한국해안 · 해양공학회지
제 19 권 제 1 호, pp. 81~96, 2007년 2월

Lagrangian Dynamic Smagronsky 난류모형과 SPH를 이용한 쇄파역에서의 비선형 천수거동에 관한 연구

Numerical Analysis of Nonlinear Shoaling Characteristics over Surf Zone Using SPH and Lagrangian Dynamic Smagronsky Model

조용준* · 이 헌*
Cho Yong Jun* and Lee Heon*

요 지 : 단조해안에서의 비선형 천수거동을 가장 강건한 파랑모형인 Navier Stokes 식에 기초하여 수치모의 하였다. 이와 더불어 SUPERTANK LABORATORY DATA COLLECTION PROJECT (Krauss et al., 1992)에서 취득한 자료를 활용하여 Reynolds 응력에 대한 구배모형의 한계를 검증하였다. 취득한 쇄파대 유동계의 자기상관함수는 상당한 특성길이를 지니며 이러한 결과는 구배모형이 큰 오류를 야기할 수 있다는 사실을 시사한다. 이러한 인식에 기초하여 파랑모형은 Large Eddy Simulation (LES), Smooth Particle Hydrodynamics (SPH), Gaussian kernel function을 사용하여 수치 적분하였다. 잔차응력은 Lagrangian Dynamic Smagronski 모형 (Meneveau et al.,1996)을 활용하여 모의하였으며 모의 기간 중 유체 알갱이간의 이격거리는 관성부영역의 특성길이보다 작게 유지되도록 노력하였다. 천수과정에서 진행되는 동조·비동조 고차 조화성분으로 전이된 파랑에너지로 인해 상당히 예리하고 왜도된 파형, 파형의 마루로부터 시작되는 물입자 자유낙하, 착수로 인한 커다란 물보라의 형성, 물보라 형성층의 해변으로의 이행, wave finger (Narayanaswamy와 Darlymple, 2002) 등이 비교적 정확히 재현되는 등 상당히 고무적인 결과를 얻었다.

핵심용어: smooth particle hydrodynamics (SPH), Lagrangian Dynamic Smagronsky model (LDS), plunging type 쇄파, 쇄파역 자기상사 변량, 잔차응력, Navier Stokes equation

Abstract : Nonlinear shoaling characteristics over surf zone are numerically investigated based on spatially averaged NavierStokes equation. We also test the validity of gradient model for turbulent stresses due to wave breaking using the data acquainted during SUPERTANK LABORATORY DATA COLLECTION PROJECT (Krauss et al., 1992). It turns out that the characteristics length scale of breaking induced current is not negligible, which firmly stands against ever popular gradient model, κ–ε model, but favors Large Eddy Simulation with finer grid. Based on these observations, we model the residual stress of spatially averaged NavierStokes equation after Lagrangian Dynamic Smagorinsky (Meneveau et al., 1996). We numerically integrate newly proposed wave equations using SPH with Gaussian kernel function. Severely deformed water surface profile, free falling water particle, queuing splash after landing of water particle on the free surface and wave finger due to structured vortex on rear side of wave crest (Narayanaswamy and Dalrymple, 2002) are successfully duplicated in the numerical simulation of wave propagation over uniform slope beach, which so far have been regarded very difficult features to mimic in the computational fluid mechanics.

Keywords : smooth particle hydrodynamics (SPH), Lagrangian Dynamic Smagronsky model (LDS), plunging type wave breaking, surf similarity parameter, sub particle scale stress, Navier Stokes equation

*서울시립대학교 토목공학과(Department of Civil Engineering, University of Seoul, 130-743, Korea, young@uos.ac.kr)

1. 머리말

여러 기작에 의해 생성된 파랑은 외해에서 발생하여 인근 연안으로 이행되며 천수과정의 최종단계에서 발생하는 쇄파로 그 긴 여정을 마치게 된다. 이러한 쇄파는 파랑에너지를 난류와 같은 고주파 대역과 연안류나 이안류와 같은 저주파 대역으로 재분배하여 연안침식 혹은 퇴적 현상의 중요한 기작으로 작용하게 된다. 최근 연안사주의 이행은 가속도가 왜도된 유동계와 밀접한 관계를 지닌 것으로 보고 된 바 있다 (Elgar et al., 2001). 따라서 연안침식과 퇴적 현상을 규명하기 위해서는 내습하는 파랑의 성장과정과 이로 인한 유동계 변화에 대한 정확한 이해가 선행되어야 할 것으로 판단된다.

쇄파 현상을 해석하기 위한 초기의 노력은 비선형 천수방정식 (Airy, 1945) 혹은 Boussinesq 형태의 파랑모형을 대상으로 도수 현상과 쇄파의 유사성에 기초하여 파형경사가 임계치를 초과하는 경우 자유수면 인근에 와로 구성된 층을 도입하여 해석하는 surface roller model (Veeramony와 Svendsen, 1999) 등의 성과를 거둔 바 있으나 자유수면이 과도하게 변형되는 plunging 형태의 쇄파 모의는 힘겨워 보인다. 이후 전술한 파랑모형보다 보다 강건한 NavierStokes 식을 대상으로 model, Large Eddy Simulation (LES) model 등을 차용하여 쇄파를 해석하려는 많은 시도가 진행된 것으로 보이나 전술한 한계에서 자유로울 수 없다. 이러한 한계는 Euler 좌표계에서 정의되는 편미분 방정식 형태의 파랑모형으로는 다중으로 연계된 영역의 기술이 자유롭지 못하다는 태생적 한계에서 비롯된다. 최근에는 유동계를 일련의 유체 알갱이로 해석하고 각 알갱이를 시공을 통해 순차적으로 추적하여 plunging 형태 쇄파의 경우처럼 과도하게 변형된 자유수면 형상을 수치적으로 해석하려고 하는 노력이 Darlymple을 중심으로 한 Johns Hopkins University 연구팀에 의해 진행되어 많은 성과가 이루어진 듯하다 (Darlymple과 Rogers, 2006).

Pope이 2004년에 언급하였듯이 LES모형에 기초한 수치해석이 그 수월성을 지니기 위해서는 Static Smagorinsky 모형 (Smagorinsky, 1963)에 기초하여 모의되는 sub particle scale (SPS) 난류응력 모형의 적용범위가 전 모의기간에 걸쳐 유지되어야 한다. 충분한 정확도를 얻기 위해서는 여과함수의 특성길이 혹은 예상되는 난류의 특성길이 등으로 해석이 가능한 유체 알갱이 간의 이격거리가 Kolmogorov (1942)가 이야기 하는 micro length scale에 근접하여야 하나 이러한 논의는 Darlymple (2006)의 연구에서는 전혀 찾아볼 수 없다. 또한 차용된 SPS 난류응력 모형의 해석이 논문 여러 곳에서 서로 충돌하는 오류를 지니고 있어 시정이 요구된다. 이와 더불어 전 유동계에서 난류의 세력이 동일하다는 가정을 수행하여 plunging 형태의 쇄파처럼 국지적으로 생성되는 난류와 난류의 순차적인 이송과 소산을 설명 할 수 있는 어떠한 기작도 포함하고 있지 못하다.

1991년에 Germano는 전술한 Static Smagorinsky 모형의 한계를 극복하기 위해 수치 모의된 유동계의 정보를 활용하여 Smagorinsky 계수를 산출하는 dynamic Smagorinsky 모형을 제시 한 바 있다. Dynamic Smagorinsky 모형은 난류응력의 시공에서의 변화를 설명할 수 있으나 산출된 Smagorinsky 계수는 상당한 영역에서 음의 값을 지닌다. 이 경우 관성 부대역에서 energy cascading 과정을 통해 상대적으로 작은 규모의 와로 전이된 에너지의 일부분이 다시 큰 규모의 와로 회귀되는 back scattering 현상을 의미하나 시공에서의 Smagorinsky 계수의 급격한 한 변화는 수치모의를 불안하게 하는 요인으로 작용하게 된다. 이러한 불안정성은 유동 특성이 균일한 방향이 존재하는 경우 균일한 방향으로 계수 값의 산정에 국지적인 평균을 도입하는 경우 상당히 안정화되나 쇄파대역에서의 흐름처럼 복잡한 경계나 유동특성이 균일하게 유지되는 방향이 존재하지 않는 경우 적용이 어렵다 (Meneveau et al., 1996). 비균질한 유동계에도 적용이 가능하도록 dynamic Smagorinsky 모형을 개선하려는 노력은 Meneveau 등 (1996)이 Smagorinsky 모형은 난류 응력은 전단변형률에 비례한다는 개념에서 출발한 구배모형으로 이러한 비례관계는 ensemble 시각에서 성립되나 Germano (1991)가 제시한 dynamic Smagorinsky 모형에는 이러한 ensemble 개념이 누락되어 있다는 사실을 주목하면서 시작되었다. 이어 Meneveau 등 (1996) 은 관성 부영역에서 진행되는 energy cascading 과정은 Lagrangian 시각에서 극명하게 드러난다는 사실에 기초하여 계수의 산출과정에 유적선을 따라 평균 개념을 도입하여 안정성 문제를 해결한 Largrangian dynamic Smagorinsky (LDS) 모형을 완성하였다.

전술한 Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)기법은 Lucy(1977), Gingold와 Monaghan (1977)에 의해 천체물리현상을 해석하기 위한 초기 형태의 모형이 완성되었으며 그 후 SPH 기법은 점성을 고려한 유체해석 (Takeda 등, 1994)과 자유수면을 가지는 유체의 거동 (Monaghan, 1994), low Reynolds number에서의 비압축성 유체해석 (Morris, 1997), 구조물에 작용하는 파압의 연구 (Dalrymple 등, 2000) 등 다양한 분야에 적용되면서 그 완성도가 높아진 것으로 보여진다.

본 연구에서는 단조해안에서의 파랑의 천수과정과 천수과정에서 진행되는 유동계의 변화 등을 SPH 기법을 활용하여 수치 해석하고자 한다. 쇄파로 유동계에 도입되는 난류는 기본 방정식을 공간에 대해 평균을 취함으로써 난류를 규모가 큰 와류와 관성대역 (inertial subrange)으로 분리하고 입자간 이격거리보다 규모가 작은 관성대역의 와류는 등방성이고 균질하다는 인식에 기초하여 와점성계수와 구배모형을 차용하는 LES와 LDS(1996) 모형을 사용하여 모의된다.

2. 기본방정식

기본 방정식으로는 작은 규모의 난류는 등방성이라는 인식에 기초하여 여과된 NavierStokes 식과 질량 보존식을 사용하였다. 평균을 취하는 과정에 새로운 항이 추가적으로 도입되지 않는 장점을 지닌 Favreaveraging($f = \overline{\rho f}/\overline{\rho}$)에 기초하여 여과된 기본 방정식을 나열하면 다음과 같으며 여기서 ÷는 공간에서의 여과과정을 나타낸다(Yoshizawa, 1986).

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \boldsymbol{u} \tag{1}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \tau_v + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \tau_t \tag{2}$$

여기서, ρ는 밀도, p는 압력, g는 중력가속도, u는 유속, τ_v와 τ_t는 각각 점성에 의한 응력과 subparticle scale에서의 난류응력 혹은 잔차응력을 나타내며 응력 성분 $\tau_{v_{ij}}$, $\tau_{t_{ij}}$는 각각 다음과 같이 기술된다.

$$\tau_{v_{ij}} = 2\rho v\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{3}$$

$$\tau_{t_{ij}} = 2\rho v_t\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{4}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{5}$$

$$v_t = (C_s \Delta l)^2 |S| \tag{6}$$

여기서 strain rate tensor의 크기 $|S|$는 $(2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$로 정의되며 이차원 유동계($i, j = x, z$)의 경우 나열하면 다음과 같다.

$$|S| = (2S_{xx}S_{xx} + 4S_{xz}S_{xz} + 2S_{zz}S_{zz})^{1/2} \tag{7}$$

식 (3)-(7)에서 S_{ij}는 strain rate tensor, v는 dynamic viscosity, v_t는 eddy viscosity, Δl은 입자간격을 나타내며 차용된 입자망에 용해되는 난류의 규모로도 해석될 수 있으며 C_s는 Smagorinsky 상수를 각각 나타낸다. 식 (2)에 기술된 압력은 밀도에 종속하며 압력에 대한 정보를 얻기 위해서는 추가적으로 시 영역의 매 구간별로 Poission식을 해석하는 것이 고전적인 방법이나 본 연구에서는 이러한 번거로움을 피하기 위해 Monaghan (1994)에 기초하여 다음과 같이 정의되는 상태방정식을 차용하여 해석하였다 (Batchelor, 1967).

$$P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^{\gamma} - 1\right] \tag{8}$$

여기서 $\gamma = 7$, $\rho_o = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$는 기준밀도로 식 (8)은 밀도의 미세한 변화로 인해 압력에는 큰 변화가 진행된다는 것을 이야기 하며 이러한 성질은 압축성 유체의 일반적 특성과 부합한다. 계수 B는 유체가 실질적으로 비압축성 조건을 충족하도록 다음과 같이 조절되며

$$B = \frac{200\rho g H}{\gamma} \tag{9}$$

이 경우 $C = \sqrt{\partial p/\partial \rho}$로 정의되는 음속이 상대적으로 큰 값을 지니면 Courant-Friedrich-Levy 조건을 충족하기 위해서는 시 영역에서의 증분이 작은 값을 지닐 수밖에 없어 과도한 계산량을 유발하게 된다. 이러한 어려움을 해결하기 위해 음속은 유체 알갱이가 지니는 최대유속 $u_{\max}$의 열 배를 상회하지 않도록 조절하였다.

3. 산정을 위한 Lagrangian Dynamic Smagronski model

LES 기법을 활용하여 수치해석을 하는 경우 계산영역은 이격거리 Δ로 거치된 일련의 유체 알갱이로 대치되며 이러

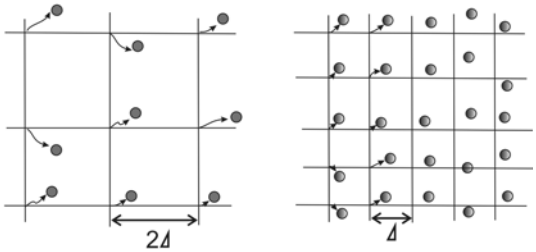

Fig. 1. Configuration of fluid particles deployed for Fine and Coarser Large Eddy Simulation.

한 이산화 과정으로 수치 모의된 모든 물리량은 간접적인 여과과정을 거치게 된다. 이 경우 잔차응력 $\tau_{t_{ij}}$은 다음과 같이 기술되며

$$\tau_{t_{ij}} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j \tag{10}$$

여기서 ¯는 폭이 Δ인 여과과정을 나타낸다. 이격거리 2Δ로 다소 조악하게 거치된 일련의 유체 알갱이에서 진행되는 수치모의의 경우 잔차응력 T_{ij}는 다음과 같이 정의되며

$$T_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \hat{\overline{u}}_i \hat{\overline{u}}_j \tag{11}$$

여기서 ^는 폭이 2Δ인 여과과정을 나타낸다. 잔차응력 T_{ij}에 대해 폭이 2Δ인 여과과정을 수행한 후 식 (11)과의 차이를 취하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$L_{ij} = T_{ij} - \hat{\tau}_{t_{ij}} \tag{12a}$$

$$= \widehat{\overline{u_i u_j}} - \hat{\overline{u}}_i \hat{\overline{u}}_j \tag{12b}$$

식 (12)는 Germano (1991)에 의해 처음 유도되어 Germano 항등식이라고 불리며 L_{ij}는 Δ과 2Δ 사이의 협대역에 포진하는 잔차응력을 나타낸다. 식 (12b)의 우변 항은 한 번의 수치모의에서 얻은 유동 정보와 폭 2Δ에서 추가적으로 수행되는 여과과정으로 산출될 수 있어 효율적 Dynamic Smagorinsky 모형 구성의 단초를 제공하게 된다. 부연하면 이격거리 2Δ인 조악한 유체 알갱이 망에서의 수치모의는 실제 수행되지 않으며 가상 모의로 해석 할 수 있다. 이에 반해 식 (12a)의 $\hat{\tau}_{t_{ij}}$와 T_{ij}는 아직 결정되지 않은 미지량으로 추가적인 모형을 필요로 하며 와점성계수모형을 활용하는 경우 각각 다음과 기술 할 수 있다.

$$\hat{\tau}_{t_{ij}} = 2(C_s \Delta l)^2 \widehat{|\bar{S}|\left(\bar{S}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{S}_{kk}\delta_{ij}\right)} \tag{13}$$

$$T_{ij} = 2(C_s \Delta l)^2 \hat{|\bar{S}|}\left(\hat{\bar{S}}_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \hat{\delta}_{ij}\right) \tag{14}$$

식 (13), (14)에서 $\bar{S}_{ij}$와 $\hat{\bar{S}}_{ij}$는 각각 이격거리 Δ과 2Δ에서의 전단변형률을 나타낸다. 식 (13), (14)을 식 (12)에 대입하면 삼차원 유동의 경우 하나의 미지량 C_s에 대한 총 다섯 개의 관계식이 도출되어 Smagorinsky 계수는 중층결정이라는 문제에 직면하게 된다. 이러한 중층결정문제를 해결하기 위해 Germano (1991)는 Germano 항등식에서 발생하는 오차 e_{ij}가 최소화되는 Smagorinsky 계수를 차용할 것을 제언하였으며 오차 e_{ij}는 다음과 같이 정의된다.

$$e_{ij} = L_{ij} - 2\Delta^2 \left[4C_S^2 \hat{|\bar{S}|}\left(\hat{\bar{S}}_{ij} - \frac{1}{3}\hat{\bar{S}}_{kk}\delta_{ij}\right) - C_S^2 \widehat{|\bar{S}|\left(\bar{S}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{S}_{kk}\delta_{ij}\right)} \right] \tag{15}$$

Smagorinsky 계수가 유동특성이 균질한 방향으로 일정하다는 가정을 추가적으로 수행하면 는 다음과 같이 기술되며

$$C_s^2 = \frac{\langle L_{mn} M_{mn} \rangle}{\langle M_{pq} M_{pq} \rangle} \tag{16}$$

여기서

$$M_{pq} = 2\Delta^2 \left[4\hat{|\bar{S}|}\left(\hat{\bar{S}}_{pq} - \frac{1}{3}\hat{\bar{S}}_{kk}\delta_{pq}\right) - \widehat{|\bar{S}|\left(\bar{S}_{pq} - \frac{1}{3}\bar{S}_{kk}\delta_{pq}\right)} \right] \tag{17}$$

식 (16)에 기술된 Dynamic Smagorinsky 모형은 난류 응력의 시공에서의 변화를 설명할 수 있으나 산출된 Smagorinsky 계수는 상당한 영역에서 음의 값을 지닌다. 음의 값은 관성부대역에서 energy cascading 과정을 통해 상대적으로 작은 규모의 와로 전이된 에너지의 일부분이 다시 큰 규모의 와로 회귀되는 back scattering 현상을 의미하나 시공에서의 Smagorinsky 계수의 급격한 한 변화는 수치모의를 불안하게 하는 요인으로 작용하게 된다. 이러한 불안정성은 유동 특성이 균일한 방향이 존재하는 경우 균일한 방향으로 계수 값의 산정에 국지적인 평균개념을 도입하는 경우 상당히 안정화되나 쇄파대역에서의 흐름처럼 복잡한 경계나 부정류, 유동특성이 균일하게 유지되는 방향이 존재하지 않는 경우 적용이 어렵다(Meneveau et al., 1996). 비균질한 유동계에도 적용이 가능하도록 Dynamic Smagorinsky 모형을 개선하려는 노력은 Meneveau 등(1996)이 Smagorinsky 모형은 난류 응력은 전단변형률에 비례한다는 개념에서 출발한 구배모형으로 이러한 비례관계는 ensemble 시각에서 성립되나 Germano (1991)가 제시한 dynamic Smagorinsky 모형에는 이러한 ensemble 개념이 누락되어 있다는 사실에 주목하면서 시작되었다. 이어 Meneveau 등(1996) 은 관성부영역에서 진행되는 energy cascading 과정은 Lagrangian 시각에서 극명하게 드러난다는 사실에 기초하여 계수의 산출과정에 유적선을 따라 평균 개념을 도입하여 안정성 문제를 해결한 Largrangian dynamic Smagorinsky

(LDS) 모형을 완성하였다. LDS모형은 시공을 통해 유체 알갱이가 그리는 유적선을 따라 적용된 Germano 항등식에 Smagorinski 모형을 적용하는 경우 발생하는 오차를 최소화함으로써 유도될 수 있다. 임의 시간 t에 특정 지점 x를 점유하고 있는 유체알갱이의 유적선은 다음과 같이 기술할 수 있으며

$$z(t') = x - \int_{t'}^{t} \bar{u}[z(t''), t'']dt'' \tag{18}$$

임의 시간 t'의 유적선 상에서 발생하는 오차는 다음과 같이 기술된다.

$$e_{ij}(z,t') = L_{ij}(z,t') - C_s^2(x,t)M_{ij}(z,t') \tag{19}$$

여기서 M_{ij}는 식 (17)에 정의하였으며 시간 t, 지점 x에서의 Smagorinski 계수 C_s는 유적선에서 누적된 오차가 최소가 되도록 결정된다. 따라서 최적화 목적 함수 E로 기능하는 유적선에서 누적된 총 오차의 제곱은 다음과 같이 기술 할 수 있으며

$$E = \int_{-\infty}^{t} e_{ij}(z(t'),t')e_{ij}(z(t'),t')W(t-t')dt' \tag{20}$$

여기서 $W(t-t')$는 난류 유동계의 자기상관관계가 이격시간이 증가하면 급속히 감소하는 경험적 인식을 반영하기 위해 삽입한 가중함수로 이격시간이 증가하면 감소하도록 조정된다. 총 오차의 최소화는 다음과 같이 구현되며

$$\frac{\partial E}{\partial C_s^2} = \int_{-\infty}^{t} 2e_{ij}\frac{\partial e_{ij}}{\partial C_s^2}W(t-t')dt' = 0 \tag{21}$$

식 (19), (21)으로부터 Smagorinski 계수 C_s는 최종적으로 다음과 같이 기술되며

$$C_s = \frac{\tilde{L}_{LM}}{\tilde{M}_{MM}} \tag{22}$$

여기서 ~는 유적선을 따라 가중 평균된 물리량을 나타내며 $\tilde{L}_{LM}$, $\tilde{M}_{MM}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{L}_{LM}(x,t) = \int_{-\infty}^{t} L_{ij}M_{ij}W(t-t')dt' \tag{23}$$

$$\tilde{M}_{MM}(x,t) = \int_{-\infty}^{t} M_{ij}M_{ij}W(t-t')dt' \tag{24}$$

식 (23), (24)에서 가중함수 $W(t-t')$는 난류유동의 상관범위를 고려하여 결정되어야 하며 난류는 기억시간이 그리 길지 않다는 경험적 인식에 기초하여 최근의 유동정보에 상대적으로 큰 가중치가 부여되도록 다음과 같이 정의하였다.

$$W(t-t') = \frac{1}{T}e^{\frac{x-x'}{T}} \tag{25}$$

여기서 T는 난류 유동계의 상관정도를 나타내는 특성시간을 나타낸다. 가중함수 $W(t-t')$가 식 (25)와 같이 지수함수로 정의되는 경우 식 (23), (24)은 선회적분의 형태로 $W(t-t')$는 $t=t'$에 순간적으로 가해진 부하량에 대한 선형 역학계의 단위 응답함수로 해석할 수 있다. 따라서 $\tilde{L}_{LM}(x,t)$, $\tilde{M}_{MM}(x,t)$은 다음과 같이 정의되는 이송방정식에 의해 기술될 수 있으며

$$\frac{\partial \tilde{L}_{LM}}{\partial t} + \frac{1}{T}\tilde{L}_{LM} = \frac{1}{T}L_{ij}M_{ij} \tag{26}$$

$$\frac{\partial \tilde{M}_{MM}}{\partial t} + \frac{1}{T}\tilde{M}_{MM} = \frac{1}{T}M_{ij}M_{ij} \tag{27}$$

이러한 인식에 기초하여 식 (23), (24)의 적분은 계산량을 저감하기 위해 식 (26)과 (27)를 다음과 같이 이산화하여 산출된다.

$$\frac{\tilde{L}_{LM}^{n+1}(x) - \tilde{L}_{LM}^{n}(x-\bar{u}^n\Delta t)}{\Delta t} + \frac{1}{T^n}\tilde{L}_{LM}^{n+1}(x) = \frac{1}{T}L_{ij}^{n+1}M_{ij}^{n+1} \tag{28}$$

$$\frac{\tilde{M}_{MM}^{n+1}(x) - \tilde{M}_{MM}^{n}(x-\bar{u}^n\Delta t)}{\Delta t} + \frac{1}{T^n}\tilde{M}_{MM}^{n+1}(x) = \frac{1}{T}M_{ij}^{n+1}M_{ij}^{n+1} \tag{29}$$

4. SPH 정식화

SPH 기법에서 유동계는 일련의 유체 알갱이로 해석되며 이산적으로 거치되어 있는 각 알갱이에서의 물리량 $f(x)$는 가중함수 (kernel function)를 활용하면 다음과 같이 분포함수로 기술되며

$$\langle f(x)\rangle \doteq \int_{\Omega} f(x')W(x-x',h)dx' \tag{30}$$

N개의 입자가 활용되는 경우 보간 된 물리량 $<f(x)>$는 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$\langle f(x)\rangle \cong \sum_{j=1}^{N} f(x_j)W(x-x_j,\Omega)\Delta V_j \tag{31}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W(x_i - x_j, \Omega)$$

여기서, W는 kernel function, Ω는 kernel function의 support의 직경, m_j는 질량, ρ_j는 밀도, ΔV_j는 유체 알갱이의 체적을 나타낸다. 전술한 기본 방정식을 알갱이를 중심으로 정식화하면 다음과 같다.

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j (u_i - u_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \tag{32}$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} + \sum_j m_j \left(\frac{\tau_{v_i}}{\rho_i^2} + \frac{\tau_{v_j}}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla_i W_{ij}$$

$$+ \sum_j m_j \left(\frac{\tau_t}{\rho_i^2} + \frac{\tau_t}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} + g \tag{33}$$

5. 쇄파역 Reynolds 응력에 대한 구배 모형의 적용가능성과 난류특성시간

쇄파로 인해 야기된 난류유동의 특성시간과 Raynolds 응력에 대한 구배모형의 적용가능성을 규명하기 위해 미국 Oregon 주립대학의 대형 조파 수조에서 수행된 SUPERTANK PROJECT에서 취득한 쇄파 대역에서의 유속자료로부터 난류 유동 특성을 분석하였다. 수조의 제원과 유속 측점 위치를 Fig. 2에 도시하였다. 조파기에서 생성된 무작위 파열의 유의파고는 0.801 m, 첨두 파랑의 주기는 3 sec이며 Gauge 1, 2, 3, 4와 5 에서 16 Hz간격으로 계측된 유속자료로부터 산출된 자기상관함수와 상호 상관함수 $R_u(\Delta x)$는 Fig. 3에 도시하였다.

기체 분자간의 충돌에 의한 운동량 전이와 Reynolds 응력 사이의 유사성에 그 기초를 둔 Boussinesq 와 점성계수 모형은 그 간편함으로 인해 난류 유동계 해석에 하나의 큰 흐름을 형성한다. 와 점성계수는 난류 유동계를 대표하는 특성속도와 큰 규모의 와동계를 대표하는 특성길이에 의해 그 크기가 용이하게 결정될 수 있으나 이러한 유사성에 대한 의문은 이 모형의 태동과 더불어 끊임없이 제기되어 왔다. 이러한 의문은 첫째 난류 유동계에서 유체 덩어리는 덩어리간의 충돌로 과거 특성 치를 상실하게 되며 이러한 충돌은 Reynolds 응력의 중요한 기작으로 작용하게 되나 유체 덩어리는 기체분자와는 달리 강체로 해석할 수 없다는 점과, 특성길이는 유체 덩어리가 충돌 전에 이동한 거리를 의미하며 비교적 큰 규모의 난류 유동계에서는 이 이동거리가 기체와는 달리 상당한 크기라는 관측을 토대로 제기되어 왔다. 실제 하안과 하상에서의 조도가 서로 상이한 자연하천의 경우 국지적으로 유체내의 전단 응력과 속도 구배가 상이한 부호를 지닌다(Rodi, 1993).

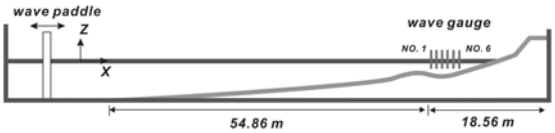

Fig. 2. Configuration of flume and location of wave gauges.

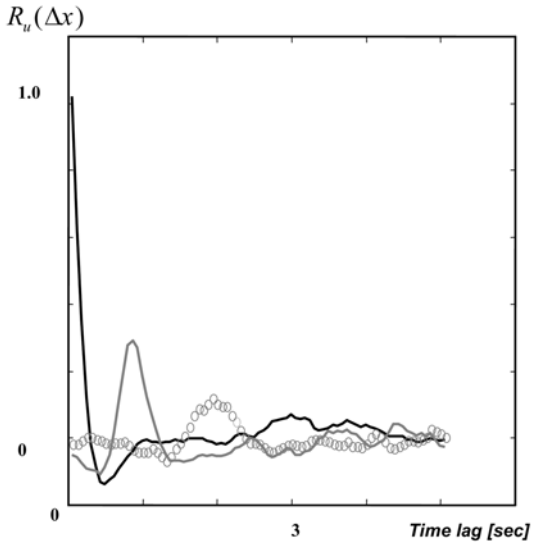

Fig. 3. Autocorrelation and Crosscorrelation function of breaking induced current [black solid line: gauge NO. 1, gray solid line: between gauge NO.1 and gauge NO. 2, circle: between gauge NO.1 and gauge NO.3].

측점 1, 2에서 산출된 유속간의 상호상관함수는 지체시간 $t \approx 0.9$ sec에서 최대치에 도달하였다. 따라서 난류유동에너지의 상당부분을 설명하는 큰 규모의 와동계의 특성길이는 수심과 비슷한 규모로 판단되며 유체 입자가 충돌 전에 이동한 거리 ξ가 다음과 같이 정의되는 거시적 선회류의 크기 l

$$l = \frac{\partial u}{\partial y} \Big/ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

보다 작다는 가정에 기초한

$$l \gg \frac{1}{2} \xi$$

gradient transport 모형은 그 한계를 맞게 된다(Tennekes와

Lumley, 1992).

Micro length scale η와 비교적 규모가 큰 와류의 특성길이 l는 scale law에 기초하면 다음과 같이 기술 할 수 있으며

$$\frac{\eta}{l} = R^{-3/4} \tag{34}$$

여기서 R은 ul/ν로 정의되는 큰 와류의 Reynold NO, u는 큰 와류의 특성속도를 각각 나타낸다. 전술한 SUPERTANK PROJECT의 관측자료를 토대로 쇄파대역에서의 특성속도와 특성길이로 각각 $\sqrt{gh}$ 와 h를 취하고 산출하는 경우 micro length scale η는 $10^{-4}\,m$ 정도의 크기를 지닌다.

6. 수치 결과

전술한 수치모형의 적용성을 검증하기 위해 단조해안에서 파랑의 천수과정을 수치해석 하였으며 계산영역은 Fig. 4에 도시하였다. 사면 경사부의 기울기는 1:10이며 일정 수심부에서의 수심은 0.15 m이며 조파기는 사면경사부의 시점으로부터 0.5 m 이격하여 거치하였다. 이러한 이격거리는 파장 (L=1.35 m)을 중심으로 기술하는 경우 약 L/3에 해당된다. Dean과 Dalrymple (1991)의 조파 이론에 기초하여 piston type의 조파기를 활용하여 주기 1.2 sec, 파고 0.06 m의 정현파를 조파하였으며, 거치된 유체 입자의 수는 1800개이고, 저면과 조파기 입자의 수는 모두 1164개로 구성하였다. 쇄파형태는 저면경사와 파형경사의 비, surf similarity parameter $\xi = H_o/L_o s^2$에 의해 결정되며 본 검증작업에 차용된 여러 조건은 ξ = 4.44에 해당되는 것으로 plunging 형태의 쇄파가 진행되도록 선정하였다(Komar, 1976). 초기 유체입자의 간격은 0.01 m로 균일하게 배치하였으며 이러한 이격거리는 micro length scale η의 일반적인 크기를 약간 상회하나 관성부영역보다는 하회하는 수치로 충분한 해상도를 확보하였다고 판단된다. 시영역에서의 적분은 Leapfrog 기법을 사용하여 수행하였다. Kernel function으로는 수치적으로 가장 안정적인 결과를 주는 것으로 알려진 Gaussian function을 사용하였으며 기술하면 다음과 같다.

$$W = \alpha_d e^{-R^2} \tag{35}$$

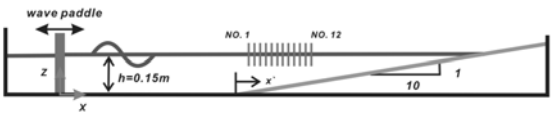

Fig. 4. Initial configuration of fluid particles.

여기서 α_d는 일, 이, 삼차원 공간에서 각각 $1/\pi^2\Omega$, $1/\pi\Omega^2$, $1/\pi^{3/2}\Omega^3$의 값을 지니는 Kernel function이 정점에서 일의 값을 지니도록 조절되는 정규화 계수이며, $R = r/h$, r은 두 입자간의 이격거리, Kernel function의 support 반경 Ω는 support 내에 20에서 30개의 유체 알갱이가 분포할 수 있도록 선택되어진다(Gingold와 Monaghan, 1977).

저면을 구성하는 입자도 수체를 구성하는 입자와 더불어 식 (12)와 (13)에 기초하여 진화하나 시 영역에서 하나의 적분과정이 완료될 때마다 다시 零의 유속을 부과하여 No flux 경계조건을 구현하였다. 이와 더불어 경우에 따라 유체 알갱이가 저면을 구성하는 입자층 사이를 투과하는 수치적 오류는 유체 알갱이가 저면을 구성하는 입자층에 임계치 r_o 이하로 접근하는 경우 인위적인 반발력을 부과하여 해결하였다. 반발력 PB_{ij}을 기술하면 다음과 같으며

$$PB_{ij} = \begin{cases} D\left[\left(\dfrac{r_o}{r_{ij}}\right)^{n_1} - \left(\dfrac{r_o}{r_{ij}}\right)^{n_2}\right]\dfrac{x_{ij}}{r_{ij}^2} & \left(\dfrac{r_o}{r_{ij}}\right) > 1 \\ 0 & \left(\dfrac{r_o}{r_{ij}}\right) \le 1 \end{cases} \tag{36}$$

여기서 $n_1 = 12$, $n_2 = 4$, r_{ij}는 유체 알갱이와 저면을 구성하는 알갱이 사이의 이격거리를 나타내며 D는 유동계에 종속하는 계수로 보통 최대유속의 제곱 정도의 크기로 조절된다.

수치모의된 water surface profile은 천수과정별로 Fig. 5에 유속은 Fig. 6에 각각 도시하였다. 경사부 시점에서부터 진행되는 비선형 천수과정을 통해 동조, 비동조 고차 조화성분으로 전이된 파랑에너지로 인해 상당히 예리해지고 왜도된 파형을 관찰할 수 있다 (a). 더욱 진행된 천수로 인해 파형은 더욱 왜도되며 순차적으로 파형의 마루로부터 수입자 자유낙하가 시작되는 것을 볼 수 있으며 우리의 예상대로 plunging 형태의 쇄파가 진행되는 것을 확인할 수 있다 (b, c). 자유 낙하하는 수입자의 착수와 연이어 형성되는 커다란 물보라, 순차적인 물보라 형성층의 해변으로의 이행 등을 엿볼 수 있다 (d). 종국에는 Narayanaswamy와 Dalrimple (2002)에 의해 처음 보고된 쇄파가 진행되는 파랑의 후면에 형성되는 거친 로프모양의 wave finger를 관측할 수 있다. 전술한 wave finger의 형성은 쇄파로 인해 파형의 배후에 형성되는 구조적인 와에 기인한 것으로 판단된다.

t = 1.65 sec에서 경사 부 시점에서 0.1 m 이격된 지점에서부터 0.025 m의 균일한 간격으로 설치된 총 열 두 개의 지점(NO.1~NO.12)에서 산출된 수평방향 유속분포는 Fig. 7에

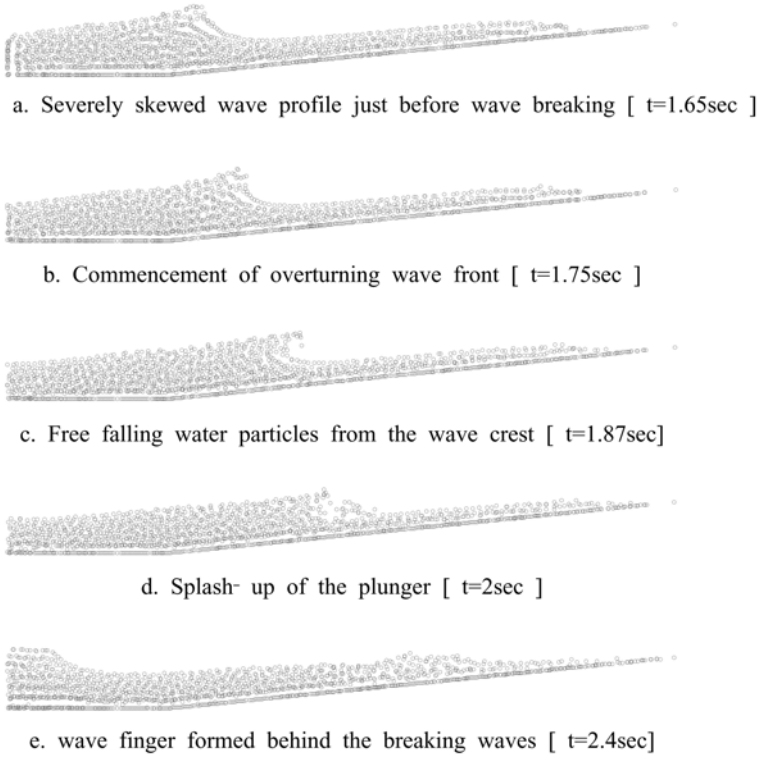

Fig. 5. Sequential snapshots of water surface profile which underwent plunging type wave breaking on a sloping beach.

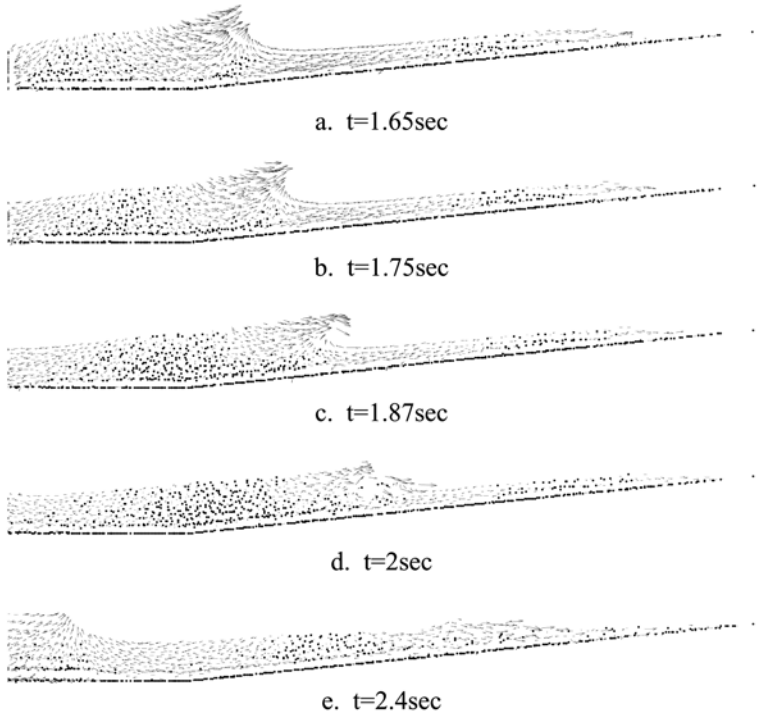

Fig. 6. Velocity profile under waves at varying stage of shoaling over a uniform sloping beach.

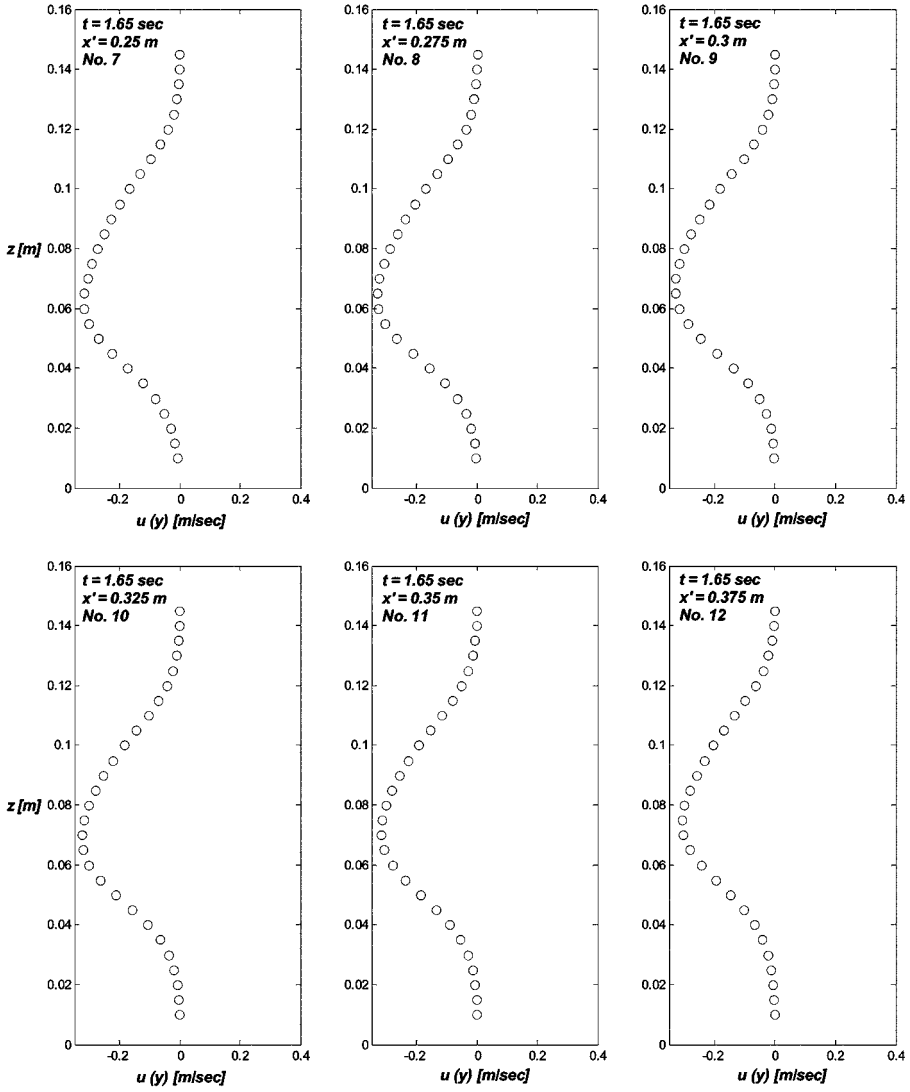

Fig. 7. Horizontal velocity profile across the surf zone at t = 1.65 sec.

연직방향 유속분포는 Fig. 8에 도시하였다. 이때 파고는 NO.1 지점에서 정점에 이루며 파 마루 인근에서는 전 수심에 걸쳐 연안방향으로의 흐름이 우세하나 파 전면부에서는 외해방향의 흐름이 우세한 것을 알 수 있다. 이러한 현상은 선행파랑의 downrush에 기인하는 것으로 흔히 이야기하는 undertow에 해당된다.

쇄파 전 연직방향 유속분포는 파마루 인근에서는 저면에서 연직방향으로 선형적으로 증가한다는 기존의 인식에 어느 정도 부합하는 것을 확인 할 수 있다(NO.1, NO.2). 반면에 파마루 전면부에서는 자유수면 인근에서 정점을 이루며 수심방향으로 급속히 그 세력이 약해진다(NO.3, NO.4, NO.5). Downrush로 인해 경사면 정점부에서는 연직방향 유속이 저면을 향하는 것을 알 수 있다(NO.7~NO.12).

t = 1.87 sec에서의 수평방향 유속분포는 Fig. 9에 연직방향 유속분포는 Fig. 10에 도시하였다. 쇄파가 진행되면서 자유수면 인근에 발생되는 최대유속은 쇄파 전과 비교할 때 증가하며 유속은 0.4 m/sec에서 그 정점을 이룬다. 또한 수평방향 유속은 자유수면 인근에서 비교적 균일하게 분포하며(NO.1~NO.6), 유속의 증가로 인해 undertow현상이 관측되는 영역은 연안으로 상당히 후퇴되고 그 세력도 약해지

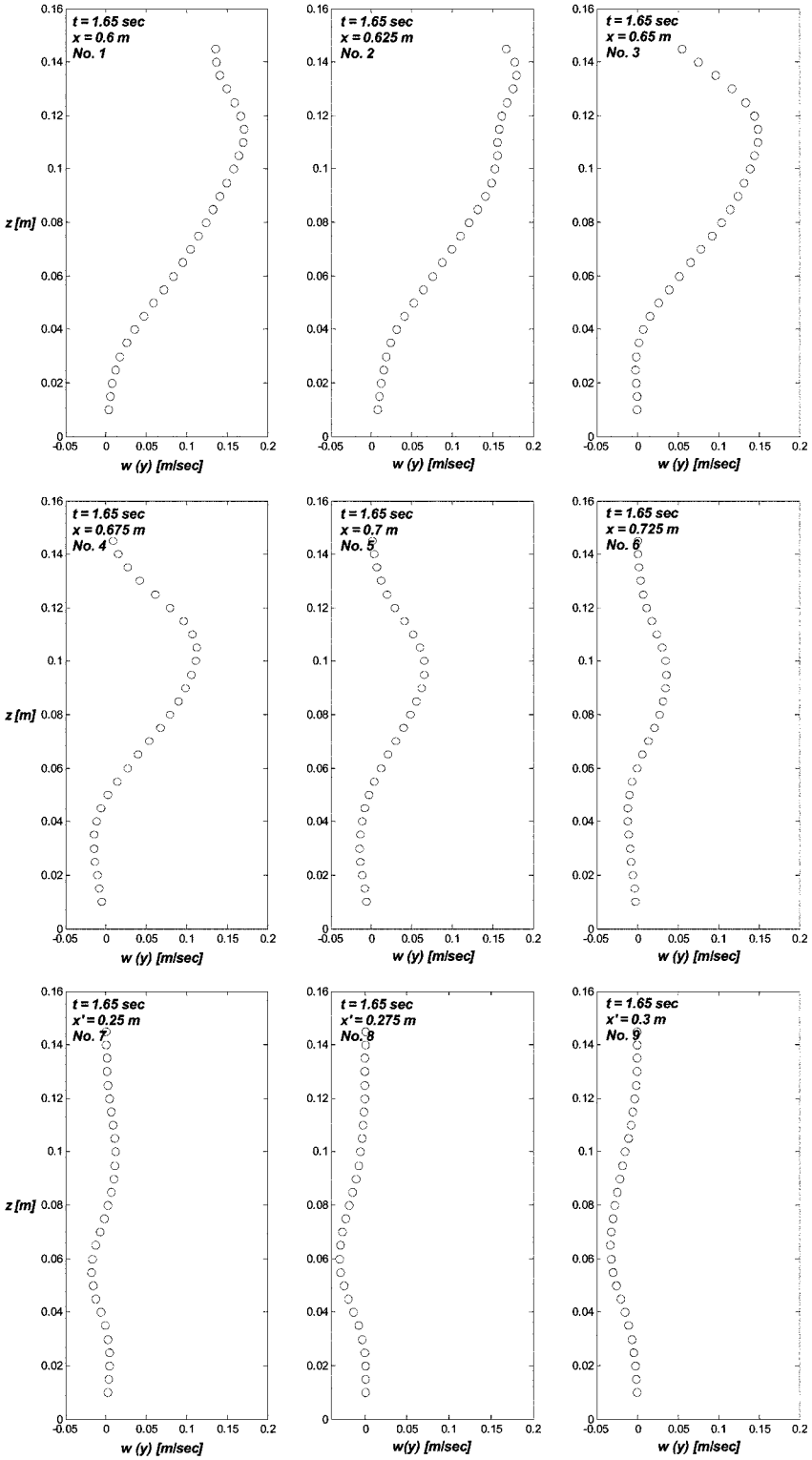

Fig. 8. Vertical velocity profile across the surf zone at t = 1.65 sec.

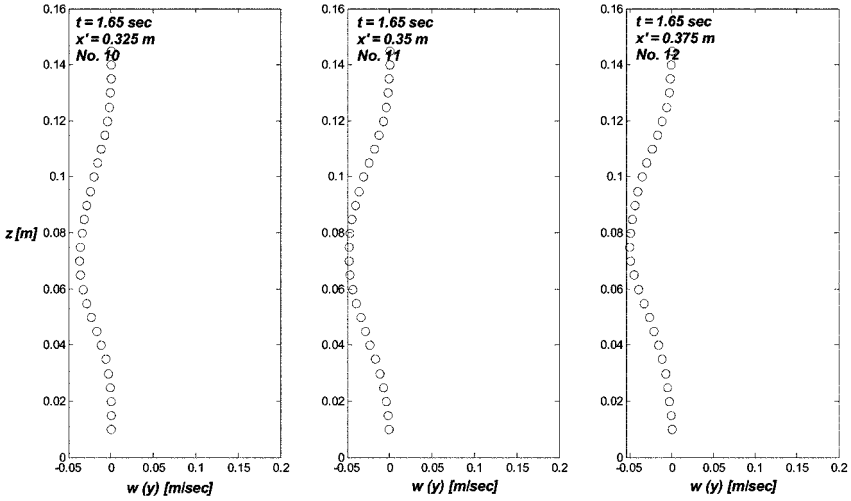

Fig. 8. Continued

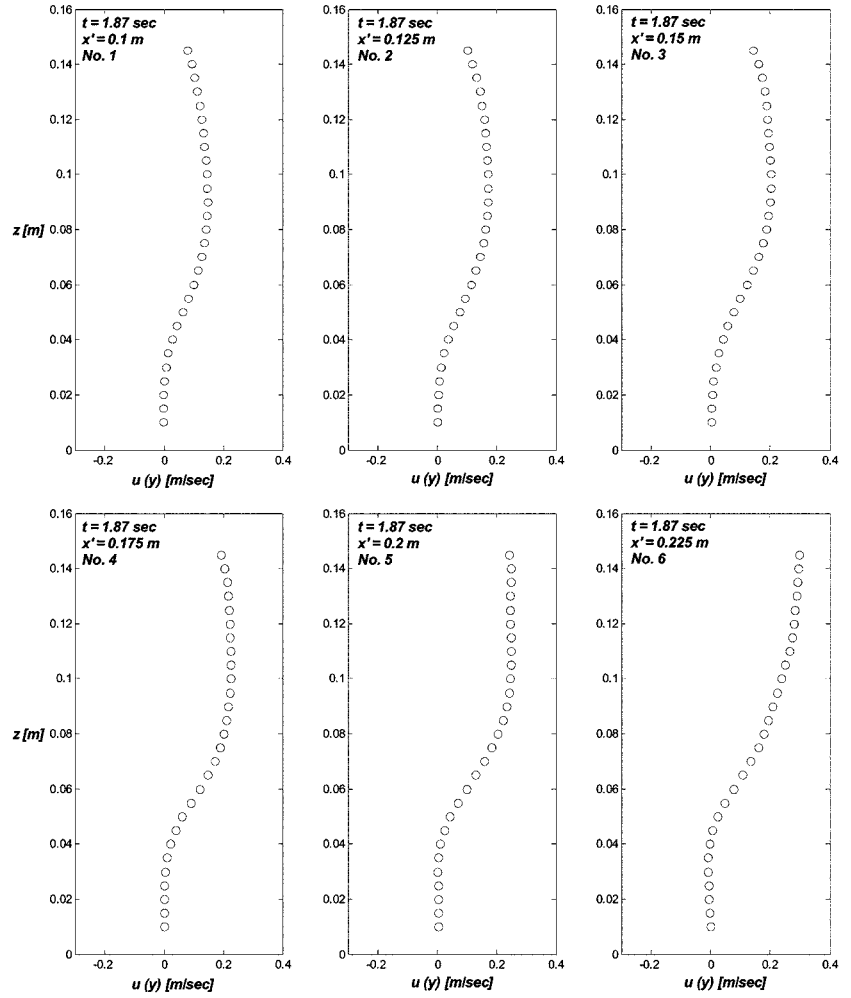

Fig. 9. Horizontal velocity profile across the surf zone at t = 1.87 sec.

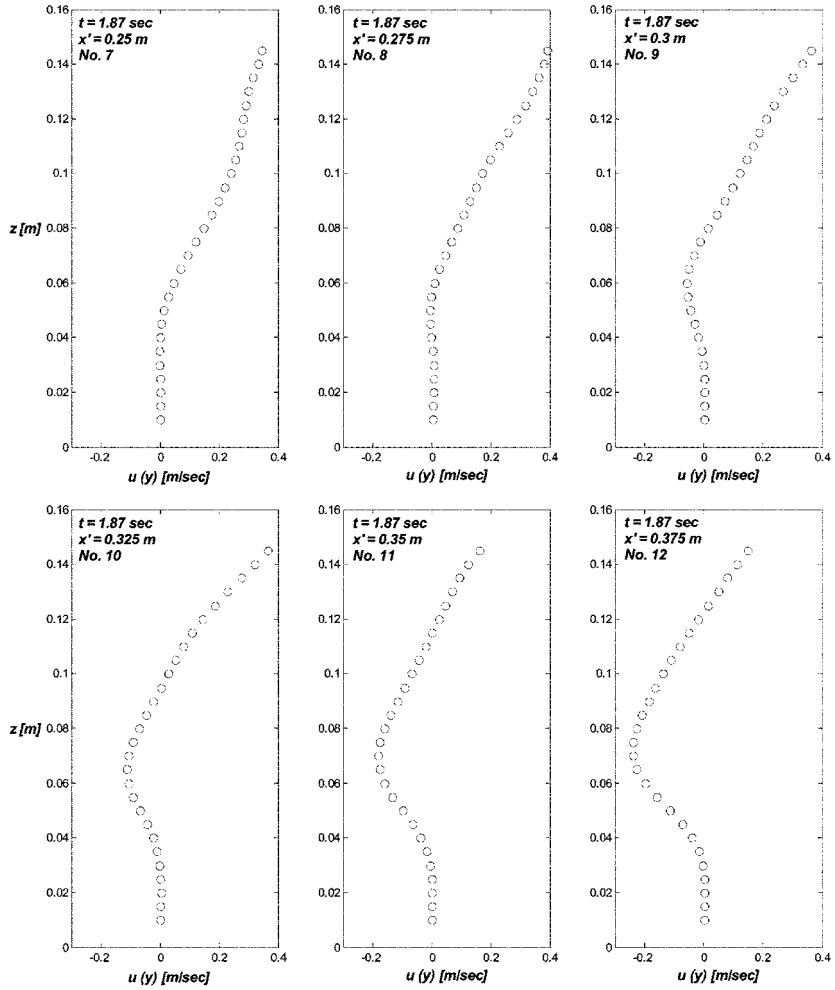

Fig. 9. Continued

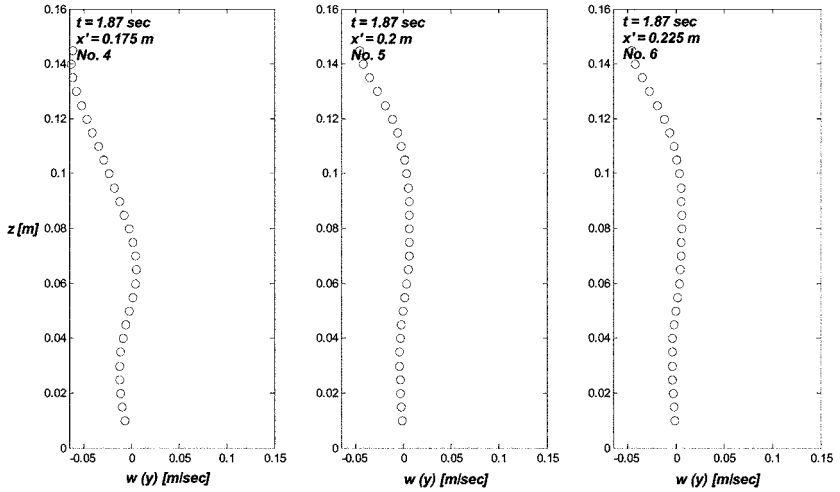

Fig. 10. Vertical velocity profile across the surf zone at $t = 1.87$ sec.

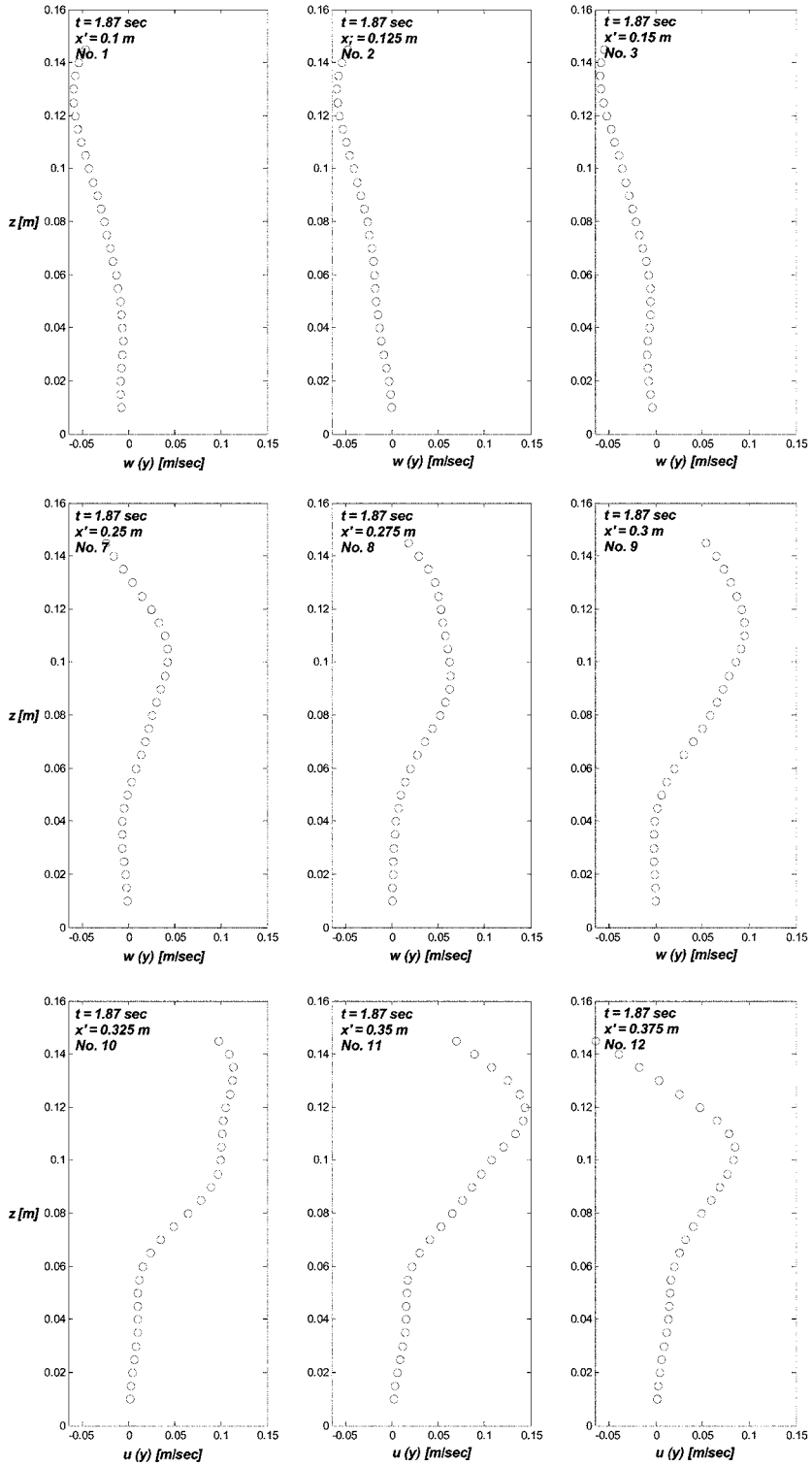

Fig. 10. Continued

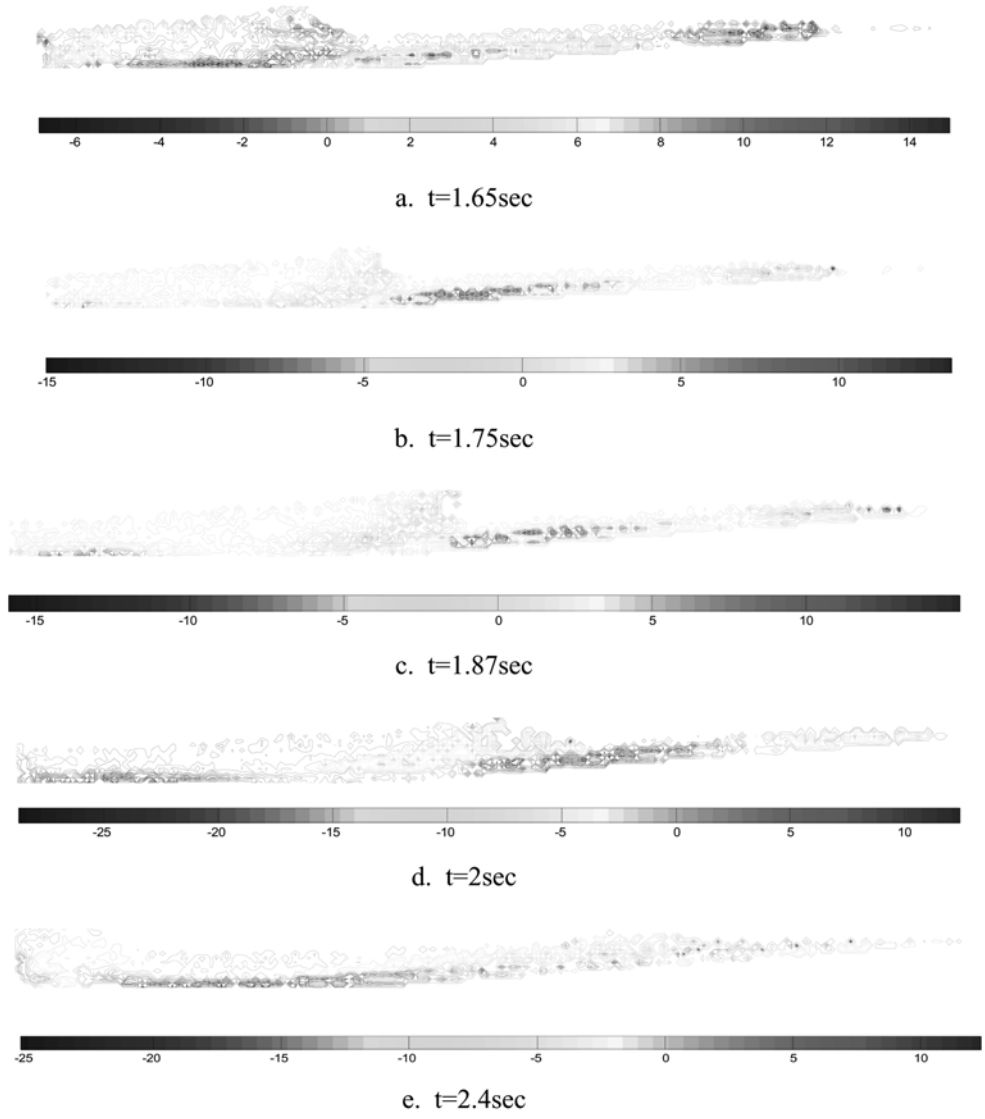

Fig. 11. Vorticity profile under waves at varying stage of shoaling over a uniform sloping beach.

는 것을 볼 수 있다. 파고는 NO.8지점에서 정점에 이룬다.

파 마루로부터 수입자의 자유낙하가 진행되면서 파 마루 인근의 연직방향 유속이 저면으로 향하는 것을 알 수 있다(NO.1~NO.6). 또한 파 마루 전면부에서는 저면으로부터 선형적으로 증가한다는 기존의 인식에 부합되는 것을 확인 할 수 있다(NO.7~NO.12). 수치모의된 유동계로부터 산출된 와도는 천수과정별로 Fig. 11에 도시하였다. 자유낙하 하는 입자의 착수 시 자유수면 인근에서 형성된 강한 와류는 파의 후면과 저면으로 이행되는 것으로 인지되어왔으며 이러한 경향은 Fig. 11d에 분명하게 드러난다.

7. 결 론

최근 진행된 파랑모형의 괄목할만한 발전에도 불구하고 plunging형의 쇄파가 진행되는 경우처럼 극심하게 변형된 자유수면의 수치적 모의는 해안공학자에게는 여전히 힘겨운 과제로 남아있다. 이러한 어려움은 Euler 좌표계에서 정의되는 편미분 방정식 형태의 파랑모형으로는 다중으로 연계된 영역의 기술이 자유롭지 못하다는 태생적 한계에서 비롯된다.

최근 Dalrymple을 중심으로 한 Johns Hopkins University

연구팀은 SPH라는 새로운 수치적 기법을 활용하여 전술한 난제를 부분적으로 해결한 것으로 보인다. 이러한 부분적인 성공은 SPH 기법이 Lagrangian 좌표계에서 구조적인 격자망의 차용 없이 수행된다는 점과 기본 방정식을 구성하는 각 미분량이 연속한 kernel function을 활용하여 직접 보간된다는 점에 기인한다. 연속한 kernel function은 고전적인 FEM에서 흔히 차용되는 부분적으로 연속한 형상함수에서 진일보한 것으로 미분량을 추산하기 위한 구조적인 격자망의 차용을 불필요하게 하는 커다란 자유를 우리에게 제공한다. 이러한 수월성은 쇄파로 인해 유동계에 도입되는 난류의 가장 주된 이송 기작이 순간적인 유속성분에 의한 대류 작용인 것을 상기하면 쉽게 이해할 수 있으며 Lagrangian 좌표계에서 이러한 대류작용은 추가적인 가정의 수행 없이 자연스럽게 처리될 수 있다.

초기연구에서 Dalrymple등 (2005)은 인위적인 점성을 활용하여 난류응력을 간접적으로 설명하였으나 물리적인 토대가 취약하다는 한계에서 자유로울 수 없다. 그 후 Dalrymple 등 (2005)은 차용된 유체 알갱이의 이격거리보다 작은 규모에서의 난류응력 혹은 잔차응력은 난류의 자기 상사성에 기초하여 등방성이며 보편적인 모형이 가능하다는 인식 하에 LES모형과 잔차응력에 대한 Smagorinsky 난류응력 모형의 적용성을 검토한 바 있다. 그러나 차용된 SPS 난류응력 모형의 해석이 논문 여러 곳에서 서로 충돌하는 오류를 지니며 쇄파역에서 흔히 관측되는 국지적인 난류의 생성, 이송, 소산과정을 설명할 수 있는 어떠한 기작도 포함하고 있지 못하다. 본 연구에서는 Lagrangian Dynamic Smagorinsky 난류응력 모형을 활용하여 일정 경사부에서의 파랑의 이행과 순차적인 천수, 연이은 쇄파현상을 수치모의 하였다. 비선형 천수과정의 일반적인 특징, 동조·비동조 고차 조화성분으로 전이된 파랑에너지로 인해 상당히 예리하고 왜도된 파형, 파형의 마루로부터 시작되는 물입자 자유낙하, 착수로 인한 커다란 물보라의 형성, 물보라 형성층의 해변으로의 이행, wave finger (Narayanaswamy와 Darlymple, 2002) 등이 비교적 정확히 재현되는 등 상당히 고무적인 결과를 얻을 수 있었다. 이러한 결과는 기존의 Euler 좌표계에서 정의되는 파랑모형과 이동경계 기법의 한계를 뛰어 넘는 것으로 향후 보다 정확한 침수해석이 가능할 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구의 일부분은 서울시립대학교의 연구비지원에 의해 수행된 것으로 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

Airy, G.B., 1945. Tides and waves. Encycl. Metrop., Section VI.

Batchelor, G.K., 1967. An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

Dalrymple, R.A. and Knio, O., 2000. SPH Modeling of water waves, Proc. Coastal Dynm., Lund 2000.

Dalrymple, R.A., Knio, O., Cox, D.T., GomezGesteira, M. and Zou, S., 2001. Using a Lagrangian particle method for deck overtopping, Proc. Waves, ASCE , 1082-1091

Dalrymple, R.A. and Rogers, B.D., 2006. Numerical modeling of water waves with the SPH method, Coastal Engineering, Vol. 53, 141-147.

Dean, R.G. and Dalrymple, R.A., 1991. Water wave mechanics for engineers and scientists, World Scientific.

Elgar S., Gallagher E.L. and Guza R.T., 2001. Nearshore sandbar migration. Journal of Geophysical Research., Vol. 106, 11,623-11,627.

Gingold, A. and Monaghan, J.J., 1977. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to nonspherical stars, Mon. Not. R. Astr. Soc. 181, 375-389.

Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W.H., 1991. A dynamic subgridscale eddy viscosity model, Phys. Fluids, A3, 1760-1765.

GomezGesteira, M., Cerqueiro, D., Crespo, C. and Dalrymple, R.A., 2005. Green water overtopping analyzed with a SPH medel, Ocean Engineering, Vol. 32, 223-238.

Kraus, N.C., Smith, J.M. and Sollitt, C.K., 1992. SUPERTANK laboratory data Collection project, Proceedings of the 23rd Coastal Engineering Conference, ASCE, 2191-2204.

Kolmogorov, A.N., 1942. The equations of turbulent motion in an incompressible fluid. Izvestia Acad. Sci., USSR; Phys., 6, 56-58.

Komar, P.D., 1976. Beach processes and sedimentation, Prentice Hall.

Lucy, L.B., 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. Astronomical Journal 82, 10131024.

Menevenau, C., Lund, T.S. and Cabot, W. H., 1996. A Lagrangian dynamic subgridscale model of turbulence. Journal of Fluid Mech., Vol. 319, 353-385.

Monaghan J.J., 1994. Simulating free surface flows with SPH. Journal of Computational Physics 110, 399-406.

Morris, J.P., Fox, P.J. and Zhu, Y., 1997. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH. Journal of Computational Physics 136, 214-226.

Narayanaswamy, M. and Dalrymple, R.A., 2002. An experimental study of surface instabilities during wave breaking. Proc. of 28th ICCE, ASCE, 344-355.

Peregrine, D.H. and Svendsen, I.A., 1978. Spilling breakers, bores and hydraulic jumps. Proc. of 16th ICCE, ASCE, 540-550.

Pope, Stephen B., 2004. Ten questions concerning the largeeddy simulation of turbulent flows. New Journal of Physics, Vol. 6, No. 35, 1-24.

Rodi, Wolfgang, 1993. Turbulence models and their application in hydraulics a state of art review, International Association for Hydraulic Research, Delft, 3rd edition 1993, Balkema.

Smagorincky, J., 1963. General circulation experiments with primitive equations, I. the Basic Experiment, Monthly Weather Review, Vol. 91, 99-164.

Takeda, H., Shoken, M. M, and Minoru, Sekiya, 1994. Numerical simulation of viscous flow by smoothed particle hydrodynamics. Progress in Theoretical Physics 92, 939-959.

Tennekes, H., and Lumley, J. L., 1992. A first course in turbulence, The MIT Press, Cambridge.

Veeramony, J. and Svendsen, I. A., 1999. Modeling the flow in surf zone waves. Research Report NO. CACR9904, Center for applied coastal research, Univ. of Delaware, Newark, Delaware.

Yoshizawa, A., 1986. Statistical theory for compressible turbulent shear flows with application to subgrid modeling, Physics of Fluids A 29, 2152-2164.

Received December 22, 2006
Accepted February 26, 2007