

중주파수 대역 해석을 위한 Beam-plate-beam 연성 구조물의 웨이브 모형 연구와 시험적 규명[#]

Wave Models and Experimental Studies of Beam-plate-beam Coupled Systems for a Mid-frequency Analysis

유 지 우[†] · D. J. Thompson^{*} · N. S. Ferguson^{*}

Ji Woo Yoo, D. J. Thompson and N. S. Ferguson

(2006년 9월 26일 접수 ; 2007년 1월 5일 심사완료)

Key Words : Mid-frequency(중주파수), Beam(보), Plate(판), Coupling(연성), Wave Method(웨이브 법), Wavenumber(파수), Power(파워), Energy(에너지), Muller's Method(몰러 법)

ABSTRACT

There has been much effort to find suitable methods for structural analysis in the mid-frequency region where traditional low frequency methods have increasing uncertainties whilst statistical energy analysis is not strictly applicable. Systems consisting of relatively stiff beams coupled to flexible plates have a particularly broad mid-frequency region where the beams support only a few modes whilst the plate has a high modal density and modal overlap. A system of two parallel beams coupled to a plate is investigated based on the wave method, which is an approximate method. Muller's method is utilised for obtaining complex roots of a dispersion wave equation, which does not converge in the conventional wave method based on a simple iteration. The wave model is extended from a single-beam-plate system, to a plate with two identical beams which is modelled using a symmetric-antisymmetric technique. The important hypothesis that the coupled beam wavenumber is sufficiently smaller than the plate free wavenumber is experimentally verified. Finally, experimental results such as powers and energy ratios show the validity of the analytical wave models.

1. 서 론

중주파수 대역(mid-frequency region)은 일반적으로 유한요소해석(FEA)과 같은 결정론적인 방법이 나 Statistical Energy Analysis(SEA)와 같은 통계적인 방법의 적용이 알맞지 않은 대역을 말한다⁽¹⁾.

[†] 책임저자; 정회원, 현대자동차 차량기술센터
E-mail : j.w.yoo@hyundai-motor.com
Tel : (031)368-3351, FAX : (031)368-2733
^{*} ISVR, Southampton University, UK

[#] 이 논문은 2006 추계 소음진동 학술대회에서 우수논문으로 추천되었음.

FEA는 요소의 수가 구조의 파장과 관련되기 때문에 기본적으로 저주파수 대역의 해석에 적합하다⁽²⁾. 한편, 고주파수 대역 해석을 위해서는 SEA와 에너지 흐름 해석법(energy flow method)이 알려져 있다^(3,4). 산업현장에서 대표적으로 사용되는 SEA에서, 부계(subsystem)는 에너지의 향으로 표현되고, 이 부계는 통계적 의미에서 동일하지만(nominally identical), 모드 특성은 엄밀히 말하면 다르다⁽³⁾. 만약 부계가 통계적 관점에서 랜덤하게 다르다면 이 부계는 앙상블 평균으로부터 정의될 수 있으며, 부계간의 에너지 흐름(energy flow)이 통계적 접근으로 계산될 수 있다.

위에서 언급한 방법들을 적용하기 적당하지 않은 중주파수 대역의 해석을 위해 여러가지 새로운 방법들이 제시되었다. 웨이브 법(wave method)⁽⁵⁾, 퍼지 구조 이론(fuzzy structure theory)⁽⁶⁾, 모드 기반 법(mode-based method)⁽⁷⁾ 등이 알려진 바 있다. 한편 이러한 방법들을 혼용하는 이른바 하이브리드 법(hybrid method)도 알려져 있다⁽⁸⁾. 이러한 방법들은 대개 간단한 구조물, 예를 들면, 하나의 보 (beam), 판(plate) 구조물을 주로 다루고 있다^(5,7). 이 연구에서는 좀더 복잡한, 두개의 보와 판으로 연결된 구조물을 다루는데, 강성이 상대적으로 높은 보와 강성이 약하고 유연한 판 구조로 이루어진다. 이러한 구조는 자동차나 선박, 건축물을 이루는 기본적인 구조이다. 보는 상대적으로 높은 주파수 대역까지 저주파적인 동특성을 보이고, 판은 반대로 아주 저주파에서부터 고주파적인 거동을 보인다. 따라서, 이들이 연성된 구조물의 거동은 넓은 중주파수대역의 특성을 가진다.

중주파수 해석을 위한 근사적 방법으로 웨이브 법을 이용하였다⁽⁵⁾. 강성이 높은 보와 유연한 판 구조-즉 판의 파수(wavenumber)가 보의 파수보다 충분히 크다-라는 가정은 웨이브 모형을 구성하는데 필요한 조건이다. 두개의 보에 판이 연성된 구조의 웨이브 모형을 구현하기 위해, 먼저 비대칭인 하나의 보와 판으로 연성된 구조물을 설명하고, 이 구조물 거동의 특성을 이용하여 보-판-보 구조물을 다룬다. 웨이브 법의 적용에 있어 수렴이 안되는 문제를 극복하기 위해 새로이 Muller 법⁽⁹⁾을 적용하였다.

하중은 점하중으로 보의 끝단에서, 보 길이와 판 면에 수직인 방향으로 작용한다. Euler-Bernoulli 보⁽¹⁰⁾ 이론을 사용했고, 판은 등방성이다. 면내파 (in-plane wave)는 상대적으로 높은 주파수에서만 나타나며 그 모드의 숫자도 이 연구에서 고려된 판의 굽힘 모드(flexural motion)에 비해 매우 적으므로 고려하지 않았다. 보는 무한대의 비틀림강성을 가지는 것으로 가정하였는데, 주어진 하중조건에서, 면내파와 보 비틀림 거동은 에너지 전달 측면에서 그 영향도가 적을 것으로 판단된다.

웨이브 모형과 시험은 입력 파워(power input) 및 부계의 에너지 비(energy ratio)를 계산하는 것으로 비교하였으며, 웨이브 모형을 구성하는데 사용되었던 가정-즉 판의 파수가 보의 파수보다 충분히

크다-을 시험적으로 검증하였다.

2. 고강성 보와 유연한 판의 연성해석을 위한 웨이브 법

먼저 하나의 보가 판에 연성되는 경우에 대하여 근사적 웨이브 모형을 구성한다. 이 웨이브 모형은 좀더 복잡한 두개의 보 구조물로 발전할 수 있다.

2.1 연성계의 일반 분산식과 판 임피던스
연성되기 전 주파수 ω 에서 조화 거동을 가정하면, 외력이 없는 보의 거동은 다음과 같다(무감쇠)⁽¹⁰⁾.

$$D_b \frac{d^4 \bar{w}_b(x)}{dx^4} - m'_b \omega^2 \bar{w}_b(x) = 0 \quad (1)$$

여기서 \bar{w}_b 는 보 진동의 복소변위, D_b 는 굽힘강성, m'_b 는 단위길이당 질량이다. 연성되지 않은 길이가 무한한 보(이하 무한 보)에서 굽힘 전달파(propagating harmonic flexural wave)의 파수는 $k_b^4 = (m'_b/D_b)\omega^2$ 이다.

외력과 감쇠가 없는 판의 지배방정식은⁽¹¹⁾

$$D_p \left(\frac{\partial^4 \bar{w}_p(x,y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{w}_p(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}_p(x,y)}{\partial y^4} \right) - m''_p \omega^2 \bar{w}_p(x,y) = 0 \quad (2)$$

여기서 D_p 는 판의 굽힘 강성, m''_p 는 단위면적당 질량이며, 판의 굽힘파 파수는 $k_p^4 = m''_p \omega^2 / D_p$ 로 계산된다.

이제 Fig. 1과 같이 너비 L_y 를 가지는 무한히 긴 판과 무한 보가 $y = 0$ 에서 선결합(line coupling)하는 경우를 고려해 보자. 단위길이당 하중 $\bar{f}_1(x)$ 가

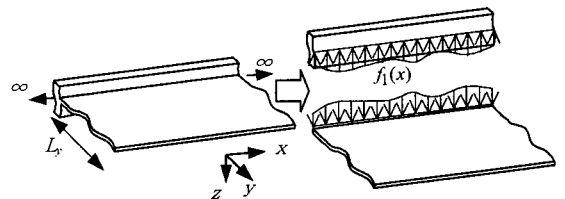


Fig. 1 A coupled structure consisting of an infinite beam attached to a finite width plate

두 부계사이에 작용하므로

$$D_b \frac{d^4 \tilde{w}_b}{dx^4} - m'_b \omega^2 \tilde{w}_b = -\tilde{f}_1(x) \quad (3)$$

만약 파수 k_x 에 대하여 연성된 보의 파 거동이 $\tilde{w}_b = \tilde{A}e^{-ik_x x}$ 이라면 파수의 trace matching에 의해 판의 응답은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{w}_p = (\tilde{B}e^{-ik_y y} + \tilde{C}e^{-k_c y} + \beta_y \tilde{r} \tilde{B}e^{ik_y y} + \tilde{D}e^{k_c(y-L_y)})e^{-ik_x x} \quad (4)$$

여기서, $\beta_y = e^{-ik_x 2L_y}$ 는 길이 $2L_y$ 동안의 위상의 변화, \tilde{r} 은 판 모서리 $y=L_y$ 에서의 반사계수, \tilde{D} 는 이 모서리에서 생기는 근접장 파의 진폭이다. 보가 외력에 의해 가진될 때 보에 수직한 방향으로 전파되는 판의 전달파 (propagating wave)와 근접장 파 (nearfield wave)의 파수는 각각 $k_y = \sqrt{k_p^2 - k_x^2}$ 와 $k_c = \sqrt{k_p^2 + k_x^2}$ 이다⁽¹²⁾.

판이 보에 연성될 때의 경계조건은 다음과 같다.

- (1) 연속방정식: 결합부에서 보와 판의 변위는 같다.
- (2) 판의 sliding 조건: 보의 비틀림강성은 무한대이다.
- (3) 힘의 평형: 판에 작용하는 힘과 보에 작용하는 힘은 크기가 같고 반대방향이다.

연성된 보에 작용하는 판 임피던스(plate impedance)를 위의 경계조건을 이용하여 얻을 수 있다. 보가 모서리 $y=0$ 에서 결합되므로 반대편 모서리에서의 근접장 영향은 무시할 만하다($\tilde{D}e^{-k_c L_y} \approx 0$). 보에서의 전달파와 관계되는 판의 선 임피던스(line impedance, 보 방향의 단위길이당 임피던스)는⁽¹²⁾

$$\tilde{Z}'_p = \frac{\tilde{f}_1(x)}{i\omega \tilde{A}e^{-ik_x x}} = \frac{D_p}{\omega} \left[\frac{k_y k_c (1 - \beta_y \tilde{r}) 2k_p^2}{k_c (1 + \beta_y \tilde{r}) - ik_y (1 - \beta_y \tilde{r})} \right] \quad (5)$$

이제 연성된 구조물에 대한 파의 일반 분산식 (general dispersion equation)은 식 (3)과 (5)로부터⁽⁵⁾

$$D_b k_x^4 = m'_b \omega^2 - i\omega \tilde{Z}'_p \quad (6)$$

식 (5)가 감쇠 (실수부)와 질량 (허수부) 특성을 가지는 항들을 포함하는 것에 주목할 필요가 있다. 비감쇠상태였던 판은 연성된 보에 감쇠와 질량효과를 주며, 보의 파수 k_x 는 복소값이 된다.

k_y, k_c, k_x 는 식 (6)으로부터 반복적(iteration)으로 구해야 한다. 만약 판의 파수가 보의 그것보다 충분히 크면 ($k_p \gg k_x$), $k_y \approx k_p, k_c \approx k_p$ 이고 판의 선 임피던스는 더 간단하게 표현될 수 있다. 구조감쇠를 가진 판의 강성은 $\tilde{D}_p = D_p(1 + i\eta_p)$ 이고, 이때 구조감쇠 계수(damping ratio)가 1보다 충분히 작다면 판의 파수는 $\tilde{k}_p \approx k_p(1 - i\eta_p/4)$ 로 된다. 이제 식 (5)는

$$\tilde{Z}'_p \approx \frac{2\tilde{D}_p \tilde{k}_p^3}{\omega} \left[\frac{1 - \tilde{\beta}_y \tilde{r}}{(1 + \tilde{\beta}_y \tilde{r}) - i(1 - \tilde{\beta}_y \tilde{r})} \right] \quad (7)$$

$\tilde{\beta}_y = e^{-i\tilde{k}_x 2L_y}$ 는 판 전달파의 파 감쇠계수(wave attenuation coefficient)인데, 위상 변화와 감쇠를 나타낸다. 결합부 반대편 모서리가 단순지지상태라면 \tilde{r} 은 -1이고 sliding조건이라면 +1이다. 판과 마찬가지로 보에 대해서도 구조감쇠를 적용할 수 있다.

물리적으로 식 (7)은 만약 보의 전달파 파장이 판의 그것에 비해 충분히 길다면, 판에서의 파는 보에 대해 거의 수직한 방향으로 전파된다는 것을 의미한다. 즉, 판은 일련의 분리된 긴조각(strip)처럼 거동한다. 이 판 임피던스는 근사값이지만, 자유거동 판의 파수가 연성된 보의 파수보다 두배이상 크면 참값에 가까운 것으로 알려져 있다⁽¹²⁾. 연성된 보의 근접장 파수도 전달파의 파수와 같은것으로 가정하였다. 엄밀히 연성된 보의 전달파와 근접장 파수는 다를 것으로 예상되나⁽¹²⁾, 이 논문에서는 같다고 가정하였으며, 이에 따른 수치해석 결과는 시험 결과와 일치하는 것을 보인다.

2.2 수치해석 결과

웨이브 법을 이용하여, 무한 보와 유한한 너비의 무한히 긴 판이 연성된 경우에 대한 수치해석 결과를 보인다. 이 계는 아크릴 수지인 perspex로 만들어 진다고 가정하였으며, 관련 물성치는 Table 1에 나타내었다 ($\eta_b = \eta_p = 0.05$). 판은 보 단면의 중심에 위치하여, 보 중립축은 보의 중앙이 된다. 연성되지 않

은 판과 보의 파수 비(k_p/k_b)는 3.19로 판의 근사임피던스를 사용하기에 충분하다. 해석 주파수 범위는 5.6~1,412 Hz로 1/3옥타브 밴드의 6.3~1,250 Hz를 포함하며 log간격으로 457개 data를 사용하였다.

일반 분산식 (6)과 판의 근사 임피던스 식 (7)을 이용하여 연성된 보와 판의 파수를 구할 수 있다. 이때 파수 k_x 가 커져서 단순 반복법⁽⁵⁾을 사용하는 기존

Table 1 Material properties and dimensions of the coupled system of an infinite beam and a finite width plate

Material	Perspex	Height of beam, h (mm)	22.0
Young's modulus, E (GNm ⁻²)	4.4	Beam width, b (mm)	6.0
Poisson's ratio, ν	0.38	Plate width, L_y (m)	0.375
Density, ρ (kgm ⁻³)	1152.0	Plate thickness, t_p (mm)	2.0

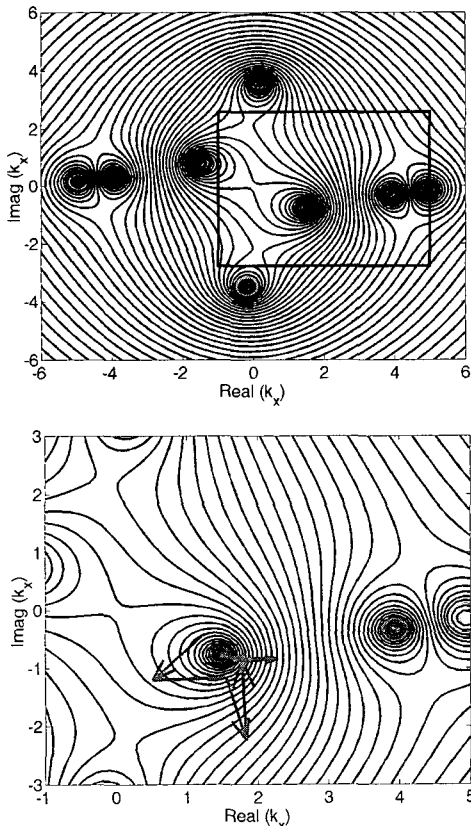


Fig. 2 Complex domain contours and root-tracing calculated by Muller's method

웨이브 법으로 수렴이 안되는 주파수에서는 Muller 법⁽⁹⁾을 사용하였다. Fig. 2는 복소평면에서 Muller 법을 이용하여 근을 찾아가는 과정을 보여준다.

보 반대편 판 모서리의 경계조건이 각각 단순지지, sliding 조건으로 주어질 때, 수치해석에 의해 구해진 판의 근사 임피던스를 Fig. 3에 나타내었다. 또한 연성계에 대한 입력점 모빌리티(point mobility)를 Fig. 4에 나타내었다. 판 임피던스 피크 주파수에서 입력점 모빌리티는 골이 되는 것을 알 수 있다. 따라서 판의 반공진 주파수에서 연성된 보의 진동은 줄어들며, 이는 판의 제진효과(blocking effect)로 알려져 있다⁽⁵⁾.

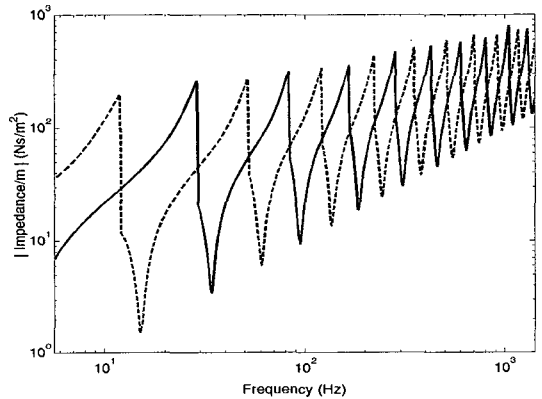


Fig. 3 Approximate line impedance \bar{Z}'_p of the finite plate. —, pinned condition; ---, sliding condition on the edge opposite to the beam

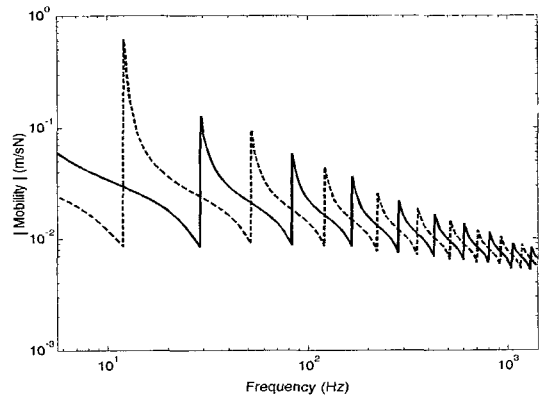


Fig. 4 Point mobility of the coupled structure (point force applied at $x = 0$). —, pinned condition; ---, sliding condition on the plate edge opposite to the beam

3. 유한길이의 보와 직사각형 판으로 구성된 연성계에 대한 웨이브 모형

무한 보와 유한한 너비의 판이 연성되는 계의 일반관계식, 식 (6)은 유한한 길이를 가지는 구조물에 대하여도 동일하게 적용된다. 주파수 ω 에서 유한 보의 거동은

$$\tilde{w}_b = \tilde{A}_1 e^{-ik_x x} + \tilde{A}_2 e^{-\tilde{k}_{yf} x} + \tilde{A}_3 e^{ik_x x} + \tilde{A}_4 e^{\tilde{k}_{yf} x} \quad (8)$$

\tilde{A}_1 와 \tilde{A}_3 은 전달파의 진폭이고 \tilde{A}_2 와 \tilde{A}_4 는 근접장 파의 진폭이다. \tilde{k}_x 와 \tilde{k}_{yf} 는 각각 전달파와 근접장 파의 파수이다.

보(길이 L_x)의 끝단 $x=0$ 에서 점하중 \tilde{F}_0 를 주면, \tilde{A}_4 는 양단의 경계조건으로부터 계산이 가능하므로, 임의 위치에 대한 전달 모빌리티(transfer mobility)는

$$\tilde{Y}_b(x) = \frac{i\omega \tilde{w}_b(x)}{\tilde{F}_0} = \frac{\omega}{\tilde{D}_b} \frac{\tilde{A}_1 e^{-ik_x x} + \tilde{A}_2 e^{-\tilde{k}_{yf} x} + \tilde{A}_3 e^{ik_x x} + \tilde{A}_4 e^{\tilde{k}_{yf} x}}{\tilde{k}_x^3 \tilde{A}_1 + i\tilde{k}_{yf}^3 \tilde{A}_2 - \tilde{k}_x^3 \tilde{A}_3 - i\tilde{k}_{yf}^3 \tilde{A}_4} \quad (9)$$

이때 판의 응답은 식 (4)와 같으며, 그 계수는 판 $y=0$ 와 $y=L_y$ 에서의 경계조건으로부터 구해진다. 판 응답은 보에서 발생하는 모든 파와 이에 해당하는 판의 해당 선 임피던스를 필요로 한다.

4. 대칭구조를 가지는 보-판-보 연성계의 웨이브 모형

4.1 비대칭 구조물을 이용한 합성법

하나의 보와 판으로 구성된 연성계의 웨이브 모형은 대칭구조물인 보-판-보 계로 확장될 수 있다 (Fig. 5). 두 평행한 보에 작용하는 판 임피던스는 동일한 것으로 가정한다. 앞에서 계산된 근사적인 판 임피던스가 사용되며, 보의 전달파에 근거하여 모형을 구성한다. 외부 가진을 받는 보를 보1(b_1), 가진이 없는 그 반대편의 보를 보2(b_2)라고 하자.

점하중이 보의 한쪽 끝단에 적용되고, 보 양단에는 임의의 경계조건을 적용하자. 판의 모서리 ($x=0$, $x=L_x$)에는 구속조건이 적용되지 않았지만

실제로는 보의 강성 때문에 거의 보의 경계조건을 따르게 된다. 이것은 위에 언급한 바와 같이 판의 거동이 마치 독립된 조각(strip)처럼 거동하기 때문이다.

판의 파가 중앙선 $y=L_y/2$ 에서의 가상의 단순지지에 의해 반사되는 경우(pin)와 sliding조건에서 반사되는 경우(sld)를 고려하자. 보-판-보 연성계의 거동은 이 두 개 파의 합, 즉 대칭, 반대칭 (symmetric and antisymmetric) 응답의 합으로부터 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{sym}(y) &= [\tilde{Y}_{sld}(y) + \tilde{Y}_{pin}(y)]/2, \quad 0 \leq y \leq L_y/2 \\ \tilde{Y}_{sum}(y) &= [\tilde{Y}_{sld}(L_y - y) - \tilde{Y}_{pin}(L_y - y)]/2, \quad L_y/2 < y \leq L_y \end{aligned} \quad (10)$$

마찬가지로 보에서 판으로의 작용 힘은 보의 전달 모빌리티와 근사 판 임피던스를 이용하여 구할 수 있으며, 보1에 대하여 다음과 같이 계산한다.

$$\tilde{f}_i(x) = \frac{\tilde{F}_0}{2} (\tilde{Y}_{b1,pin}(x) \tilde{Z}'_{p,pin} + \tilde{Y}_{b1,sld}(x) \tilde{Z}'_{p,sld}) \quad (11)$$

이 합성법은 FEM 등에서 일반적으로 사용되지만⁽²⁾, 판 임피던스와 이에 의한 보의 파수는 엄밀히 말해서 대칭, 반대칭 모형에 대하여 다를 것이다. 따라서 웨이브 모형에 의한 이 합성법은 엄밀히 말해서 근사적인 방법이다.

4.2 수치해석

웨이브 법을 이용하여 동일한 두개의 보와 직사각형 판으로 구성된 연성계(Fig. 5)의 수치 해석 결과를 보인다. 보의 길이 L_x 는 1.0m이고 판의 너비 L_y 는 0.75 m이다(기타 물성치와 규격은 Table 1

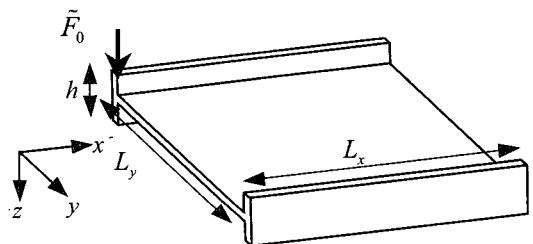


Fig. 5 A coupled structure consisting of two finite beams attached to a plate

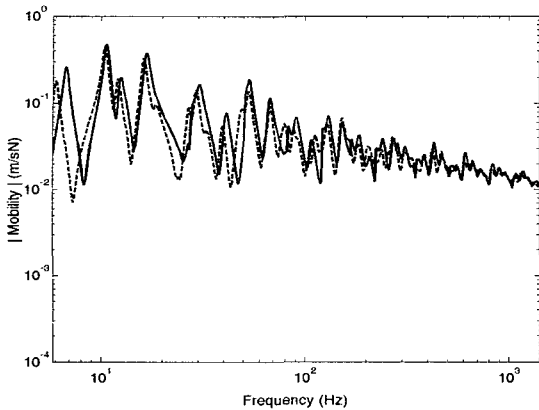


Fig. 6 Point mobility of the symmetric beam-plate-beam coupled structure (point force applied at $x = 0$ of beam 1). —, wave method; ---, FEM

참조). 보양단은 sliding 조건으로 하였다.

관심 주파수 영역에서, 비연성 상태의 보 는 8개의 굽힘 모드 (첫 번째 공진 주파수는 19.6 Hz)를 가지며, 판은 약 500개의 모드를 가진다(모드 밀도는 주파수당 약 0.4, 모드 중첩 계수(modal overlap)는 50 Hz에서 1 이상). 즉, 이 관심 주파수 영역에서 보 자체는 저주파수 거동을 보이는 한편, 판은 약 50 Hz 이상에서 고주파 거동을 보인다. 따라서 이 연성계는 넓은 영역의 '중주파수 거동'을 가진다.

식 (9)를 이용하여, 유한 보의 모빌리티를 반대편 모서리가 단순지지와 sliding조건인 경우에 대해 각각 구하였다. 이들 두 응답을 이용하여, 동일한 두개의 보가 직사각형 판에 연성된 구조물의 응답을 식 (10)으로부터 구할 수 있으며, 입력점 모빌리티를 Fig. 6에 나타내었다. 이를 FEM에 의한 결과와 비교하면 근사한 값을 보임을 알 수 있다.

5. 시험에 의한 웨이브 모형의 검증

해석 모형을 검증하기 위해 시험을 수행하였다. 먼저 입력 파워⁽¹²⁾를 수치 해석결과와 비교하였다. 또한, 경계조건의 차이를 최소화하기 위해, 측정된 결과를 운동에너지로 계산하여 각 부계에 대한 에너지 비를 해석 모형과 비교하였다. 중고주파수 대역에서의 해석에서, 고유진동수 등의 미시적인 거동은 관심 대상이 아니기 때문에 결과들은 1/3옥타브 평균 위주로 비교하였다.

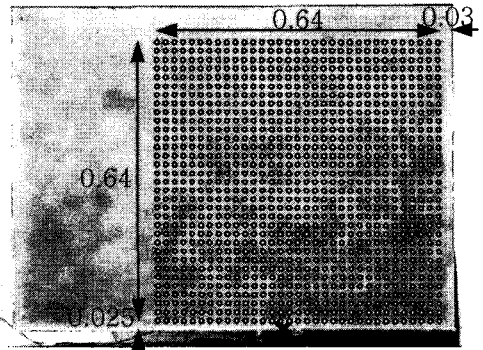


Fig. 7 Configuration for the wavenumber measurement in two-beam coupled structure. The symbol on beam 1 indicates the excitation point ($x = 0.36$ m from the right-hand end of beam 1)

5.1 시험 방법

직사각형 판과 두개의 보로 구성된 연성계는 아크릴수지로 만들어졌다. 판의 두께는 2 mm이고 크기는 1.0×0.75 m이다. 너비 6 mm의 보가 판의 위아래로 단단히 접촉되어서 보를 구성한다. 두 보 는 동일한 것으로 간주할 수 있다(Fig. 7 참조).

판 위의 많은 응답점을 측정하기 위해 laser 진동 측정기(laser vibrometer, Polytec PSV 300)를 사용하였고, 가진기로 보를 가진하였다. 구조물의 설계 치수는 Table 1과 같으나, 좀더 나은 결과를 얻기 위해 micrometer를 이용하여 정확한 치수를 측정하였다($k_p/k_x = 3.5$). 질량, 밀도, Young's modulus 역시 시험으로부터 추정하였으며, 구조감쇠 계수도 half-power bandwidth technique를 이용하여 측정한 후 적용하였다.

시험 구조물의 보 는 자유경계조건이고 판의 해당 모서리도 역시 실제로 자유경계조건이다. 이것은 웨이브 모형과 동일하다. 그러나 수치 모형에서 보의 비틀림은 구속되는데 이것은 시험과는 다르다.

5.2 보와 판의 파수 추정

웨이브 모형의 구성에 있어 판의 파수가 보의 그것보다 충분히 크다는 것은 중요한 가정이다. 먼저, 판과 보의 파수를 측정하기 위해 Fig. 7과 같이 넓은 면적에서 전달 모빌리티를 측정하였다(측정점수는 33×33).

판의 파수 계산은 측정된 모빌리티와 전달파 식을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{Y}(k_x, k_y, \omega) = \frac{\left| \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \tilde{Y}(x_m, y_n, \omega) e^{-ik_x x_m} e^{-ik_y y_n} \right|^2}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left| \tilde{Y}(x_m, y_n, \omega) \right|^2 MN} \quad (12)$$

여기서 \tilde{Y} 은 측정된 모빌리티와 수식적으로 가정된 전달파($e^{-ik_x x_m} e^{-ik_y y_n}$)의 상관함수(correlation function)로써, 거동에 지배적인 파수일수록 1에 가까운 결과를 보인다. \tilde{Y} 는 측정점 x_m, y_n 에서 전달 모빌리티, M, N 은 각 방향의 측정점 수, k_x, k_y 는 임의의 파수이다. \tilde{Y} 는 엄밀히 continuous function이어야 하나, 실제로는 식 (12)와 같이 이산적으로 측정된(discretely sampled) 결과를 이용하게 된다.

시험 결과 중에서 172 Hz에서 측정된 모빌리티를 Fig. 8에 예로 나타내었다. 가로와 세로 방향이 시험 구조물의 해당 방향과 일치한다. 보에 수직인 방향의 파장이 보 방향의 파장보다 훨씬 짧은 것을 볼 수 있으며, 보의 노드 선(node line)이 판 전체에 반영되는 것을 알 수 있다. 따라서 가로방향의 판의 거동은 보의 거동에 지배를 받는 것을 알 수 있다.

측정된 모빌리티를 식 (12)에 적용하여 구조물 거동에 지배적인 실제 파수를 도출하였으며, 그 결과를 이론적으로 구한 파수와 함께 Fig. 9에 나타내었다. 시험으로 구한 판의 자유거동 파수 ($k_p = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$)와 y 방향 파수 (k_y)가 거의 근접한 것을 볼 수 있으며, 이론으로 구한 파수와도 잘 일치하는 것을 볼 수

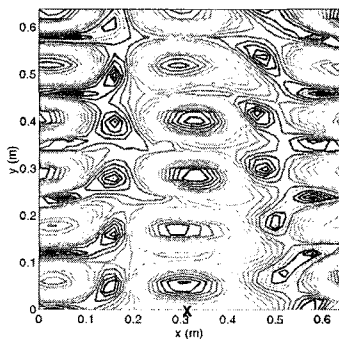


Fig. 8 Contour of mobility amplitudes at 172 Hz. The symbol on the x axis indicates the excitation point

있다. 보 방향의 파수 k_x 를 k_p 와 비교하면, 웨이브 모형의 가정($k_p \gg k_x$)은 성립한다고 할 수 있다

5.3 입력 파워와 에너지 비

이 절에서는 웨이브 모형의 타당성을 입력 파워와 에너지 비를 이용하여 검토하였다. 시험에서 각 부계의 에너지를 계산하기 위해, 위의 5.2절에 보인 시험과는 별도로 판과 보에서 무작위로 측정점을 선정하였다(각각 20, 10점). 시간평균된 운동에너지와 변형

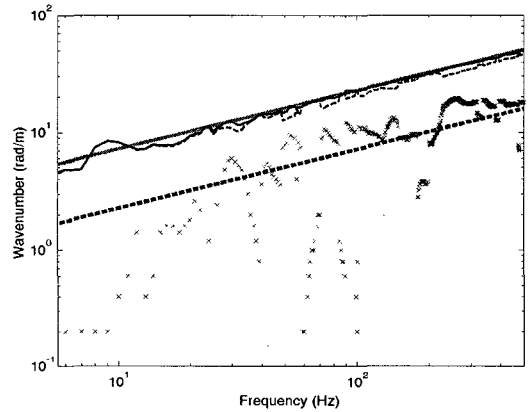


Fig. 9 Wavenumber comparison of the two-beam-plate system. —, k_p ; ---, k_y ; ···, k_x ; —·—, k_p by theory; ·····, k_b by theory

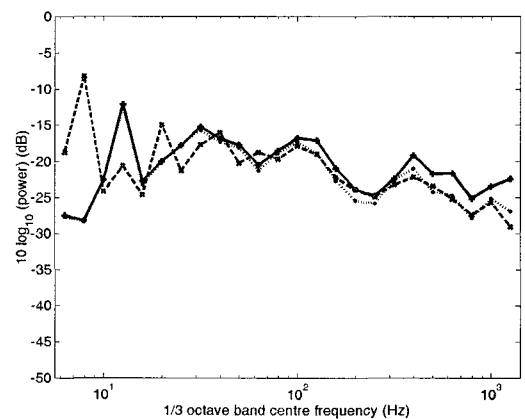


Fig. 10 Input power for a unit force in one-third octave bands for the beam-plate-beam system (dB re 1 W/N 2). —+—, wave method without mass effect; ·····, wave method with mass effect; —x—, experiment

에너지는 일반적으로 같다고 가정할 수 있으므로, 측정된 모빌리티를 공간에 대해 평균함으로써 각 부계에서의 에너지를 계산할 수 있다. 입력 파워는 입력점 모빌리티로부터 계산할 수 있다.

입력 파워를 먼저 1/3옥타브 밴드로 Fig. 10에 나타내었다.

수치 모형과 시험사이에 고주파수 대역에서 레벨차를 발견할 수 있으며, 이것은 힘센서의 질량(14 g) 때문이다. 질량이 고려된 입력 파워는 다음 식과 같이 보 길의 방향에 수직인 하중에 대한 임피던스와 센서질량을 이용하여 보정할 수 있다.

$$\operatorname{Re}\{\tilde{Y}_{b1+mass}\} = \operatorname{Re}\{\tilde{Z}_{b1}\} / \left[\left(\operatorname{Re}\{\tilde{Z}_{b1}\} \right)^2 + \left(\operatorname{Im}\{\tilde{Z}_{b1}\} + \omega m \right)^2 \right] \quad (13)$$

식 (13)에 의한 입력 파워 역시 같은 그림에 나타내었는데 저주파수대역을 제외하고 시험과 잘 일치함을 알 수 있다.

각 부계간의 에너지 비(energy ratio)를 비교하였다. 이것은 경계조건의 영향을 줄여주고, 힘센서의 질량효과를 없애주는 이점이 있다.

각 부계사이의 에너지 비를 협대적 주파수와 1/3 옥타브 평균으로 각각 Fig. 11과 12에 나타내었다. 굵은선은 판과 보1의 에너지 비이며, 얇은선은 두 보사이의 그것이다. 시험 결과와 비교하면, 웨이브 법이 근사적인 방법임에도, 이론 계산치와 시험 결과가 저주파 대역을 제외하고 아주 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 그림의 결과는 근사화된 판 임피던스가 사용되고 따라서 판이 strip처럼 거동한다는 가정은 저주파 대역에서 합리적이지 않다는 것을 보여준다.

에너지 비, E_{plate}/E_{beam1} 와 E_{beam2}/E_{beam1} 를 비교하면, 판으로 전달된 에너지의 대부분이 보를 연결하는 판에서 소진되고, 보2로 전달되는 에너지는 작은 것을 알 수 있다. 다만, 가진된 보에 비해 보2의 에너지는 약 5 dB정도 적은 것에 불과하다. 따라서 비록 대부분의 에너지가 판에서 소진되긴 하지만, 이 두 보사이의 결합이 상당히 강한 상태임을 알 수 있다.

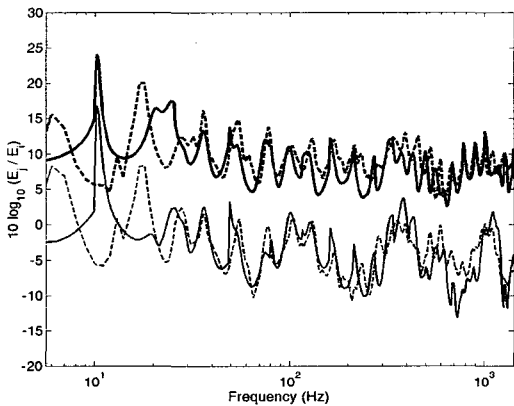


Fig. 11 Energy ratio for the two-beam-plate system. Thick lines, E_{plate}/E_{beam1} thin lines, E_{beam2}/E_{beam1} . —, wave method; ---, experiment

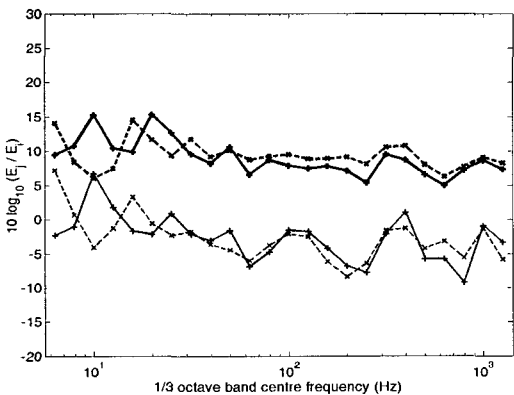


Fig. 12 Energy ratio in one-third octave bands for the two-beam-plate. Thick lines, E_{plate}/E_{beam1} thin lines, E_{beam2}/E_{beam1} . —+, wave method; —x—, experiment

6. 결 론

근사적인 웨이브 법을 이용하여 두 개의 보와 직사각형 판으로 구성된 연성계의 모형화를 시도하였다. 기존에 제안된 단순반복법 대신 Muller 법을 일반 분산식에 적용하여 개선된 결과를 얻을 수 있다. 대칭적인 보-판-보 구조물의 응답은, 원래 폭의 1/2에 해당하는 판에 연성된 보의 대칭과 반대칭 거동을 합성하여 구할 수 있다.

웨이브 법의 가장 중요한 가정은 연성된 보의 파수가 자유거동하는 판의 파수에 비해 충분히 작아서, 보-판 결합부에서 발생하는 파가 보에 거의 수직인 방향을 가지고 판으로 전파된다는 것이다.

위의 가정을 이용하여 하나의 판과 보가 연성된

계의 근사적인 판 임피던스를 구하였다. 만약 두 보에 작용하는 판 임피던스가 동일하다면, 하나의 보-판 연성계에서의 판 임피던스와 보의 파수를 그대로 두개의 보와 직사각형 판 구조물에 이용할 수 있다. 위와 같은 가정으로 인하여, 엄밀히 웨이브 법은 근사적인 방법이지만, 오차는 저주파 대역을 제외하면 무시할 만하고 웨이브 법은 중주파수 대역의 해석에 효과적인 것으로 보인다.

전달 모빌리티를 이용한 상관함수를 계산하여 판에서의 지배적인 파의 파수를 추출하였으며, 그 결과는 이론으로 구한 파수와 잘 일치한다. 또한 판의 자유거동 파수가 보의 파수보다 충분히 크다는 것을 입증하였다.

수치해석 모형의 에너지 비와 입력 파워를 시험 결과와 비교하였는데, 에너지 비는 모형과 시험간의 경계조건 차이를 줄이기 위해 사용되었다. 웨이브 모형이 시험을 잘 모사하는 것을 확인하였다. 전체적인 레벨은 약 50 Hz 이상에서 잘 일치하며, 이 대역에서 판은 높은 모드 중첩 계수를 가진다.

참 고 문 헌

- (1) Castanier, M. P. and Pierre, C., 2003, "Mid-frequency Vibration Analysis of Complex Structures: State of the Art and Future Directions", 10th International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, Sweden, pp. 1123~1130.
- (2) Petyt, M., 1990, Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.
- (3) Lyon, R. H. and DeJong, R. G., 1995, Theory and Application of Statistical Energy Analysis, Butterworth-Heinemann, Boston.
- (4) Choi, J.-S., Kil, H.-S. and Hong, S.-Y., 2001, "Power Flow Analysis of Vibration of Coupled Plates Excited by a Point Force in an Arbitrary Direction", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 11, No. 6, pp. 181~192.
- (5) Grice, R. M. and Pinnington, R. J., 1999, "A Method for the Vibrational Analysis of Built-up Structures, part 1: Introduction and analytical Analysis of the Plate-stiffened Beam", Journal of Sound and Vibration, 230, pp. 825~849.
- (6) Soize, C. and Bjaoui, K., 2000, "Estimation of Fuzzy Parameters for Continuous Junctions", Journal of the Acoustical Society of America, 107, pp. 2011~2020.
- (7) Ji, L., Mace, B. R. and Pinnington, R. J., "A Mode-based Approach for the Mid-frequency Vibration Analysis of Coupled Long- and Short-wavelength Structures", Journal of Sound and Vibration (in press).
- (8) Langley, R. S. and Bremner, P., 1999, "A Hybrid Method for the Vibration Analysis of Complex Structural-acoustic Systems", Journal of Acoustical Society of America 105, pp. 1657~1671.
- (9) Gerald, C. F., 1977, Applied Numerical Analysis, San Luis Obispo.
- (10) Warburton, G. B., 1976, The Dynamical Behaviour of Structures, Second edition, Pergamon Press, Oxford.
- (11) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., 1959, Theory of Plates and Shells, Second edition, McGraw-Hill, New York.
- (12) Yoo, J. W., 2006, Ph.D. Thesis, University of Southampton.