생각된다. 다음은 절차형 과제를 해결한 모둠에서 수학적 정당화 과정이 생략된 예이다.

> 저는 답만 말하겠습니다. ㉠은 4분의 3이고, ㉡은 8분의 7이고, ㉢은 1과 3분의 1이고, ㉣은 29와 15분의 13입니다. ㉤은 1과 35분의 8입니다. (근녕)

> 저는 답이 ㉣㉢㉤㉡㉠입니다. 그 이유는 ㉠㉡㉢㉣㉤을 다 계산합니다. 그러면 ㉠은 4분의 3, ㉡은 8분의 7, ㉢은 1과 3분의 1, ㉣은 27과 5분의 1, ㉤은 1과 35분의 8입니다. 그리고 자연수가 제일 큰 것이 이중에서 제일 큰 것을 뜻합니다. 자연수가 제일 큰 것은 ㉣입니다. 그 다음에 ㉢과 ㉤은 자연수가 똑같아서 통분을 해보면 ㉢이 더 큽니다. 그래서 일단 답이 ㉣㉢㉤입니다. 그 다음에 ㉠㉡은 자연수 일을 넘지 못해 앞에서 계산한 것보다 작고 ㉠㉡을 통분해 보면 ㉡이 더 크게 나오므로 답은 ㉣㉢㉤㉡㉠입니다. (진경)

앞의 예를 살펴보면 근녕이는 답만 말함으로써 수학적 정당화 과정을 생략하였고, 진경이는 답과 풀이절차를 그대로 진술하는 수준에서 자신의 풀이 방법을 제시할 뿐, 특별한 수학적 정당화를 시도하고 있지 않다. 이와 같이 절차형 과제에서는 학생들의 대부분이 계산절차를 그대로 진술함으로써 수학적 정당화 과정을 생략하였다.

### 다. 개념원리형 과제

개념원리형 과제에서 주로 나타난 수학적 정당화 유형은 직관과 수학적 논리에 의한 정당화이다. 개념원리형 과제에서는 직관에 의한 수학적 정당화 모습이 크게 2가지 형태로 나타났다. 가족끼리 나누어 먹었던 피자를 정육각형 모양 2개가 붙어있는 도형에 은유하거나 우리에게 익숙한 정육각형 변 6개를 보고 직관적으로 주어진 도형을 6등분함으로써 자신의 해결방법을 직관에 의해 정당화하였다. 다음은 개념원리형 과제에 나타난 직관에 의한 수학적 정당화의 예이다.

> 이 문제를 보니 정육각형 모양 2개가 붙어있는 피자가 생각났습니다. 그래서 피자를 나누는 기분으로 일단 이 전체 도형을 3개로 나누어서 그 중 2개를 색칠하고, 3개로 나눈 것을 다시 4개로 똑같이 나누어 그 중에 하나를 색칠하면 됩니다. 색칠이 안 되어 있는 것도 똑같이 나누어보면 작은 정삼각형 12개가 나오고, 결과적으로 12개 중에 2개가 색칠되어 있으니까 약분하면 6분의 1이 됩니다. (지희)

> 저는 정육각형을 보는 순간 여섯 개로 나누는 것이 분수로 나타내기 쉬울 것 같다는 생각을 했는데 문제의 계산 결과도 6분의 1이 되어, 일단 각각의 정육각형을 여섯 개로 나누어 한 칸씩 색칠해보았습니다. 그랬더니 작은 삼각형 12개 중 2칸이 색칠되었고, 이것을 분수로 표현해 보니 12분의 2가 되었습니다. 그래서 답은 이것을 약분한 6분의 1이 됩니다. (지현)

> 한 개의 정육각형은 보다시피 여섯 개의 변으로 이루어져 있습니다. 정육각형 한 개를 대각선 3개를 사용해 나누면 6개의 정삼각형이 나

옵니다. 그리고 가운데 있는 선을 지워주면 3개의 평행사변형이 되고 이렇게 생긴 것이 두 개 있으니까 전체적으로 보면 평행사변형 모양 6개가 나옵니다. 그런 다음 또 가운데 있는 선을 지우면 작은 V자 모양이 3개 나옵니다. 그 중 2개를 칠하면 3분의 2가 됩니다. 그것을 4개로 나누면 평행사변형 모양 1개가 나오고, 그것은 평행사변형 모양 6개 중 1개를 나타내므로 6분의 1이 됩니다. (희주)

위 예를 살펴보면 지희는 정육각형 모양 2개가 붙어있는 피자를 나누는 상황을 연상해서 그림으로 그려가며 자신의 풀이 과정을 정당화시키고 있는데, 이것은 은유적 직관에 의한 수학적 정당화라 할 수 있다. 지현이는 정육각형을 시각적 직관에 의해 6등분함으로써 자신의 답을 직관에 의해 수학적으로 정당화하고 있다. 희주도 시각적 직관에 의해 정육각형 2개를 정삼각형 12개로 나누고, 다시 그것들을 조합하여 평행사변형 6개로 만듦으로써 직관에 근거한 수학적 정당화를 시도하였다.

또한 개념원리형 과제에서는 수학적 논리에 의한 정당화 모습이 나타났는데, 이에 대한 예는 아래와 같다. 여기에서 기주는 분수의 개념과 나눗셈의 개념을 바탕으로 도출된 답의 타당성을 설명하고 있어 정당화 수준이 가장 높은 수학적 논리에 의한 정당화를 시도하였다. 승욱이는 약분과 통분의 수학적 원리를 이용하여 문제에 접근함으로써 자신의 답을 수학적으로 정당화시키고 있다. 종찬이는 $\frac{2}{3} \div 4$라는 문제를 분자 · 분모에 2를 곱함으로써 정육각형을 등분하기 쉬운 형태인 $\frac{4}{6} \div 4$로 문제를 변형시켜, 크기가 같은 분수로 만들어 자신의 답을 수학적 논리에 의해 정당화하고 있다. 승규는 전체를 똑같이 나눈 것 중 해당하는 것의 개수라는 분수의 개념과 같은 수를 곱하거나 나누어도 결과값은 같다는 상등의 원리를 이용하여 자신의 풀이 방법을 수학적 논리로 정당화시키고 있다.

일단 3분의 2 나누기 4의 답이 6분의 1이므로 정육각형 2개를 사용해서 이것을 표현하려면 약분해서 6분의 1이 되어야 하기 때문에 크기가 같은 분수를 만들기 위해 분모를 6의 배수로 만들면 된다고 생각했습니다. 그래서 6분의 1의 분자와 분모에 2배씩 해주었더니 12분의 2가 되어 정육각형 2개를 대각선을 이용해 12조각으로 나누었습니다. 그리고 그 중에 두 조각을 색칠하여 12분의 2로 나타내었습니다. 이렇게 하면 약분해서 6분의 1이 나옵니다. (승욱)

저는 정육각형을 3분의 2로 나타내는 것이 힘들어서 6분의 4로 나타냈습니다. 왜냐하면 정육각형은 쉽게 6등분이 되고, 6분의 4와 3분의 2는 크기가 같은 분수이기 때문입니다. 그런 다음 6분의 4를 4로 나누니까 그것을 네 사람에게 한 개씩 나누어 준다고 생각하면 6분의 1이 되어서 각각의 정육각형에 한 조각씩을 색칠하였습니다. (종찬)

이 정육각형 2개를 1이라고 했으니까 정육각형을 반으로 자르면 2분의 1이 됩니다. 2분의 1에서 정육각형을 이렇게 세 개로 나눈 다음 두 칸을 표시해 3분의 2를 나타냅니다. 그런 다음 3분의 2를 4개로 나누어 한 칸을 칠하고, 가장 작은 크기의 삼각형으로 주어진 정육각형 2개를 쪼갭니다. 왜냐하면 이 그림을 분수로 표현하기 위해서는 전체를 똑같이 몇 개로 나누었는지 알아야하기 때문입니다. 그리고나서 처음에 반으로 나누어 생각한 것이니까 다시 2배를 해준다고 생각해 색칠된 조각과 똑같은 크기의 삼각형을 1개 더 색칠합니다. 이렇게 하면 정육각형 2개가 작은 정삼각형 12개로 쪼개지고 색칠된 칸이 2칸이므로 12분의 2가 되어 약분하면 6분의 1이 됩니다. (승규)

### 라. 탐구형 과제

탐구형 과제에서는 주로 과거 경험과 수학적 논리에 의한 정당화가 나타났다. 탐구형 과제

에서 과거 경험에 의한 수학적 정당화는 사탕이나 피자를 나누어 먹는 것과 같이 생활 속의 경험을 활용하거나 과거에 유사한 문제를 풀었던 경험을 되살려서 정당화시키는 모습으로 나타났다. 탐구형 과제에서 볼 수 있는 과거 경험에 의한 정당화의 예는 다음과 같다.

> 왜냐하면 지금까지 분수의 나눗셈 문제를 풀어본 제 경험에 의하면 대부분 나누어지는 수의 분자와 나누는 수의 분모가 약분되어 계산되는 경우가 많았습니다. 그래서 3분의 2를 만들기 위해 분모가 3인 분수를 찾아보았습니다. 그랬더니 2와 3분의 2, 6과 3분의 2가 있었습니다. 그리고 실생활에서 음식을 나누어 먹을 때 음식의 개수가 많을수록 나누어 먹기 편하듯 이것을 자연수로 나눌 때에도 분수의 크기가 클수록 나누기 편할 것 같아 6과 3분의 2를 선택했습니다. 그리고 이것을 가분수로 고치면 3분의 20이 됩니다. 3분의 20을 2로 나누면 3분의 10이 되고 3분의 10을 또 5로 나누면 3분의 2가 됩니다. (선우)

> 피자를 나누어 먹었던 경험을 예로 들어 제 의견을 보충해 보겠습니다. 피자 2판이 있는데 3사람에게 나누어 준다고 하면, 우선 첫 번째 피자를 3분의 1로 나누어 세 사람에게 나누어 주고, 그다음 두 번째 피자를 또 3분의 1씩 나누어주면 됩니다. 그러면 한 사람당 3분의 2의 피자를 먹을 수 있습니다. 그래서 2 나누기 3은 3분의 2입니다. (연호)

위의 예에서 선우는 지금까지 분수의 나눗셈 문제를 풀어본 과거경험과 실생활의 경험을 바탕으로 분자·분모를 선택하여 주어진 조건에 맞는 분수식을 만듦으로써 자신의 답을 과거경험에 의해 정당화시키고 있다. 연호는 피자 2판을 3사람에게 나누어 주는 과거경험을 바탕으로 자신의 답을 수학적으로 정당화하였다.

탐구형 과제에서는 수학적 논리에 의한 정당화가 많이 나타났으며, 정당화에 사용된 수학적 논리도 다양했다. 분자·분모를 3의 배수로 똑같이 나누는 약분의 원리를 사용하거나 곱하거나 나누어도 원래의 값이 변하지 않는 자연수 1의 성질을 이용하기도 했다. 또한 자연수의 곱셈과 나눗셈 방법에서 연역적으로 추론한 방법을 사용하거나 그림을 그려 나눗셈의 포함제 개념을 설명함으로써 자신의 답을 수학적으로 정당화시킨 경우도 있었다. 이처럼 학생들이 수학적 논리를 사용하여 답을 정당화할 수 있었던 것은 '주어진 규칙과 조건을 활용해서 4개 이상의 식을 구하라'는 탐구형 과제의 개방적 특성 때문이라고 할 수 있다. 왜냐하면 학생들은 시행착오를 통해 한 가지 답은 쉽게 구할 수 있었지만, 여러 가지 답을 구하기 위해서는 나름의 규칙을 찾아야 했고, 이 규칙을 찾는 과정에서 수학적 논리에 의한 정당화가 주로 이루어졌기 때문이다. 다음은 탐구형 과제에 나타난 수학적 논리에 의한 정당화의 예이다.

> 저는 분수의 혼합계산 식으로는 못 찾고, 분수의 나눗셈 식으로만 찾았습니다. 연호가 발표한 식을 빼고 지금까지 안 나온 식 중에서 1과 3분의 1 나누기 2와 그것의 2배인 2와 3분의 2 나누기 4, 이렇게 두 가지 식을 발견했습니다. 왜 이렇게 풀었냐 하면 계산결과가 3분의 2가 나오게 하기 위해, 분수 나눗셈의 역연산인 분수 곱셈을 이용해서 3분의 2에 1 다음으로 간단한 자연수인 2를 곱해보았습니다. 그랬더니 3분의 4가 되었습니다. 그런 다음 문제의 조건에서 이와 같은 분수가 있는지 찾아보았더니 1과 3분의 1이 있었습니다. 그래서 거꾸로 3분의 4 나누기 2는 3분의 2가 된다는 것을 알아냈습니다. 그리고 두 번째는 각각의 분수에다 2배를 했습니다. 왜냐하면 나누는 수가 2배가 되고 나누어지는 수도 2배가 되면 결국 답이 같아지기 때문입니다. (준혁)

분수에 자연수를 나누거나 곱해서 계산결과가

3분의 2가 되어야 하니까 분모가 3인 분수 중에서 분자가 자연수와 곱하거나 나누어져 약분될 수 있는 것을 선택하는 것이 좋을 것 같았습니다. 그리고 자연수 1은 곱하거나 나누어도 원래의 값이 변하지 않는 성질이 있습니다. 그래서 분모가 3인 분수 중 보기의 제일 앞에 나와 있는 2와 3분의 2라는 분수를 선택했고, 거기에 자연수를 곱하거나 나누어서 3분의 2가 되어야 하니까 나누기 1을 하고 곱하기 4를 했습니다. (민경)

저는 그림을 그려서 생각해 보았습니다. 우선 답이 3분의 2가 나오니까 분모가 3인 분수들을 정사각형 그림을 그려 표현했습니다. 그 다음에 그것들이 정사각형 그림에 3분의 2씩 몇 번 들어가는지 그 횟수를 세어보았습니다. 그래서 첫 번째는 2 나누기 3이 나왔습니다. 두 번째는 1과 3분의 1을 3분의 2씩 그림으로 묶어 보았더니 2번 묶어져서, 1과 3분의 1 나누기 2가 나왔습니다. 세 번째는 2와 3분의 2를 3분의 2로 묶어 보았더니 4가 나왔고, 그것을 확인하기 위해 계산해보니 3분의 8 곱하기 4분의 1이 되어 3분의 2가 나왔습니다. (동규)

자연수의 사칙연산에서 곱셈식의 빈 칸을 구할 때, 나눗셈을 이용하는 것처럼 이 문제를 풀 때에도 그 방법을 이용하였습니다. 그런데 여기서는 나누는 수도 빈칸이어서 나누는 수가 될 수 있는 분수를 고정시키기 위해 사용할 수 있는 분수를 먼저 살펴보았습니다. 그런 다음 자연수를 가지고 했던 것처럼 거꾸로 계산해 보니 이런 답들이 나왔습니다. (상은)

앞의 예를 살펴보면 준혁이는 분수 나눗셈의 역연산인 분수 곱셈과 동분수 만드는 원리를 이용하여 자신의 답을 논리적으로 정당화시키고 있다. 민경이는 자연수 1을 곱하거나 나누어도 원래의 값이 변하지 않는다는 성질과 자연수가 곱해지거나 나누어 질 때, 분자와 약분이 되는 경우가 많으므로 분수의 분모가 3이 되어야 한다는 점을 이용함으로써 수학적 논리에 의한 정당화를 시도하였다. 동규는 그림을 그려 나눗셈의 포함제 개념을 설명함으로써 자신의 답을 수학적 논리에 의해 정당화하였으며, 상은이는 자연수의 곱셈과 나눗셈 방법에서 논리적인 추론을 통해 자신의 해결방법을 수학적으로 정당화시켰다.

### 마. 논의

암기형 과제에서는 권위에 의한 수학적 정당화가 나타났으며, 절차형 과제에서는 수학적 정당화 과정이 생략되었다. 개념원리형 과제에서는 직관과 수학적 논리에 의한 정당화가 나타났다. 탐구형 과제에서는 수학적 논리에 의한 정당화가 주를 이루었으며, 과거 경험에 의한 정당화 모습도 볼 수 있었다.

이와 같이 인지적 요구 수준이 다른 수학적 과제는 학생들이 자신의 답을 수학적으로 정당화시키는 방법과 깊은 관계가 있다. 단순한 사실을 기억하고 재생하는데 초점이 맞추어진 암기형 과제나 절차형 과제는 학생들이 그런 지식을 전달해준 외부의 권위에 의존하거나 수학적 정당화 과정 자체를 생략하게 만들었다. 그러나 개념을 이해하고, 이미 배운 지식을 활용하여 새로운 상황에 적용하는 개념원리형 과제나 탐구형 과제는 학생들이 직관이나 과거경험, 수학적 논리를 사용하여 자신의 답을 수학적으로 정당화하도록 촉구했다. 이러한 연구결과는 과제의 성격에 따라 수학적 정당화 유형이 달라질 수 있으므로, 과제의 특성을 고려하여 다양한 방법으로 정당화할 수 있는 과제가 제공되어야 한다는 권성룡(2003)의 연구결과와도 일치한다. 따라서 학생들에게 높은 수준의 수학적 사고력과 의사소통 능력을 길러주기 위해서는 다양한 정당화 가능성이 있는 개념원리형 과제나 탐구형 과제를 제시하는 것이 바람직하다.

### 3. 수학적 합의 과정 분석

#### 가. 암기형 과제

암기형 과제에서는 전반적으로 수학적 합의 과정이 나타나지 않았다. 이것은 암기형 과제의 단순성으로 말미암아 학생들이 돌아가면서 발표하는 동안 같은 답이 반복되는 것을 확인함으로써, 학생들이 해결방법과 답에 대해 특별히 합의할 필요성을 느끼지 못했기 때문에 나타난 현상이다. 아래의 에피소드를 살펴보면 4사람의 발표가 끝나자마자 사회자가 모둠토의를 끝내는 것으로 보아 뚜렷한 수학적 합의 과정이 나타나지 않았음을 알 수 있다. 다음은 암기형 과제에서 수학적 합의 과정이 생략된 에피소드이다.

> 영학- 그럼 제가 먼저 발표하겠습니다. 이 문제들은 모두 뒤에 있는 수가 분모가 되고, 앞에 있는 수가 분자가 됩니다. 그러므로 1번 답은 2분의 1....
>
> 근녕- 1번은 2분의 1, 2번은 8분의 3......8번은 4와 3분의 2입니다.
>
> 연진- 나누어지는 수는 분자가 되고 나누는 수는 분모가 되어 1 나누기 2는 2분의 1,......14 나누기 3은 4와 3분의 2입니다.
>
> 수빈- 1 나누기 2는 2분의 1......14 나누기 3은 4와 3분의 2입니다.
>
> 영학- 그럼 1번 문제의 답과 푸는 방법은 다 똑같으니까 2번 문제로 넘어가겠습니다. (6모둠)

#### 나. 절차형 과제

절차형 과제를 해결한 모둠의 수학적 합의 과정을 살펴보니 암기형 과제와 같이 수학적 합의 과정이 생략된 형태를 보였다. 절차형 과제의 경우, 문제 해결에 사용된 절차가 비슷해서 풀이방법의 다양성을 보장해주지 못하기 때문에, 학생들의 유의미한 수학적 합의 과정이 나타나지 않은 것으로 생각된다. 다음은 절차형 과제에서 수학적 합의 과정이 생략된 예를 나타낸 에피소드이다.

> 승욱- 지금 제가 푼 문제제시 1의 방법은 일단 ㉠,㉡,㉢,㉣,㉤을 모두 다 계산하였습니다......이것들을 가지고 통분해본 결과 가장 큰 순서대로 하면 ㉣,㉢,㉤,㉡,㉠이 나왔습니다.
>
> 지수- ㉠은 4분의 3, ㉡은 4분의 1......그래서 답은 ㉣,㉤,㉢,㉠,㉡입니다.
>
> 지현- ㉠은 4분의 3, ㉡은 8분의 7.....답은 ㉣,㉢,㉤,㉡,㉠입니다.
>
> 은하- 저도 앞의 친구들과 같이 ㉠은 4분의 3, ㉡은 8분의 7, ㉢은 1과 3분의 1....답은 ㉣,㉢,㉤, ㉡,㉠이 나왔습니다.
>
> 승욱- 우리 4사람 답이 모두 같으니까 다음 문제로 넘어가겠습니다. (3모둠)

#### 다. 개념원리형 과제

개념원리형 과제를 해결한 모둠에서는 부분참여나 전원참여에 의한 수학적 합의가 진행되었으며, 수용적 · 논쟁적 · 정교화 된 수학적 합의 과정을 나타냈다. 이것은 다양한 해결 방법이 나올 수 있는 개념원리형 과제의 특성 때문에, 제시된 해결 방법의 수학적 타당성과 세련성 정도를 결정하는 수학적 합의 과정이 모둠토의 마지막 부분에 활발히 나타난 것으로 생각된다. 다음은 개념원리형 과제에서 수용적 합의 과정을 나타낸 에피소드이다.

> 은주- (자신의 학습지를 다시 읽어보며 가만히 있다가) 그럼 어떤 것으로 우리 모둠의 해결 방법을 정하는 것이 좋겠습니까?
>
> 선우- 지희와 기주의 설명방법이 약간은 다르지만 결국 같은 이야기인 것 같습니다. 두 사람의 풀이 방법이 문제의 답에 가까우니까 두 사람의 방법을 참고하면 될 것 같습니다.

은주- 좋은 생각입니다. 또 다른 의견 있습니까? (아무 의견도 없자)

은주- 기주와 지희는 선우 의견에 동의합니까?

지희- 네. 동의합니다.

기주- 네. 제 생각에도 전체 정육각형을 우선 3개로 나누고 다시 각각을 4개로 나누어서 표현했다는 점에서 제 풀이 방법과 지희 풀이 방법이 비슷한 것 같습니다.

은주- 그럼 기록이인 지희가 기주의 학습지와 자신의 학습지를 참고하여 정리해 주십시오. (1모둠)

1모둠의 에피소드에서 은주는 수학적 합의를 이끌어 가는 사회자 입장에서 객관적으로 수학적 합의 과정에 참여했으며, 선우는 적극적으로 자신의 의견을 제시하였고, 지희와 기주는 그 의견에 동의함으로써 전원참여에 의한 수용적 합의가 이루어졌다.

3모둠에서는 부분참여에 의한 정교화된 합의 과정이 나타나고 있다. 지현이가 친구들의 방법적 차이를 언급하며 의견을 제안하자, 승욱이가 지현이의 의견을 보충하면서 모둠의 답이 점차 정교화되고 있다. 이에 은하는 두 사람의 의견을 절충함으로써 모둠해결방법 결정을 위한 수학적 합의를 마무리 지었다. 다음은 3모둠에서의 정교화된 합의 과정을 나타낸 에피소드이다.

은하- 잘됐다. 그런데 우리가 말한 것 모두 모둠학습지에 적어?

지현- 내 방법이랑 지수 방법은 비슷한 것 같고, 은하 방법은 조금 다른 것 같아. 다른 것은 다 적어야 하지 않을까?

승욱- 그래야 될 것 같아. 내 방법은 나누는 개수를 36개로 해서 확실히 다르지만, 지수 방법과 지현이 방법은 12개로 나누어서 색칠된 위치만 다를 뿐 결국 같은 말인 것 같은데...

은하- 그럼 일단 나눈 개수에 따라 풀이 방법을 그림으로 그리고, 색칠한 위치만 다른 경우는 그림 아래 간단한 설명을 써주자.

승욱- 좋아.

지현- 그럼 이상으로 3모둠 토의를 마치겠습니다. (3모둠)

5모둠에서는 발표된 수학적 풀이방법 중 가장 세련된 방법을 결정하는 과정에서 수학적 합의가 구체화되었다. 먼저 종찬이가 희주의 풀이방법이 가장 수학적임을 논리적으로 설명하자, 승규가 이에 동의하면서 추가적인 이유를 제시하였다. 그러나 현석이는 이러한 의견에 반대하면서 종찬이의 풀이방법이 수학적으로 더 세련되었다고 주장함으로써 모둠구성원들 사이의 수학적 논쟁을 유발시켰고, 결국에는 희주의 제안으로 거수에 의해 최종적인 수학적 합의가 이루어졌다. 따라서 5모둠에서는 전원참여에 의한 논쟁적인 수학적 합의 과정이 나타났다고 할 수 있으며, 이를 나타낸 에피소드는 다음과 같다.

승규- 이제 발표 다했다. 친구들 발표를 들어보니까 문제 푼 방식이 다 다르네. 신기하다. 그런데 누구 방법이 가장 간단하면서 이해하기 쉬운 것 같아?

종찬- 네 사람 방법이 다 좋지만, 나는 희주 방법이 가장 좋은 것 같은데... 처음부터 주어진 도형을 바로 3등분으로 나눈 것이 대단한 것 같아. 나한테는 그 부분이 어려웠거든...

승규- 그래서 너는 주어진 도형을 6개로 나누었구나.!! 너 말을 들어보니 희주 방법이 가장 좋은 것 같다. 수학적 해결 방법은 간단명료할수록 좋은 것이니까... 그리고 희주 방법이 분수의 나눗셈을 계산하는 과정과도 제일 비슷한 것 같아. 사실 현석이 방법도 중간에 용어를 잘못 사용해서 그렇지 아이디어 자체는 희주 방법하고 비슷한 것 같아.

현석- 나는 종찬이 방법이 좋은 것 같은데, 종찬이는 처음에 나누기 쉽게 정육각형을 6개로 나눈 다음, 그중 4개를 칠하고 4로 나누니까 바로 답이 나왔잖아.
희주- 현석이 말을 들으니 그럴 수도 있겠다. 그럼 다수결로 결정하자.
현석- 좋아. (5모둠)

## 라. 탐구형 과제

탐구형 과제의 수학적 합의 과정은 전원참여에 의한 합의가 이루어졌으며, 상호작용 성격을 기준으로 살펴보면 수용적 · 논쟁적 · 정교화된 합의 과정이 나타났다. 이것은 탐구형 과제가 모든 학생들에게 의사소통 참여의욕을 제공하여 모둠에 따라 다양한 합의 과정이 나타난 것으로 생각된다.

1모둠에서는 전원참여에 의한 정교화된 합의 과정이 나타났다. 1모둠의 수학적 합의는 모둠의 답을 결정하는 수준에 그치지 않고, 답을 많이 구할 수 있는 규칙을 생각해보는 데까지 확장되었다. 기주는 $1\frac{1}{3}$을 기준으로 자연수를 나누거나 곱해서 답을 구하는 경우, 뒷부분의 계산값이 2가 되면 된다는 규칙을 제시하였다. 지희는 자연수 1을 곱하거나 나누어도 결과값에 변화가 없다는 성질을 추가적으로 제시하여 구할 수 있는 답의 가짓수를 확장시키고 있다. 다음은 1모둠의 정교화된 수학적 합의 과정을 나타낸 에피소드이다.

선우- 그렇구나. 그런데 식을 좀 쉽게 찾을 수 있는 방법을 찾아보는 것은 어떨까?
지희- 좋아. 나도 그게 궁금해. 나는 일일이 계산해서 찾았는데 처음 몇 개를 빼 놓고는 찾기 힘들었거든.
은주- 나도 하나씩 다 계산해서 찾았는데....
기주- 나도 처음에는 그랬는데, 하다보니까 규칙이 있는 것 같더라고... 예를 들면 1과 3분의 1에 곱해지거나 나누어지는 자연수의 계산 결과가 2분의 1이 되면 답이 3분의 2가 될 수 있거든. 그러니까.......(중략)
선우- 아~대단하다.
지희- 그렇구나 !
은주- 무슨 말인지 약간 어렵지만, 대충은 알겠다. 정말 대단할 걸!
지희- 갑자기 생각난 것인데, 아까 내가 발표한 식의 마지막에 곱하기 1을 하거나 나누기 1을 해도 답은 3분의 2가 나오는데 이것도 새로운 식이라고 할 수 있을까?
선우- 글쎄...문제의 조건을 다시 한번 읽어보자.
지희- 문제의 조건에 특별히 이런 식이 안 된다는 말이 없는 것으로 봐서는 될 것 같은데...
은주- 기주야 ! 너 생각은 어때?
기주- 나도 될 것 같아. 우선 그렇게 해도 문제에서 제시한 규칙에 어긋나지 않고, 보기에 서 주어진 숫자에도 1이 들어 있잖아. 좀 손쉬운 방법이긴 하지만 그렇다고 틀린 것은 아니지.
지희- 그렇지? 그럼 이것도 식을 쉽게 찾는 방법 중 하나라고 할 수 있겠네?
기주- 응.
선우- 나도 그렇게 생각해. (1모둠)

2모둠에서는 전원참여에 의한 수용적 합의 과정이 나타났다. 상호작용 성격을 기준으로 살펴보면, 2모둠 학생들은 제안된 생각과 해결방법에 나름의 근거를 가지고 동의를 표현함으로써 수용적인 수학적 합의를 이끌어가고 있다. 2모둠에서 볼 수 있는 전원참여에 의한 수용적 합의 과정은 다음과 같다.

준혁- 지금까지 발표한 것을 보면 뭔가 식을 쉽게 많이 만들 수 있는 규칙이 있을 것 같은데... 그 규칙이 무엇일까?
민경- 나도 뭔가 규칙이 있을 것 같다고 생각했어. 모둠토의에 참여하면서 수연이나 내가 식을 더 찾을 수 있었던 것도 나누기 1이나 곱하기 1은 위치가 바뀌어도 결과

값이 같다는 규칙을 이용했기 때문에 가능했던 것 같아.

수연- 맞아. 나누기 1을 한 식과 곱하기 1을 한 식은 결과는 같지만 분명 수학적으로 다른 식이니까 민경이 말대로 그것도 규칙이라면 규칙이 될 수 있을 것 같아.(중략)

연호- 그래.

민경- 좋은 생각이야. (2모둠)

4모둠에서는 전원참여에 의한 논쟁적 합의 과정이 나타났다. 모둠토의 뒷부분에서 이루어진 4모둠의 수학적 합의는 해결방법의 타당성과 답의 기록방법을 결정하기 위한 것이었다. 4모둠 학생들은 해결방법의 타당성을 합의하기 위해 다수결 방법을 사용함으로써, 모든 학생들이 참여하는 전원참여에 의한 수학적 합의를 시도하고 있다. 또한 상호작용 성격 측면에서 살펴보면, 동규가 석주의 문제해결방법이 비논리적이고 답이 옳지 않다고 지적하자, 상은이가 석주의 답 중 한 가지는 옳다는 의견을 제시하면서 논쟁적인 합의가 이루어지고 있다. 4모둠에서 나타난 논쟁적 합의 과정은 아래와 같다.

진경- 그럼 지금부터 상은이 의견이 타당하다고 생각하는 사람은 손을 들어주기 바랍니다.

동규, 석주- 나 (손을 든다.)

진경- 나까지 세 명. 상은아. 너도 너 방법이 타당하다고 생각하지?

상은- 당근이지

진경- 그럼 동규 의견이 타당하다고 생각하는 사람은 손을 들어 주기 바랍니다.

석주, 진경, 상은, 동규- 나 (손을 든다.)

진경- 그럼 내 의견이 타당하다고 생각하는 사람은 손을 들어 주기 바랍니다.

동규, 석주, 상은- 나 (손을 든다.)

상은- 석주 의견은 어떻게 생각합니까?

동규- 석주는 문제에서 제시한 규칙을 모두 고려하지 않고 답을 구한 것 같습니다. 자연수 나누기 자연수의 규칙만 생각해서 그 결과값이 3분의 2가 되어야 한다는 것과 사용할 수 있는 자연수가 1에서 8까지라는 사실을 깜박한 것 같습니다.

상은- 나도 동규 말이 옳다고 생각해. 그러나 석주가 발표한 것 중에 2 나누기 3은 문제의 조건에 맞는 답이 될 것 같은데.... 그건 그렇고 잠깐!! 기록이로서 질문 있는데, 그럼 각자 발표한 것을 모둠학습지에 다 써야 하는 거야?

석주- 식이 다른 것이 많이 있으니까 같은 식은 1번만 써도 될 것 같은데....

동규- 맞아. 어차피 친구들이 발표한 식이 모두 문제의 조건에 맞잖아. 그리고 앞에서 풀이 과정도 모두 타당하다고 결정했고......

진경- 또 다른 의견 있습니까?

상은, 동규- 없습니다.

진경- 그러면 모둠에서 결정된 대로 겹치는 식은 1번만 쓰고, 나머지는 다양한 풀이방법 모두를 모둠 학습지에 기록하기로 하겠습니다. (4모둠)

### 마. 논의

암기형 과제나 절차형 과제에서는 수학적 합의 과정이 생략된 경우가 많았다. 개념원리형 과제에서는 부분참여나 전원참여에 의한 수학적 합의가 진행되었으며, 수용적·논쟁적·정교화된 합의 과정이 나타났다. 탐구형 과제에서는 전원참여에 의한 수학적 합의가 이루어졌으며, 개념원리형 과제처럼 다양한 합의 과정을 보였다.

이와 같이 인지적 요구 수준에 따른 수학적 과제는 개인의 해결방법을 바탕으로 모둠의 최종적인 해결방법을 결정하는 수학적 합의 과정에 영향을 주며, 인지적 요구 수준이 높은 과제일수록 학생들의 수학적 합의 과정이 활발하게 나타난다. 즉, 다양한 풀이방법과 답이 나오는 과제들은 구성원들이 자연스럽게 토론할 수 있도록 분위기를 조성하고 수학적 상호작용 방식에 영향을 줌으로써, 수준 높은 수학적 합의

를 촉진하는 것이다(Nohda, 1995). 따라서 학생들에게 수학적 과제를 제공할 때, 수학적으로 합의할 필요성을 부과하지 못하는 암기형·절차형 과제보다는 개념원리형·탐구형 과제를 제공하는 것이 학생들의 유의미한 수학적 합의를 촉진시키는데 더 효과적이다.

## V. 결론 및 시사점

본 연구는 수학적 과제가 수학적 의사소통에 미치는 영향을 알아보는데 그 연구 목적이 있다. 이를 위해서 Stein et al.(2000)이 분류한 기준에 따라 수학적 과제를 암기형, 절차형, 개념원리형, 탐구형으로 구분하고, 수학적 의사소통을 수학적 참여, 수학적 정당화 유형, 수학적 합의 과정 측면으로 세분화하여 연구를 실시하였다.

본 연구 결과, 수학적 과제에 따른 학생들의 수학적 참여는 과제 해결에 요구되는 인지적 사고 수준이 높은 과제일수록 높은 참여를 나타냈다. 구체적으로 발화 유형에 따른 참여를 살펴보면, 암기형이나 절차형 과제에서는 의견·제안과 같은 형태의 참여가 거의 나타나지 않았으며, 질문도 양자택일형이나 단답형 질문이 많이 나타났다. 이에 비해 개념원리형이나 탐구형 과제에서는 의견·제안·긍정반응의 참여가 높게 나타났고, 사고촉진형 질문이 자주 나타났다.

수학적 과제에 따른 수학적 정당화 유형은 과제의 성격에 따라 다른 모습을 보였다. 암기형 과제에서는 권위에 의한 수학적 정당화가 나타났으며, 절차형 과제에서는 수학적 정당화 과정이 생략되었다. 개념원리형 과제에서는 직관과 수학적 논리에 의한 정당화가 등장했으며, 탐구형 과제에서는 수학적 논리에 의한 정당화가 나타났다.

수학적 과제에 따른 수학적 합의 과정을 살펴보면, 암기형 과제나 절차형 과제에서는 수학적 합의 과정이 생략되었다. 개념원리형 과제에서는 부분참여나 전원참여에 의해 수학적 합의가 진행되었으며, 수용적·논쟁적·정교화된 합의 과정이 나타났다. 탐구형 과제에서는 전원참여에 의한 수학적 합의가 이루어졌으며, 개념원리형 과제처럼 다양한 합의 과정을 보였다.

이와 같이 수학적 과제는 학생들의 수학적 의사소통과 밀접한 연관성을 갖고 있으며, 어떤 과제를 가지고 학습하느냐에 따라 학습 효과는 달라진다. 단순 암기만으로 문제를 해결하는 암기형 과제나 알고리즘 적용에 초점을 둔 절차형 과제는 답이 제한적이고 접근 방법이 다양하지 못하기 때문에, 학생들의 의사소통 참여의욕이 저하되고, 수학적 의사소통 자체가 형식적으로 이루어져 활발한 의사소통이 일어나기 어렵다.

이에 비해, 다양한 접근 방법으로 문제를 해결할 수 있는 개념원리형 과제와 탐구형 과제는 해결방법의 개방성으로 인해 활발하고 유의미한 수학적 의사소통 참여를 촉진한다. 즉, 다양한 풀이방법이 나오는 과제들은 모둠 구성원들의 자연스러운 토론을 유도하고 수학적 상호작용 방식에 영향을 줌으로써, 수준 높은 수학적 의사소통을 가능하게 하는 것이다.

이러한 연구 결과를 바탕으로 본 연구에서는 현재 수학교육에서 강조되고 있는 수학적 의사소통의 학습 효과를 높이기 위해 몇 가지 시사점을 제안하고자 한다.

우선 수학시간에 수학적 개념과 절차 등을 연결시켜 종합적으로 사고할 수 있는 수학적 과제가 학생들에게 제공되어야 한다. 수학적 과제는 학생들의 의사소통 활성화에 영향을 주

기 때문에, 학생들의 수학적 의사소통 양과 질을 신장시키기 위해서는 과제해결방법이 다양하고 복합적인 사고를 요구하는 과제를 제공해야 하는 것이다.

또한 수학적 의사소통을 활성화시킬 수 있는 다양한 수학적 과제가 개발되어야 한다. 수학적 과제 개발에 있어서 가장 이상적인 것은 교사가 자신의 수업에 필요한 과제를 직접 개발하여 사용하는 것이다. 그러나 학교현장에서 그것을 실천하기에는 시간적으로 많은 제약이 따르므로, 수학교육 전문가와 연구기관에서 인지적 요구 수준이 높은 수학적 과제를 많이 개발하여 학교 현장에 보급하려는 노력이 요구된다.

뿐만 아니라, 교사가 수학적 과제를 선택하여 효과적으로 의사소통 활동에 연결시킬 수 있도록 다양한 수업모형이 개발되어야 한다. 수학적 과제는 학생들에게 직접적으로 영향을 미치기도 하지만, 대부분은 모둠토의라는 의사소통 과정을 통해 학생들에게 영향을 미치는 경우가 많다. 따라서 수학적 과제를 탐구하고 의사소통하여 반성하기로 나아가는 탐구 지향적 수업모형과 같은 다양한 수업모형의 개발이 필요하다.

끝으로 수학적 과제를 선택하는 교사의 안목을 높이기 위해 수학적 과제 분석과 교수법에 대한 교사 연수가 확산되어야 한다. 교사는 수학 학습에 필요한 자료를 학생들에게 제공하는 중요한 역할을 수행하므로, 수학 과제를 분석하고 선택하는 능력이 부족한 교사는 자신이 예상한 과제 수준과 학습자가 느끼는 과제 수준이 다름으로 인해 학생들의 학습 효과를 반감시킬 수 있다. 따라서 바람직한 기준에 따라 수학적 과제를 올바르게 분석하고 수업에 적용할 수 있는 교사의 능력이 교사 연수를 통해 함양될 필요가 있다.

마지막으로 본 연구의 제한점에 대해 살펴보면, 이 연구는 5학년 학생들을 대상으로 수학적 과제가 수학적 의사소통에 미치는 영향을 살펴보기 위해 연구대상의 모둠편성에 무선할당 방법을 사용함으로써 각 모둠의 동일성을 보장하였다. 그러나 한 모둠이 시간 간격을 두고 4가지 유형의 과제를 해결하는 것이 아니라 여섯 개의 모둠이 2가지 과제를 한 수업시간 안에 해결했기 때문에, 과제 간의 간섭 작용이 일어났을 가능성을 배제할 수 없다. 또한 연구대상이 서울시에 소재하는 한 지역의 학생들로 국한되어 있어 연구결과의 일반화에 한계가 있을 수 있다. 따라서 본 연구를 기본 연구로 적용한 후속 연구에서는 연구 대상을 확대하거나 모둠 구성요인을 변화시켜, 수학적 과제와 수학적 의사소통을 다양한 관점에서 분석해 보는 것도 의미 있을 것이다.

## 참고문헌


권성룡(2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. **한국수학교육학회시리즈C 초등수학교육, 7**(2), 85-99.

김보영 · 김민경(2003). 초등 수학에서 쓰기 활동이 수학적 개념 이해 및 의사소통 능력에 미치는 영향. **교육과학연구, 34**(1), 55-72.

나소연(2002). **수학적 사고력 신장을 위한 의사소통지도.** 경희대학교 석사학위논문.

박성선(2002). 수학적 창의성 신장을 위한 탐구학습에 관한 소고. **한국수학교육학회시리즈C 초등수학교육, 6**(2), 65-74.

박우자 · 전평국(2003). 개방형 문제 해결 과정에서 나타난 소집단 구성원의 합의 패턴 분석. **한국수학교육학회시리즈C 초등수학교육, 7**(2), 117-129.

방정숙(2001). 사회수학적 규범과 수학교실문화.

**수학교육학연구, 11**(2), 273-289.

이미애(2001). 초등학교 2학년의 수학적 활동과 의사소통 활성화를 위한 교수-학습 자료 개발 연구. **청주대학교초등교육연구, 11**(1), 151-221.

이종희 · 김선희(2002). **수학적 의사소통**. 서울: 교우사.

유현주(2000). 수학적 의사소통과 수학적 교수-학습. **대한수학교육학회 논문집, 2**(1), 53-72.

장영일(2003). **수학적 의사소통 활성화를 위한 활동자료 및 지도안 개발 연구**. 한국 교원대학교 석사학위논문.

정동권, 송상헌, 김홍구, 이용길, 김성만, 정주자, 안승학, 박정수(2002). **수학과 수행중심 평가**. 서울: 학문출판(주).

채미애(2002). 수학적 의사소통 능력을 강조한 수업의 효과. **이화교육논총, 10**, 213-235.

최혜령 · 백석윤(2005). 프로젝트형 문제 해결 과정에서 보이는 수학적 의사소통 활동과 수학적 태도 분석. **한국초등수학교육학회지, 10**(1), 77-89.

Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (2002). *Becoming a reflective mathematics teacher*. Mahwah, NJ: Lawence Erlbaum Associates.

Griffiths, R., & Clyne, M. (1994). *Language in the mathematics classroom*. Heinemann.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (2004). 어떻게 이해하지. (김수환, 박영희, 이경화, 한대희 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1997년 출판).

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. CT: Yale University.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standard for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nohda, N. (1995). Teaching and evaluating using "open-ended problem" in classroom. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematik, 27*(2), 55-57.

Rowan, T. E., Mumme, J., & Shepherd, N. (1990). *Communicating in mathematics. Arithmetic Teacher, 38*(1), 18-22.

Stein, M. K., Henningsen, M. A., Silver, E. A., & Smith, M. S. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction*. Reston, VA: NCTM.

Stephen, M., & Whitenack, J. (2003). Establishing classroom social mathematical norms for problem solving. In F. K. Lester & I. charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 149-168). Reston, VA: NCTM.

Van de Walle, J. A. (2003). Designing and selecting problem-based tasks. In F. K. Lester & I. charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 67-84). Reston, VA: NCTM.

# The Influence of Mathematical Tasks on Mathematical Communication

Lee, Mi Yeon (Seoul Changdong Elementary School)
Oh, Young Youl (Seoul National University of Education)

The purpose of this study was to analyze the influence of mathematical tasks on mathematical communication. Mathematical tasks were classified into four different levels according to cognitive demands, such as memorization, procedure, concept, and exploration.

For this study, 24 students were selected from the 5th grade of an elementary school located in Seoul. They were randomly assigned into six groups to control the effects of extraneous variables on the main study. Mathematical tasks for this study were developed on the basis of cognitive demands and then two different tasks were randomly assigned to each group. Before the experiment began, students were trained for effective communication for two months. All the procedures of students' learning were videotaped and transcripted. Both quantitative and qualitative methods were applied to analyze the data.

The findings of this study point out that the levels of mathematical tasks were positively correlated to students' participation in mathematical communication, meaning that tasks with higher cognitive demands tend to promote students' active participation in communication with inquiry-based questions. Secondly, the result of this study indicated that the level of students' mathematical justification was influenced by mathematical tasks. That is, the forms of justification changed toward mathematical logic from authorities such as textbooks or teachers according to the levels of tasks. Thirdly, it found out that tasks with higher cognitive demands promoted various negotiation processes.

The results of this study implies that cognitively complex tasks should be offered in the classroom to promote students' active mathematical communication, various mathematical tasks and the diverse teaching models should be developed, and teacher education should be enhanced to improve teachers' awareness of mathematical tasks.

* **Key words** : mathematical task(수학적 과제), mathematical communication(수학적 의사소통), mathematical participation(수학적 참여), mathematical justification(수학적 정당화), mathematical negotiation process(수학적 합의 과정)

논문접수: 2007. 7. 15
심사완료: 2007. 10. 14