한국학교수학회논문집 제 10 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 10, Number 4, 519-533, December 2007

등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$의 다양한 증명방법에 대한 연구

이재갑[1)] · 한인기[2)]

본 연구에서는 삼각형의 높이 및 내접원의 반지름에 대한 한 등식을 증명하기 위한 다양한 탐색수행의 방향을 기술하였고, 이를 바탕으로 등식에 대한 다양한 증명방법을 제시하였다. 이를 통해, 체계적인 탐색수행을 통한 다양한 풀이방법 발명의 한 예를 제시하였으며, 다양한 풀이방법에 대한 수학교수학적 논의의 방향과 폭을 확장시킬 수 있는 기초 자료가 될 것으로 기대된다.

주요용어: 삼각형의 높이, 내접원의 반지름, 문제해결, 탐색수행, 다양한 증명방법

I. 서론

제 7차 수학과 교육과정 수정고시(교육인적자원부, 2006, p.1)에서는 '수학적 개념의 깊이 있는 이해와 활용, 합리적인 문제해결 능력과 태도는 모든 교과를 성공적으로 학습하는 데 필수적일 뿐만 아니라 개인의 전문적인 능력을 향상시키고 민주 시민으로서 합리적 의사결정 방법을 습득하는 데에도 필요하다'고 규정하면서, 수학교육에서 문제해결 능력, 태도의 계발 및 신장을 강조하고 있다.

수학교육학에서는 문제해결 능력, 태도의 계발 및 신장을 위한 많은 방안들이 연구되고 있는데, 이들 중의 하나가 다양한 방법으로 문제를 푸는 것이다. 다양한 방법에 의한 문제해결은 계획수립 및 실행, 반성 단계에서 중요한 역할을 수행한다.

Krutetskii(1968)는 문제해결 과정을 문제에 대한 정보의 수집, 문제해결을 위한 정보의 변환, 정보의 저장으로 나누어, 성공적인 문제해결에 관련된 학생들의 개인차에 대해 연구하였다. 이때 문제해결을 위한 정보의 변환은 계획수립 및 실행 단계에 해당하는데, Krutetskii는 이 단계에서 사고과정의 유연성에 관련된 개인차를 지적했다. Krutetskii(1968, p.312)는 '사고과정의 유연성은 하나의 지적 조작에서 질적으로 다른 지적 조작으로의 용이하고 자유로운 전환, 문제해결 접근의 다양성, 틀에 박힌 방법의 구속으로 벗어남, 사고 및 행동 체계의 재조직 등을 통해 드러난다'고 주장하면서, 성공적인(재능있는) 문제해결자들은 주어진 문제에 대한 다양한 풀이 방법을 제시했지만, 그렇지 않은 문제해결자들은 다른 풀이로 방향을 전환하는데 어려움을 겪는다고 하였다. 즉 다양한 문제해결 방법의 발명은 재

1) 경상대학교 대학원 (kabi22@teachiworld.com)
2) 경상대학교 (inkiski@gsnu.ac.kr)

능있는 문제해결자의 지적 특징들 중의 하나라고 할 수 있다.

한편, 문제해결의 반성 단계에서 다양한 방법에 의한 문제해결의 중요성은 꾸준히 강조되어 왔다. Polya(1973)는 반성단계를 통해 획득된 지식이 견고하게 되며 문제해결 능력이 발달된다고 주장하면서, '결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가'를 비롯한 몇몇 물음들을 반성활동에서 탐구하도록 권고하였다. 한편 한인기 · 꼴랴긴(2006)은 주어진 문제에 대한 다양한 풀이 방법 탐구는 얻어진 해답의 타당성을 확인하는 방법일 뿐만 아니라 수학에 대한 흥미, 유연한 수학적 사고를 계발, 육성하는 방법이라는 것을 강조하였다.

그밖에도 Gotman & Skopets(2000)는 다양한 방법에 의한 문제해결은 도형의 성질들을 충분하게 탐구할 수 있는 가능성을 제공하며 문제의 일반화를 도와준다고 주장하였고, 한인기 · Kombarov(2004, p.270)는 수학 영재교육에서 학생들에게 다양한 풀이를 찾도록 하는 것은 사고의 유창성과 유연성의 계발 및 육성, 수학에 대한 심미적 가치의 함양에 유익할 것이라고 주장하였다.

기술한 것과 같이, 주어진 문제를 다양한 방법으로 푸는 것은 문제해결 능력, 태도의 계발 및 육성을 위한 의미로운 방향이 될 것이며, 국내의 몇몇 연구들(이만근 · 전병기, 2007; 한인기 · 김태호 · 유익승 · 김대의 · 서보억, 2005; 권영인 · 서보억, 2004)에서도 다양한 문제해결 방법에 대한 흥미로운 결과들을 볼 수 있다. 그러나 이들 연구에서는 다양한 해결방법의 제시가 중심을 이루며, 다양한 풀이에 이르는 과정에 대한 논의는 빈약하였다.

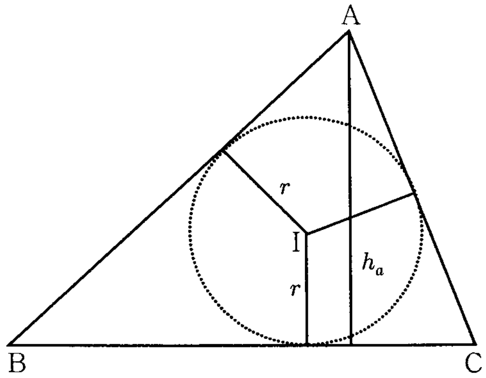
본 연구에서는 삼각형의 높이 및 내접원의 반지름에 대한 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 증명하기 위한 다양한 탐색수행의 방향을 기술하고, 이를 바탕으로 등식에 대한 다양한 증명방법을 제시할 것이다. 이를 통해, 체계적인 탐색수행을 통한 다양한 풀이방법 발명의 한 예를 제시할 것이며, 다양한 풀이방법에 대한 수학교수학적 논의의 방향과 폭을 확장시킬 수 있는 기초 자료를 제공할 것으로 기대된다.

II. 문제해결을 위한 탐색수행

삼각형 ABC의 꼭지점 A, B, C에서 그은 높이 h_a, h_b, h_c, 내접원의 반지름 r에 대해(그림 1) 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 증명하기 위한 탐색을 수행하기 위해, 탐색수행의 방향을 설정해야 한다. 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$은 삼각형의 높이들과 내접원의 반지름으로 구성된 등식이므로, '문제해결에서 높이 또는 내접원의 반지름은 어떤 개념과 관련되는가' 또는 '$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 증명하기 위해 무엇을 알아야하는가' 등과 같은 물음은 탐색수행의 방향을 결정하기 위해 문제해결자가 고려해야 하는 것들이다. 이들 물음에 대한 가능한 대답을 생각하여, 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$의 증명을 위한 탐색수행의 방향을 결정하도록 하자.

우선, '문제해결에서 높이 또는 내접원의 반지름은 어떤 개념과 관련되는가'라는 물음을 생각하자. 삼각형의 높이는 한 꼭지점에서 마주보는 변에 그은 수선이므로, 삼각형의 넓이, 점과 직선사이의 거리와 관련될 수 있으며, 내접원의 반지름도 내접원의 중심에서 삼각형의 변에 그은 수선이므로 넓이, 점과 직선사이의 거리에 관련될 수 있다. 한편,

'$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 증명하기 위해 무엇을 알아야하는가'와 관련하여서는, h_a, h_b, h_c, r를 직접 구하여 증명하려는 등식을 유도하거나, h_a, h_b, h_c와 r의 비를 각각 구하여 증명하려는 등식을 유도하는 방법을 생각할 수 있다. 즉, 문제해결을 위해서는 삼각형의 넓이 또는 점과 직선사이의 거리를 이용하여, h_a, h_b, h_c, r를 구하는 것이 탐색수행의 기본 방향이 됨을 알 수 있다.



<그림 1>

한편, 중등학교 수학교육에서 삼각형은 논증기하, 해석기하, 벡터기하에 관련하여 다루어지므로, 본 연구에서는 논증기하, 해석기하, 벡터기하의 개념들을 이용하여 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$의 증명을 위한 탐색을 수행할 것이다. 탐색수행의 방향 결정을 위한 물음들을 바탕으로, 탐색수행의 몇 가지 방향을 얻을 수 있다.

첫째, 논증기하의 개념들과 관련된 탐색수행의 방향을 살펴보자. 삼각형의 넓이는 높이와 밑변의 곱의 절반과 같으므로, h_a, h_b, h_c를 $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_c=\frac{2S}{c}$와 같이 구할 수 있다. 한편 얻어진 식들에 $S=\frac{abc}{4R}$을 대입하면(단, R은 외접원의 반지름), 높이들의 또 다른 표현인 $h_a=\frac{bc}{2R}$, $h_b=\frac{ac}{2R}$, $h_c=\frac{ab}{2R}$도 얻을 수 있다. 다시금 얻어진 식 $h_a=\frac{bc}{2R}$, $h_b=\frac{ac}{2R}$, $h_c=\frac{ab}{2R}$에 사인법칙을 사용하면, $h_a=2R\sin B\cdot\sin C$, $h_b=2R\sin A\cdot\sin C$, $h_c=2R\sin A\cdot\sin B$ 또는 $h_a=b\sin C$, $h_b=c\sin A$, $h_c=a\sin B$을 얻을 수 있다. 한편, <그림 1>에서 삼각형 ABC의 넓이를 삼각형 ABI, BCI, ACI의 합으로 생각할 수 있으므로, $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$, $h_a=\frac{2S}{a}$이므로 $h_a=\frac{(a+b+c)r}{a}$, $h_b=\frac{(a+b+c)r}{b}$, $h_c=\frac{(a+b+c)r}{c}$가 얻어진다. 이와 같은 방법으로 h_a, h_b, h_c를 구하여, 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 유도할 수 있을 것이다.

둘째, 해석기하의 개념들과 관련된 탐색수행의 방향을 살펴보자. <그림 1>에 적당히 좌표

계를 도입하여, 점 I를 원점, 꼭지점 A, B, C의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)라 하자. 이제 직선 AB, BC, AC의 방정식을 구하여, 점 A, B, C로부터 직선 BC, AC, AB까지의 거리 h_a, h_b, h_c를 각각 구할 수 있다. 이와 같은 방법으로 h_a, h_b, h_c를 구하여, 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 유도할 수 있을 것이다.

셋째, 벡터기하의 개념들과 관련된 탐색수행을 살펴보자. <그림 1>에 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 도입하면, 이들 벡터를 이용하여 h_a, h_b, h_c와 r의 비 또는 $\overrightarrow{h_a}$, $\overrightarrow{h_b}$, $\overrightarrow{h_c}$를 각각 구할 수 있다. 이와 같은 방법으로 h_a, h_b, h_c를 구하여, 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 유도할 수 있을 것이다.

III. 논증기하와 관련된 등식의 증명

탐색수행의 방향을 결정하는 과정에서 h_a, h_b, h_c를 다음과 같이 5가지 방법으로 표현하였다. 이들 각각에 대해 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$의 증명을 위한 탐색을 수행하자.

- $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_c=\frac{2S}{c}$;
- $h_a=\frac{bc}{2R}$, $h_b=\frac{ac}{2R}$, $h_c=\frac{ab}{2R}$;
- $h_a=2R\sin B\cdot\sin C$, $h_b=2R\sin A\cdot\sin C$, $h_c=2R\sin A\cdot\sin B$;
- $h_a=b\sin C$, $h_b=c\sin A$, $h_c=a\sin B$;
- $h_a=\frac{(a+b+c)r}{a}$, $h_b=\frac{(a+b+c)r}{b}$, $h_c=\frac{(a+b+c)r}{c}$

1. $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_c=\frac{2S}{c}$를 이용한 탐색수행

등식을 증명하기 위해, 식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$을 변형시키자. $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_c=\frac{2S}{c}$이므로, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{(a+b+c)}{2S}$가 된다. 한편, $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$이므로, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$이 증명된다. □

기술한 증명에서 내접원의 반지름 r은 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$로부터 얻어졌으며, 유사한 증명방법을 한인기 · 에르든예프(2005)에서도 볼 수 있다. 이 증명방법에서는 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}ah$, $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$가 사용되었으며, 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 증명하는 가장 단순한 방법들 중의 하나이다.

2. $h_a=\frac{bc}{2R}$, $h_b=\frac{ac}{2R}$, $h_c=\frac{ab}{2R}$를 이용한 탐색수행

$h_a=\frac{bc}{2R}$, $h_b=\frac{ac}{2R}$, $h_c=\frac{ab}{2R}$이므로, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$를 구하면 $\frac{2R}{bc}+\frac{2R}{ac}+\frac{2R}{ab}$이 된다. 이제 분모를 통분하면, $\frac{2Ra+2Rb+2Rc}{abc}$이 되며, 이로부터 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{2R(a+b+c)}{abc}$이 유도된다. 결국 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$를 증명하기 위해, $\frac{2R(a+b+c)}{abc}=\frac{1}{r}$을 보이면 된다. 이를 위해, R, a, b, c, r이 포함된 식을 생각해야 한다. $S=\frac{abc}{4R}$, $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$이므로, 이들을 연립하면, $\frac{abc}{4R}=\frac{(a+b+c)r}{2}$, $r=\frac{abc}{2R(a+b+c)}$이 얻어진다. 이로부터 $\frac{2R(a+b+c)}{abc}=\frac{1}{r}$이 성립하고 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$이 증명된다. □

이 증명방법에서는 $\frac{1}{r}$을 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{abc}{4R}$, $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$을 이용하여, $\frac{1}{r}=\frac{2R(a+b+c)}{abc}$로 나타냈다. 이때 등식 $\frac{1}{r}=\frac{2R(a+b+c)}{abc}$, 즉 $r=\frac{abc}{2R(a+b+c)}$는 내접원의 반지름을 외접원의 반지름, 변들을 이용하여 나타내는 흥미로운 관계식으로 다른 증명방법의 발명에서도 중요한 역할을 수행한다. 기술한 증명방법에서 한 가지 흥미로운 것은 넓이 공식 $S=\frac{abc}{4R}$이 높이 $h_a=\frac{bc}{2R}$, $h_b=\frac{ac}{2R}$, $h_c=\frac{ab}{2R}$, 내접원의 반지름 $r=\frac{abc}{2R(a+b+c)}$을 구하는 과정에 공통적으로 사용되었다는 것이다.

3. $h_a=2R\sin B\cdot\sin C$, $h_b=2R\sin A\cdot\sin C$, $h_c=2R\sin A\cdot\sin B$을 이용한 탐색수행

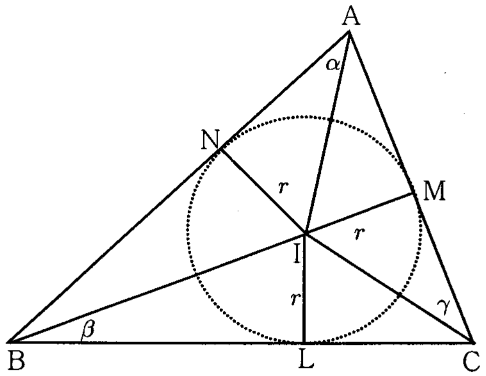
$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$는 분수식 $\frac{1}{2R\sin B\sin C}+\frac{1}{2R\sin A\sin C}+\frac{1}{2R\sin A\sin B}$이 되므로, 통분하여 정리하면, $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2R\sin A\sin B\sin C}$이 얻어진다. 이제, 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 증명하기 위해 $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2R\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{r}$을 보이면 된다. 그런데 증명방법 (2)에서 얻어진 등식 $\frac{1}{r}=\frac{2R(a+b+c)}{abc}$에서 a, b, c를 사인법칙을 이용하여 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$로 나타내면, $\frac{1}{r}=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2R\sin A\sin B\sin C}$가 얻어지며, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$이 증명된다. □

증명방법 (2)와 이 증명방법의 가장 큰 차이는 증명방법(2)는 삼각형의 변들을 이용한 증명이고, 기술한 증명방법은 삼각형의 각들을 이용한 증명방법이라는 점이다. 한편 기술한 증명에서 $\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$, $\angle C=2\gamma$라 놓고, 삼각함수의 등식을 반각들 α, β, γ를 이용하여 나타내면, 새로운 등식을 얻을 수 있다.

$\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$, $\angle C=2\gamma$라 놓았으므로, $h_a=2R\sin2\beta\cdot\sin2\gamma$, $h_b=2R\sin2\alpha\cdot\sin2\gamma$, $h_c=2R\sin2\alpha\cdot\sin2\beta$가 된다. 이때 $2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi$이므로, 분수식 $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2R\sin A\sin B\sin C}$의 분자 $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma$는 $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin(\pi-(2\alpha+2\beta))$이 되고, $\sin(\pi-(2\alpha+2\beta))=\sin(2\alpha+2\beta)$이므로, $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin(\pi-(2\alpha+2\beta))=\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin(2\alpha+2\beta)$이 된다. 이제 얻어진 식을 사인의 합 공식을 이용하여 정리하면, $\sin2\alpha(1+\cos2\beta)+\sin2\beta(1+\cos2\alpha)$이 된다. 이때 $\sin2\alpha$, $1+\cos2\beta$, $\sin2\beta$, $1+\cos2\alpha$에 대해 2배각 공식을 사용하여 얻어진 식을 정리하자. 그러면 등식 $4\cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)$이 얻어지며, 사인합의 공식, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$을 이용하면, 코사인으로 표현된 식 $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$가 얻어진다.

한편, 분수식 $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2R\sin A\sin B\sin C}$의 분모에도 $\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$, $\angle C=2\gamma$을 대입하여, 2배각 공식을 사용하면 분모는 $2R\times2\sin\alpha\cos\alpha\times2\sin\beta\cos\beta\times2\sin\gamma\cos\gamma$가 된다. 이로부터, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$가 얻어진다.

한편 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$임을 감안하면, $\frac{1}{r}=\frac{1}{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$, $r=4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$가 얻어진다. 결국 $\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$, $\angle C=2\gamma$라 놓으면, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$의 증명과정에서 내접원의 반지름, 외접원의 반지름, 삼각형의 각들의 반각에 대한 등식 $r=4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$을 얻는다.



<그림 2>

4. $h_a=b\sin C$, $h_b=c\sin A$, $h_c=a\sin B$을 이용한 탐색수행

$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$에 $h_a=b\sin C$, $h_b=c\sin A$, $h_c=a\sin B$를 대입하면 $\frac{1}{b\sin C}+\frac{1}{c\sin A}+\frac{1}{a\sin B}$이 되고, 이를 통분하면 $\frac{ac\sin A\sin B+ab\sin B\sin C+bc\sin A\sin C}{abc\sin A\sin B\sin C}$가 얻어진다. 마지막 식은 변 a, b, c와 각들의 사인 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$로 구성되어 있다. 이때 분수식을 정리하기 위해 변들을 각들의 사인값으로 나타내면 증명방법 (3)이 얻어지며, 각들의 사인값을 변들로 나타내면 증명방법 (2)가 얻어진다.

이제, 새로운 등식을 얻기 위해, <그림 2>에서 변 AB, BC, AC를 반각인 α, β, γ의 코탄젠트로 나타내자. $AN=r\cot\alpha$, $NB=r\cot\beta$이므로, $AB=r\cot\alpha+r\cot\beta$가 된다. 같은 방법으로, $BC=r\cot\beta+r\cot\gamma$, $CA=r\cot\gamma+r\cot\alpha$임을 알 수 있다.

이제, 얻어진 식들을 $h_a=b\sin C$, $h_b=c\sin A$, $h_c=a\sin B$에서 a, b, c에 대입하면, $h_a=r(\cot\alpha+\cot\beta)\sin 2\beta$이 된다. 이때 코탄젠트를 사인과 코사인으로 바꾸고 2배각 공식을 사용하면, $r\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)2\sin\beta\cos\beta$이 된다. 통분하면 $r\left(\frac{\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right)2\sin\beta\cos\beta$이 되고, 사인합 공식을 이용하면 $r\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}2\sin\beta\cos\beta$이 되며, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$이라는 것을 감안하면 $h_a=\frac{2r\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}$가 된다. 같은 방법으로, $h_b=\frac{2r\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\beta}$, $h_c=\frac{2r\cos\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}$임을 알 수 있다. 이로부터, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{\sin\alpha}{2r\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\sin\beta}{2r\cos\alpha\cos\gamma}+\frac{\sin\gamma}{2r\cos\alpha\cos\beta}$이고, 등식의 우변을 통분하여 2배각 공식을 이용하여 정리하면, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)}{2r\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$이 된다. 그리고 증명방법 (3)에서의 항등변환에 의해 $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$이므로, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{2r\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\frac{1}{r}$이 증명된다. □

이 증명에서는 삼각형의 높이 h_a, h_b, h_c를 표현하는 식에 내접원의 반지름 r이 포함되어 있다. 즉 $h_a=\frac{2r\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}$, $h_b=\frac{2r\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\beta}$, $h_c=\frac{2r\cos\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}$이므로, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$를 정리하면 $\frac{1}{r}$이 유도될 수 있다. 그러나 증명방법 (3)에서는 $h_a=2R\sin B\cdot\sin C$, $h_b=2R\sin A\cdot\sin C$, $h_c=2R\sin A\cdot\sin B$와 같이 h_a, h_b, h_c를 표현하는 식에 r이 포함되지 않으므로, 문제해결을 위해 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2R\sin A\sin B\sin C}$, $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2R\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{r}$을 각각 보인 후에, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$이라는 결론을 유도하였다.

5. $h_a=\frac{(a+b+c)r}{a}$, $h_b=\frac{(a+b+c)r}{b}$, $h_c=\frac{(a+b+c)r}{c}$을 이용한 탐색수행

등식 $h_a=\frac{(a+b+c)r}{a}$이 성립하므로, $\frac{1}{h_a}=\frac{a}{(a+b+c)r}$이 된다. 같은 방법으로 $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$을 구하여, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$을 계산하면, $\frac{a+b+c}{(a+b+c)r}=\frac{1}{r}$이 된다. 이러한 접근은 앞에서 기술한 증명방법 (1)과 유사하다.

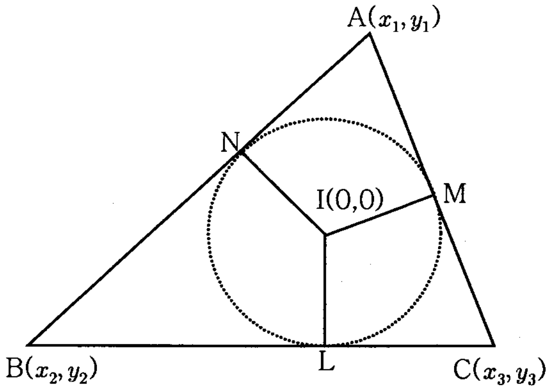
증명방법 (1)과는 다른 접근을 취하기 위해, 증명방법 (4)에서 얻어진 등식 $c=r\cot\alpha+r\cot\beta$, $a=r\cot\beta+r\cot\gamma$, $b=r\cot\gamma+r\cot\alpha$을 이용하자. 그러면 $\frac{1}{h_a}=\frac{a}{(a+b+c)r}$

$=\dfrac{(\cot\beta+\cot\gamma)}{2r(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)}$가 되며, 같은 방법을 이용하여 구하면 $\dfrac{1}{h_b}=\dfrac{(\cot\gamma+\cot\alpha)}{2r(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)}$, $\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{(\cot\alpha+\cot\beta)}{2r(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)}$가 얻어진다. 결국 $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{2(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)}{2r(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)}=\dfrac{1}{r}$이 증명된다. □

본 연구에서는 삼각형의 넓이를 이용하여 h_a, h_b, h_c를 5가지 방법으로 표현하고, 이들 각각을 바탕으로 하여 탐색을 수행하였다. 그 결과 등식 $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$을 증명하는 다양한 방법을 얻었으며, 문제해결 과정에서 내접원의 반지름, 외접원의 반지름, 삼각형의 변들, 각들 사이의 관계를 나타내는 흥미로운 등식들도 얻을 수 있었다.

IV. 해석기하와 관련된 등식의 증명

h_a, h_b, h_c는 삼각형의 꼭지점 A, B, C로부터 변 BC, AC, AB까지의 거리에 해당하므로, 점과 직선사이의 거리의 공식을 이용하면 h_a, h_b, h_c를 구할 수 있다. 이제 내접원의 중심 I를 원점으로 하는 좌표계를 도입하여, 꼭지점 A, B, C의 좌표를 각각 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)라 하자(그림 3).



<그림 3>

직선 AB의 방정식은 $(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-x_2y_1=0$이고, 직선 AC, BC의 방정식은 각각 $(y_1-y_3)x-(x_1-x_3)y+x_1y_3-x_3y_1=0$, $(y_2-y_3)x-(x_2-x_3)y+x_2y_3-x_3y_2=0$이 된다. 이제 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여, 꼭지점 A에서 직선 BC까지의 거리 h_a를 구하면, 다음과 같다.

$$h_a=\frac{|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}$$

같은 방법으로, 점 B, C에서 직선 AC, AB까지의 거리 h_b, h_c를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$h_b=\frac{|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}}$$

$$h_c=\frac{|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$$

이제, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$을 계산하면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}+\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}}{|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|}$$

이제, $\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}+\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}}{|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|}=\frac{1}{r}$임을 증명하면 된다. 이를 위해, <그림 3>에서 길이가 r인 선분 IL, IM, IN을 구하자. 점과 직선사이의 거리 공식을 이용하면, $\overline{IL}=\frac{|x_2y_3-x_3y_2|}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}}$이 된다. 이때 $\overline{IL}=r$임을 감안하면 얻어진 등식을 $\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}=\frac{|x_2y_3-x_3y_2|}{r}$와 같이 변형시킬 수 있다. IM, IN에 대해 같은 방법으로, $\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}=\frac{|x_1y_3-x_3y_1|}{r}$, $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{r}$을 얻을 수 있다. 이제 얻어진 등식들을

$$\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}+\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}}{|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|}$$

에 대입하면, $\frac{|x_2y_3-x_3y_2|+|x_1y_3-x_3y_1|+|x_1y_2-x_2y_1|}{r|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|}$이 얻어지며, 이 식이 $\frac{1}{r}$이 됨임을 보이자. $\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|$이 삼각형 ABC의 넓이를 좌표를 이용하여 표현한 것임을 생각하면, $\frac{1}{2}|x_2y_3-x_3y_2|$, $\frac{1}{2}|x_1y_3-x_3y_1|$, $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$은 각각 삼각형 IBC, ICA, IAB의 넓이가 됨을 알 수 있다. 이로부터, 다음 등식을 얻을 수 있다.

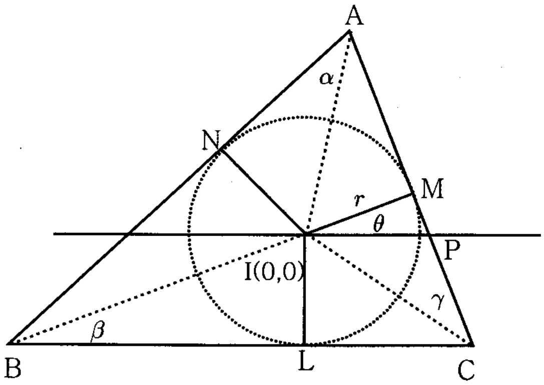
$$|x_2y_3-x_3y_2|+|x_1y_3-x_3y_1|+|x_1y_2-x_2y_1| = |(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|$$

결국, $\frac{|x_2y_3-x_3y_2|+|x_1y_3-x_3y_1|+|x_1y_2-x_2y_1|}{r|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|}=\frac{1}{r}$이 되고, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$이 증명된다. □

기술한 증명방법에서는 h_a, h_b, h_c를 점 A, B, C에서 직선 BC, AC, AB까지의 거리로, r을 내접원의 중심에서 변들까지의 거리로 좌표를 이용하여 구한 후에, 식을 정리하기 위해 꼭지점의 좌표가 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)인 삼각형의 넓이를 좌표로 구하는 다음 공식 $\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|$을 이용하였다.

기술한 증명방법에서는 세 꼭지점 A, B, C의 좌표를 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)이라고 놓고 해결하였다. 그러나 <그림 4>에서 IM⊥AC, IN⊥AB, IL⊥BC임을 이용하면 꼭지점 A, B, C의 좌표를 정확하게 구하여 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$을 계산하면, 삼각형의 넓이 공식을 사용하지 않고

도 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$임을 증명할 수 있다.



<그림 4>

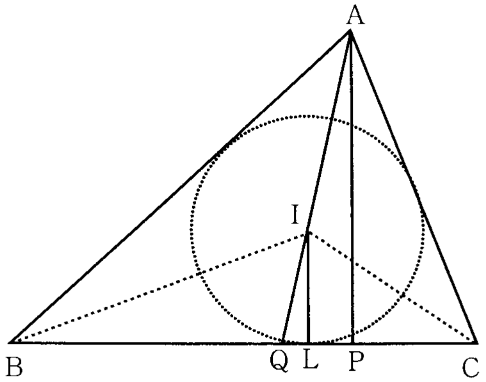
<그림 4>에서 직선 IP, IL이 각각 x축, y축이다. 이때 원점으로부터 r만큼 떨어져있으며, 각 MIP가 θ인 직선 AC의 방정식은 $x\cos\theta+y\sin\theta=r$로 나타낼 수 있다. 그런데 $\theta=\angle MIC-\angle PIC=\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)-\gamma=\frac{\pi}{2}-C$이므로, 직선 AC의 방정식은 $x\sin C+y\cos C=r$이 된다. 같은 방법으로, 직선 AB의 방정식은 $-x\sin B+y\cos B=r$임을 알 수 있으며, 직선 BC는 $y=-r$이 된다. 이제, 이들 세 직선을 연립하여, A, B, C의 좌표를 구하면, $A\left(\frac{r(\cos B-\cos C)}{\sin A},\frac{r(\sin B+\sin C)}{\sin A}\right)$, $B\left(\frac{-r(1+\cos B)}{\sin B},-r\right)$, $C\left(\frac{r(1+\cos C)}{\sin C},-r\right)$가 얻어진다.

이제, 점과 직선사이의 거리 공식을 이용하여 h_a, h_b, h_c를 구하자. 그러면, $h_a=\frac{r(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A}$, $h_b=\frac{r(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin B}$, $h_c=\frac{r(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin C}$가 얻어진다. 이로부터, 구하는 등식이 증명된다. □

본 연구의 해석기하와 관련된 접근에서는 내심 I를 원점으로 하는 좌표계를 도입하였다. 첫 번째 증명방법에서는 삼각형 ABC의 꼭지점의 좌표를 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)라 하고, 직선 AB, BC, AC의 방정식을 구하여, 꼭지점과 변들사이의 거리 h_a, h_b, h_c를 각각 구하고, 내심과 AB, BC, AC사이의 거리 r을 구하여 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$를 증명하였다. 두 번째 증명방법에서는 원점 I으로부터 r만큼 떨어져있는 직선의 방정식을 $x\cos\theta+y\sin\theta=r$와 같은 형태로 구하여, 얻어진 AB, BC, AC의 방정식을 연립하여 꼭지점 A, B, C의 좌표를 구하였다. 점과 직선사이의 거리 공식을 사용하여 얻어진 h_a, h_b, h_c에는 r이 포함되어, 이 방법에서는 첫 번째 방법과는 달리 r을 따로 구하지 않아도 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$이 증명되었다.

V. 벡터기하에 관련된 등식의 증명

<그림 5>에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{y}$라 놓으면, $\overrightarrow{BC}=\vec{y}-\vec{x}$가 된다. 이들 벡터로 $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AQ}$를 나타낼 수 있으며, 이들 벡터의 비를 이용하면 IL과 AP의 비, 즉 h_a와 r의 비를 구할 수 있다. 같은 방법으로 h_b와 r, h_c와 r의 비를 구하여, 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 증명할 수 있다.



<그림 5>

이제, 각의 이등분선에 속하는 $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{CI}$를 $\vec{x}$, $\vec{y}$를 이용하여 나타내면, $\overrightarrow{AI}=k_1\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\vec{x}+\frac{1}{|\vec{y}|}\vec{y}\right)$, $\overrightarrow{BI}=k_2\left(\frac{1}{|-\vec{x}|}(-\vec{x})+\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|}(\vec{y}-\vec{x})\right)$, $\overrightarrow{CI}=k_3\left(\frac{1}{|-\vec{y}|}(-\vec{y})+\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}(\vec{x}-\vec{y})\right)$임을 생각하자.

$\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\vec{x}$이고 $|\vec{x}|=c$, $|\vec{y}|=b$, $|\vec{y}-\vec{x}|=a$이므로, $k_1\left(\frac{1}{c}\vec{x}+\frac{1}{b}\vec{y}\right)-k_2\left(\frac{1}{c}(-\vec{x})+\frac{1}{a}(\vec{y}-\vec{x})\right)=\vec{x}$, $\frac{k_1}{c}\vec{x}+\frac{k_1}{b}\vec{y}+\frac{k_2}{c}\vec{x}-\frac{k_2}{a}\vec{y}+\frac{k_2}{a}\vec{x}-\vec{x}=0$, $\left(\frac{k_1}{c}+\frac{k_2}{c}+\frac{k_2}{a}-1\right)\vec{x}+\left(\frac{k_1}{b}-\frac{k_2}{a}\right)\vec{y}=0$가 된다. 그런데 $\vec{x}$와 $\vec{y}$는 서로 평행이 아니므로, $\frac{k_1}{c}+\frac{k_2}{c}+\frac{k_2}{a}-1=0$, $\frac{k_1}{b}-\frac{k_2}{a}=0$이다. 이들을 연립하면, $k_1=\frac{bc}{a+b+c}$, $k_2=\frac{ac}{a+b+c}$가 얻어진다. 한편 $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{CI}=\vec{y}$로부터 같은 방법에 의해, $k_1=\frac{bc}{a+b+c}$, $k_3=\frac{ab}{a+b+c}$임이 얻어진다. 결국 $k_1=\frac{bc}{a+b+c}$, $k_2=\frac{ac}{a+b+c}$, $k_3=\frac{ab}{a+b+c}$이 되고, $\overrightarrow{AI}=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{1}{c}\vec{x}+\frac{1}{b}\vec{y}\right)$임을 알 수 있다.

한편, BQ:QC $=c:b$임을 이용하면, $\overrightarrow{AQ}=\frac{b}{b+c}\vec{x}+\frac{c}{b+c}\vec{y}$이 된다. 이제 얻어진 $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AQ}$에 대한 식을 이용하여 $|\overrightarrow{AQ}|:|\overrightarrow{QI}|$를 구하면 $1:\frac{a}{a+b+c}$이 된다. 그런데 $|\overrightarrow{AQ}|:|\overrightarrow{QI}|=h_a:r$이므로, $h_a:r=1:\frac{a}{a+b+c}$이고, $\frac{1}{h_a}=\frac{a}{r(a+b+c)}$이 된다. 같은 방법으로, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$를 구하면, 등식

$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$이 증명된다. □

기술한 증명방법에서는 각의 이등분선 AI, AQ를 $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{y}$를 이용하여 각각 나타내어, 이들 사이의 비를 구하였다. 그런데 비 $|\overrightarrow{AQ}|:|\overrightarrow{QI}|$는 비 $h_a:r$와 같으므로, 이로부터 $\frac{1}{h_a}$과 $\frac{1}{r}$사이의 관계를 유도하여 등식을 증명하였다.

이때 <그림 5>에서 '$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{y}$를 이용하여 직접 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{IL}$을 구하여, 그 비를 구할 수는 없을까'라는 물음이 발생할 수 있다. $\overrightarrow{AP}$는 $m\vec{x}+(1-m)\vec{y}$로 나타낼 수 있으며, 한편 $\overrightarrow{AP}$는 $\overrightarrow{BC}=\vec{y}-\vec{x}$와 수직을 이룬다는 것을 이용하면, $\overrightarrow{AP}$를 $\vec{x}$, $\vec{y}$를 이용하여 정확하게 나타낼 수 있다. 같은 방법으로, $\overrightarrow{IL}$은 $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$로 정확하게 나타낼 수 있으며, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$는 $\vec{x}$, $\vec{y}$로 표현되므로, 결국 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{IL}$은 모두 $\vec{x}$, $\vec{y}$로 표현될 수 있다.

$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$이므로 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이 되고, 여기에 $\overrightarrow{AP}=m\vec{x}+(1-m)\vec{y}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{y}-\vec{x}$을 대입하면 $(m\vec{x}+(1-m)\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x})=0$이 얻어진다. 이제, $(m\vec{x}+(1-m)\vec{y})\cdot(\vec{y}-\vec{x})=0$을 전개하면 $m\vec{x}\cdot\vec{y}+(1-m)\vec{y}\cdot\vec{y}-m\vec{x}\cdot\vec{x}-(1-m)\vec{y}\cdot\vec{x}=0$이 얻어진다. 이제 얻어진 식에서 내적을 계산하면, $mbc\cos A+(1-m)b^2-mc^2-(1-m)bc\cos A=0$이 되고, 이로부터 $m=\frac{b^2-bc\cos A}{(b^2+c^2-2bc\cos A)}$, 코사인 제2법칙을 이용하여 정리하면 $m=\frac{b(b-c\cos A)}{a^2}$이 된다. 이제 m을 $\overrightarrow{AP}=m\vec{x}+(1-m)\vec{y}$에 대입하면, $\overrightarrow{AP}=\frac{b(b-c\cos A)}{a^2}\vec{x}+\frac{c(c-b\cos A)}{a^2}\vec{y}$가 얻어진다. 한편, 유사한 방법으로 꼭지점 B, C에서 대변에 그은 높이를 벡터로 나타내면, 각각 $-\vec{x}+\frac{c\cos A}{b}\vec{y}$, $\frac{b\cos A}{c}\vec{x}-\vec{y}$가 된다.

이제, $\overrightarrow{IL}$을 $\overrightarrow{IB}$와 $\overrightarrow{IC}$, $\vec{x}$와 $\vec{y}$로 나타내자. $\overrightarrow{IL}=n\overrightarrow{IB}+(1-n)\overrightarrow{IC}$인데, 앞의 증명과정에서 $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{a+b+c}((a+c)\vec{x}-c\vec{y})$, $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{a+b+c}(-b\vec{x}+(a+b)\vec{y})$와 같이 나타낼 수 있다고 하였으므로, $\overrightarrow{IL}=\frac{n}{a+b+c}((a+c)\vec{x}-c\vec{y})+\frac{(1-n)}{a+b+c}(-b\vec{x}+(a+b)\vec{y})=\left(n-\frac{b}{a+b+c}\right)\vec{x}+\left(\frac{a+b}{a+b+c}-n\right)\vec{y}$가 된다. 이제 n의 값을 구하자. 이를 위해 $\overrightarrow{IL}\perp\overrightarrow{BC}$, 즉 $\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{BC}=0$을 이용하자. 얻어진 $\overrightarrow{IL}$과 $\overrightarrow{BC}=\vec{y}-\vec{x}$을 대입하여 정리하면, $\left(\left(n-\frac{b}{a+b+c}\right)\vec{x}+\left(\frac{a+b}{a+b+c}-n\right)\vec{y}\right)\cdot(\vec{y}-\vec{x})=0$이 얻어지며, 이 등식을 정리하면 등식 $na^2-\frac{ab}{a+b+c}(a+b-c\cos A))=0$이 되며, 이로부터 $n=\frac{b(a+b-c\cos A)}{a(a+b+c)}$이 얻어진다. 얻어진 n값을 $\overrightarrow{IL}$에 대입하면, $\frac{b(b-c\cos A)}{a(a+b+c)}\vec{x}+\frac{c(c-b\cos A)}{a(a+b+c)}\vec{y}$가 된다. 같은 방법으로, 내접원의 중심 I에서 변 AB, AC에 내린 높이를 벡터로 나타내면, $\frac{b\cos A}{a+b+c}\vec{x}-\frac{c}{a+b+c}\vec{y}$, $-\frac{b}{a+b+c}\vec{x}+\frac{c\cos A}{a+b+c}\vec{y}$를 얻을 수 있다.

이제, $\overrightarrow{AP}=\frac{b(b-c\cos A)}{a^2}\vec{x}+\frac{c(c-b\cos A)}{a^2}\vec{y}$, $\overrightarrow{IL}=\frac{b(b-c\cos A)}{(a+b+c)a}\vec{x}+\frac{c(c-b\cos A)}{(a+b+c)a}\vec{y}$을 연립하면,

$\overrightarrow{AP}=\frac{a+b+c}{a}\overrightarrow{IL}$이 얻어진다. 같은 방법으로, 꼭지점 B, C에서 그은 높이에 대해서도 유사한 등식을 얻을 수 있으며, 결국 $\frac{1}{|\overrightarrow{h_a}|}+\frac{1}{|\overrightarrow{h_b}|}+\frac{1}{|\overrightarrow{h_c}|}=\frac{a}{r(a+b+c)}+\frac{b}{r(a+b+c)}+\frac{c}{r(a+b+c)}=\frac{1}{r}$이 증명된다. □

본 연구의 벡터기하와 관련된 접근에서는 삼각형의 변들에 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 도입하였다. 첫 번째 증명방법에서는 이들 벡터를 이용하여 h_a, h_b, h_c와 r의 비를 구하여 등식을 증명하였고, 두 번째 증명방법에서는 $\overrightarrow{h_a}$, $\overrightarrow{h_b}$, $\overrightarrow{h_c}$와 내접원의 반지름 벡터를 각각 구하여, 이들을 연립하여 등식을 증명하였다.

VI. 결론

본 연구에서는 삼각형의 세 높이 h_a, h_b, h_c 및 내접원의 반지름 r에 관련된 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$을 증명하기 위한 다양한 탐색수행의 방향을 기술하였고, 이를 바탕으로 등식에 대한 다양한 증명방법을 제시하였다.

본 연구에서는 탐색의 방향을 결정하기 위해, '문제해결에서 높이 또는 내접원의 반지름은 어떤 개념과 관련되는가', '등식을 증명하기 위해 무엇을 알아야하는가'와 같은 물음을 탐구하였다. 그리고 중등학교 수학교육에서 삼각형이 논증기하, 해석기하, 벡터기하에 관련하여 다루어지므로, 논증기하, 해석기하, 벡터기하의 개념들을 중심으로 탐색의 방향을 결정하였다.

논증기하의 개념들과 관련하여, 삼각형의 높이는 삼각형의 넓이와 관련시켜 높이를 첫째, $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_c=\frac{2S}{c}$, 둘째 $h_a=\frac{bc}{2R}$, $h_b=\frac{ac}{2R}$, $h_c=\frac{ab}{2R}$, 셋째 $h_a=2R\sin B\cdot\sin C$, $h_b=2R\sin A\cdot\sin C$, $h_c=2R\sin A\cdot\sin B$, 넷째 $h_a=b\sin C$, $h_b=c\sin A$, $h_c=a\sin B$, 다섯째 $h_a=\frac{(a+b+c)r}{a}$, $h_b=\frac{(a+b+c)r}{b}$, $h_c=\frac{(a+b+c)r}{c}$와 같이 나타냈고, 이들을 바탕으로 문제해결을 위한 탐색을 수행하여, 몇몇 증명방법을 발명하였다. 그리고 증명과정에서 내접원의 반지름, 외접원의 반지름, 삼각형의 변들, 각들 사이의 관계를 나타내는 흥미로운 등식들도 얻었다.

해석기하와 관련된 접근에서는 내심을 원점으로 하는 좌표계를 도입하여 탐색을 수행했으며, 두 가지 증명방법을 발명하였다. 첫 번째 증명방법에서는 삼각형의 꼭지점들의 좌표를 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)라 하고, 직선 AB, BC, AC의 방정식을 구하여, 꼭지점과 변들사이의 거리 h_a, h_b, h_c를 각각 구하고, 내심과 AB, BC, AC사이의 거리 r을 구하여 등식을 증명하였다. 두 번째 증명방법에서는 원점으로부터 r만큼 떨어져있는 직선 AB, BC, AC의 방정식을 구하여, 이들을 연립하여 꼭지점 A, B, C의 좌표를 구하여, 점과 직선사이의 거리 공식을 이용하여 h_a, h_b, h_c을 구했다. 그런데, 이 방법에서는 h_a, h_b, h_c에 r이 포함되어, r을 따로 구하지 않고 등식을 증명하였다.

벡터기하와 관련된 접근에서는 삼각형의 변들에 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 도입하여 탐색을 수행했

으며, 두 가지 증명방법을 얻었다. 첫 번째 증명방법에서는 이들 벡터를 이용하여 h_a, h_b, h_c와 r의 비를 구하여 등식을 증명하였고, 두 번째 증명방법에서는 $\overrightarrow{h_a}$, $\overrightarrow{h_b}$, $\overrightarrow{h_c}$와 내접원의 반지름 벡터를 각각 구하여, 이들을 연립하여 등식을 증명하였다.

본 연구의 결과를 통해, 체계적인 탐색수행을 통한 다양한 풀이방법 발명의 한 예를 제시하였으며, 다양한 풀이방법에 대한 수학교수학적 논의의 방향과 폭을 확장시킬 수 있는 기초 자료가 될 것이다. 특히 본 연구에 기술된 구체적인 탐색수행은 삼각형의 높이 및 내접원의 반지름에 관련된 다양한 문제들의 해결에서 효과적인 탐색의 방향을 제공할 것으로 기대되며, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$에 대한 다양한 증명방법은 중등학교에서 심화학습 자료로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

교육인적자원부 (2006). 제 7차 수학과 교육과정 수정고시. 서울: 교육인적자원부(웹사이트 www.moe.go.kr에 2006년 8월 26일 공고됨).

권영인 · 서보억 (2004). 코사인 제 2법칙의 다양한 증명방법 분석, 수학교육 논문집, 제 18권 2호, 251-264.

이만근 · 전병기 (2007). 올댓 피타고라스 정리. 서울: 경문사.

한인기 · 김태호 · 유익승 · 김대의 · 서보억 (2005). 사인의 덧셈정리에 대한 다양한 증명방법 연구, 수학교육논문집 제 19권 3호, 485-502.

한인기 · 꼴랴긴 (2006). 문제해결의 이론과 실제. 서울: 승산

한인기 · 에르든예프 (2005). 유추를 통한 수학탐구. 서울: 승산.

한인기 · Kombarov (2004). 수학 영재교육에서 기하학의 역할 및 지도, 수학교육논문집 제 18권 2호, 265-276.

Gotman, E. G. & Skopets, Z. A. (2000). Zadacha odna-resheniya raznye, Moskva: Prosveshenie.

Krutetski V. A. (1968). Psihologiya matematicheskih sposobnoctei shkolnikov, Moskva: Prosveshenie.

Polya (1973). How to solve it. New Jersey: Princeton University Press.

등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$의 다양한 증명방법에 대한 연구

A Study on Various Proofs of Equality $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$

Lee, Jaekab[3] · Han, Inki[4]

Abstract

In this paper we study a equality $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ which contains altitudes and radius of inscribed circle of triangle. We search some paths for proving the equality, and find out 9 proof method of the equality which is related with descriptive geometry, coordinate geometry, and vector geometry.

Key Words: Altitude, Radius of inscribed angle, Problem solving, Searching path, Various poof method.

3) Graduate School of Gyeongsang National University (kabi22@teachiworld.com)
4) correspondent author, Gyeongsang National University (inkiski@gsnu.ac.kr)