

# 이산시스템에서 시간지연을 갖는 시변 상태 지연 섭동의 안정 범위에 관한 연구

## Stability Bounds of Delayed Time-varying Perturbations of Discrete Systems

한 형 석\*, 이 달 호

(Hyung Seok Han and Dal Ho Lee)

**Abstract :** The stability robustness problem of linear discrete-time systems with delayed time-varying perturbations is considered. Compared with continuous time system, little effort has been made for the discrete time system in this area. In the previous results, the bounds were derived for the case of non-delayed perturbations. There are few results for delayed perturbation. Although the results are for the delayed perturbation, they considered only the time-invariant perturbations. In this paper, the sufficient conditions for stability can be expressed as linear matrix inequalities(LMIs). The corresponding stability bounds are determined by LMI(Linear Matrix Inequality)-based algorithms. Numerical examples are given to compare with the previous results and show the effectiveness of the proposed results.

**Keywords :** robust stability, discrete-time system, time-delayed perturbation, linear matrix inequality

### I. 서론

시간지연은 실제 시스템에 많이 나타나는 현상으로 동적 시스템에서는 자연적으로 발생하게 되는 것으로 알려져 있다. 이러한 시간지연에 대한 원인과 이로 인한 여러 가지 문제점에 대한 검토가 활발하게 이루어 지고 있다[1,2]. 특별히 시간지연(time-delayed) 섭동(perturbation)은 시스템을 불안정하게 만들 수 있으며, 또한 진동과 시스템 성능을 저하시킬 수 있다. 최근에는 이러한 시간지연 섭동에 대한 연구가 많이 진행되어 왔다[3-15]. 이러한 연구들은 연속시간계와 이산시간계의 결과들로 분류될 수 있으며, 또한 섭동의 성질에 따라서 시변과 시불변 섭동, 그리고 시간 지연의 특성에 따라 시변 지연과 시불변 지연등으로 구분할 수 있다.

연속시간계에서의 연구[3-8]에서는 시변 섭동에 대하여 고려되었고, 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality: LMI)을 이용하는 방법[3], 라이프노프 방법(Lyapunov Direct Method)을 이용한 방법[4]이 최근에 발표되었으나, 주로 기준 시스템(nominal system)에 대한 라이프노프 방정식(Lyapunov equation)의 해를 이용하여 섭동의 안정 범위를 구하는 방법[5-8]이 사용되었다. 특히, [3]에서는 시변 섭동에 대한 안정 범위를 선형행렬부등식을 제한조건으로 갖는 일반화된 고유치 문제(Generalized Eigenvalue Problem: GEVP)로 고려하여 비구조화된 섭동과 다중 시변 섭동(multiple time-varying perturbation)에 대한 안정조건과 안정범위를 제안하였다. 이 결과는 기존의 결과[5-8]보다 좋은 안정범위를 제공한다. 이러한 연속시간계에서의 결과에 반하여 이산시간계에서의 결과는 상대적으로 드물게 발표되었다. 이산시간계에서의 연구는 대부분 시불변 섭동에 대하여 이루어졌으며[9-14],

극점(pole)의 위치를 이용하는 방법[9-11], 특히 섭동(singularly perturbed)시스템에 대하여 연구[12,13]되거나 리카티 유형 방정식(Riccati-type equation)을 이용한 방법[14], 선형행렬부등식의 해를 이용한 방법[15]을 중심으로 이루어졌다. 특히, [15]에서는 다른 결과들과는 다르게 섭동의 지연 시간이 시변인 경우를 고려하여 안정성에 대한 충분조건을 선형행렬부등식의 형태로 유도하였다. 이러한 시간지연 섭동에 대한 연구는 기존의 시간지연이 없는 섭동의 견실 안정 범위를 구하는 문제와 유사한 방식으로 진행될 수 있다. 이산시간에서의 시간지연이 없는 섭동에 대한 결과들은 이미 많이 발표되었다[16-21]. Halicka와 Rosinová[16]는 시간지연이 없는 섭동의 다양한 안정범위들[17-20]을 해석적으로 비교하였다. 최근의 결과인 [21]에서는 선형행렬부등식(LMI)제한 조건을 갖는 일반화된 고유치 문제(GEVP)를 이용하여 시변 섭동의 크기를 구하였다. 이 논문에서 제안된 섭동의 크기는 [16]에 정리된 기존의 결과보다 더 크게 계산됨을 알 수 있다.

본 논문에서는 크기가 제한된 비 구조화 시변 섭동의 안정범위를 시불변 시간지연인 경우에 대하여 최적화 기법을 이용하여 계산하는 방법을 제시한다. 본 논문의 결과는 이전의 결과들이 시불변 섭동에 대하여 얻어진 것에 비해 더욱 확장된 결과로 고려될 수 있다. 즉, 본 논문에서 고려하는 섭동의 성질은 지연 시간에 대한 성질 측면에서는 시불변으로[14]에서의 성질과 동일하며, 섭동 자체의 성질은 시변으로[9-15]에서 고려한 시불변 섭동에 비하여 더욱 일반적인 형태이다. [14,15]에서는 섭동에 대한 안정조건만을 제시하였으나, 본 논문에서는 안정조건과 함께 안정을 유지할 수 있는 섭동의 크기를 구하는 방법을 제시한다. 제안된 섭동의 안정범위는 선형행렬부등식을 조건으로 갖는 일반 고유치 문제로 표현되며, 이러한 형태의 문제는 MATLAB의 LMI TOOLBOX를 사용하여 용이하게 구현할 수 있다. 본 논문에서의 결과는 연속시간계에서의 결과[3]를 이산시간계

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2006. 8. 23., 채택확정 : 2007. 1. 4.

한형석, 이달호 : 경원대학교 전자전기정보공학부

(hshan@kyungwon.ac.kr/dhlee@kyungwon.ac.kr)

※ 이 연구는 2006년도 경원대학교 지원에 의한 결과임.

로 확장한 것으로 고려될 수 있으며, 또한 [21]의 결과를 시간 지연 섭동으로의 확장한 결과로 볼 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 시간지연이 있는 시변 섭동에 대한 안정조건을 유도하고 이에 따른 섭동의 안정범위를 구하는 알고리즘을 설명한다. 3장에서는 수치 예제를 통하여 제안된 알고리즘의 구현과 효율성을 MATLAB LMI Toolbox를 이용하여 확인한다.

II. 비 구조화된 시간지연 시변 섭동의 안정범위

본 장에서는 시불변 시간지연이 있는 시변 섭동을 포함한 이산시스템의 안정조건을 유도하고, 이를 선형행렬부등식을 조건으로 갖는 일반화된 고유치문제로 고려하여 비구조화된 섭동의 안정범위를 찾아내는 방법을 설명한다. 이들 결과는 다음의 보조정리와 정의를 이용하여 유도된다.

보조정리 1 [22]: 행렬  $A$  와  $C$  가 정방(square)일 때, 블록

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix}$$

가 음의 정칙행렬이 되기 위한 필요충분 조건

은  $C < 0$  이고  $A < B^T C^{-1} B$  이다.

보조정리 2 [21]: 행렬  $X$  가 정방이면, 임의의 양수  $\mu$  에

대하여,  $\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{pmatrix} - \mu I < 0$  와  $\|X\| < \mu$  는 동등하다.

정의 1 [23]: 일반화된 고유치 문제는 LMI 제한 조건을 만족하는 변수에 종속된 두 행렬의 일반화된 고유치의 최대값을 최소화 하는 문제이다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \lambda \text{ subject to} \\ &C(x) > 0 \\ &B(x) > 0 \\ &A(x) < \lambda B(x) \end{aligned}$$

여기서,  $A, B$  와  $C$  은  $x$  에 대한 함수(affine function)관계를 갖는 대칭행렬들이다.

이러한 일반화된 고유치문제는 의사-볼록 최적화 문제(quasi-convex optimization problem)이다. 또한 의사-볼록 최적화 문제는 볼록 최적화(convex optimization)를 위한 임의의 수치 알고리즘을 적용하여 최적의 해를 구할 수 있다. 특히, 선형행렬부등식 문제는 MATLAB LMI-Toolbox와 같은 특별한 수치 알고리즘을 이용하면 매우 효율적으로 최적 해를 구할 수 있다[23].

일정한 시간지연을 갖는 시변 섭동 이산시스템은 (1)과 같은 상태방정식으로 표현된다.

$$x(k+1) = Ax(k) + E(k)x(k-d) \tag{1}$$

식에서,  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}, E(k) \in \mathfrak{R}^{n \times n}, x(k) \in \mathfrak{R}^n, k = 0, 1, \dots, d > 0$  인 정수이다. 본 논문에서는 기준 상태행렬  $A$  가 시불변 점근 안정(time-invariant asymptotically stable)이라고 가정한다. 시변 섭동행렬  $E(k)$  는 다음과 같이 크기가 한정된다.

$$\|E(k)\| \leq \mu \tag{2}$$

다음과 같이 리아프노프 함수를 정의한다. 여기서, 행렬  $P, R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  은 양의 정칙행렬이다.

$$V(x(k)) = x^T(k)Px(k) + \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \tag{3}$$

위의 (3)에 (1)을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} &V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x^T(k+1)Px(k+1) + \sum_{i=k+1-d}^k x^T(i)Rx(i) \\ &\quad - x^T(k)Px(k) - \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &= (Ax(k) + E(k)x(k-d))^T P(Ax(k) + E(k)x(k-d)) \\ &\quad - x^T(k)Px(k) + \sum_{i=k+1-d}^k x^T(i)Rx(i) - \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &= x^T(k)(A^T PA - P)x(k) + 2x^T(k-d)E^T(k)PAx(k) \\ &\quad + x^T(k-d)E^T(k)PE(k)x(k-d) \\ &\quad + x^T(k)Rx(k) - x^T(k-d)Rx(k-d) \end{aligned} \tag{4}$$

위의 식에서  $2x^T(k-d)E^T(k)PAx(k)$  의 처리를 다음과 같이 두 개의 부등식 (5), (6)을 이용하여 함수가 음이 될 수 있는 조건으로 유도한다.

$$\begin{aligned} &2x^T(k-d)E^T(k)PAx(k) \\ &\leq x^T(k-d)x(k-d) + x^T(k)A^T PE(k)E^T(k)PAx(k) \tag{5} \\ &\leq x^T(k-d)x(k-d) + \mu^2 x^T(k)A^T P^2 Ax(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2x^T(k-d)E^T(k)PAx(k) \\ &\leq x^T(k-d)E^T(k)E(k)x(k-d) + x^T(k)A^T P^2 Ax(k) \tag{6} \\ &\leq \mu^2 x^T(k-d)x(k-d) + x^T(k)A^T P^2 Ax(k) \end{aligned}$$

먼저, 위의 (5), (6)의 부등식 중 첫 번째로 (5)의 식을 이용한다. 위의 (4)와 (5)를 이용하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} &V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &\leq x^T(k)(A^T PA - P + R + \mu^2 A^T P^2 A)x(k) \\ &\quad + x^T(k-d)(E^T(k)PE(k) - R + I_n)x(k-d) \end{aligned} \tag{7}$$

(7)로부터 다음 정리와 같은 안정조건을 얻을 수 있다.

정리 1: 주어진 값  $\mu$  에 대하여 다음 두 개의 부등식을 동시에 만족하는 양의 정칙 행렬  $P = P^T, R = R^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  이 존재하면 (1), (2)의 시간지연 섭동이 있는 시스템은 제곱안정하다.

$$A^T PA - P + R < -\mu^2 A^T P^2 A \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} I_n - R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} < 0 \tag{9}$$

증명: (7)로부터 다음의 두 부등식을 만족하면,

$$A^T P A - P + R + \mu^2 A^T P^2 A < 0$$

$$E^T(k) P E(k) - R + I_n < 0$$

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$$

이 된다.

보조정리 1에 의해 다음을 얻는다.

$$E^T(k) P E(k) - R + I_n < 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_n - R & E^T(k) \\ E(k) & -P^{-1} \end{pmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_n - R & E^T(k) \\ E(k) & -P^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_n - R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E^T(k) \\ E(k) & 0 \end{pmatrix} < 0$$

(2)와 보조정리 2를 이용하면,

$$\begin{pmatrix} I_n - R & E^T(k) \\ E(k) & -P^{-1} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} I_n - R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

따라서, (9)를 만족하면

$$E^T(k) P E(k) - R + I_n = \begin{pmatrix} I_n - R & E^T(k) \\ E(k) & -P^{-1} \end{pmatrix} < 0$$

따라서, (8), (9)를 만족하면

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0. \quad \blacksquare$$

따름정리 1:  $0 < \mu \leq 1$ 에 대하여 다음 두 개의 부등식을 동시에 만족하는 양의 정칙 행렬  $P = P^T, R = R^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 이 존재하면 (1), (2)의 시간지연 섭동이 있는 시스템은 제곱안정하다.

$$A^T P A - P + R < -\mu A^T P^2 A \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} I_n - R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P^2 \end{pmatrix} < 0 \tag{11}$$

증명:  $0 < \mu \leq 1$ 에 대하여

$$A^T P A - P + R + \mu A^T P^2 A < 0$$

$$\Rightarrow A^T P A - P + R + \mu^2 A^T P^2 A < 0 (\because \mu^2 \leq \mu)$$

(9)에 대하여 행렬  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ 을 앞뒤로 곱하여도 부등식은

변하지 않는다.

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n - R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

$$+ \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} I_n - R & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P^2 \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} I_n - R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P^2 \end{pmatrix} < 0$$

위의 두 개의 정리는 주어진 섭동 크기  $0 < \mu \leq 1$ 에 대한 안정 조건을 구한 것이다. 다음의 알고리즘은 (1), (2)로 표현되는 시스템의 안정성을 보장하는 섭동의 범위인  $\mu^*$ 를 찾는 방법에 대한 것이다.

알고리즘 1:  $\mu^*$ 는 다음의 선형행렬부등식을 제한조건으로 하는 일반화된 고유치 문제의 최적해이다.  $\|E(k)\| < \mu < \mu^*$ 인 섭동에 대해서 시스템 (1)은 제곱안정하다.

maximize  $0 < \mu \leq 1$  subject to

$$0 < P$$

$$0 < R$$

$$P^2 < X \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} -X & P \\ P & -I_n \end{pmatrix} < 0$$

$$A^T P A - P + R < -\mu A^T X A$$

$$\begin{pmatrix} I_n - R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} < -\mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

알고리즘 1에서 섭동교란에 대한 크기를  $0 < \mu \leq 1$ 로 제한한 것은 시간지연이 없는 일반적인 섭동의 안정범위를 구하는 문제에서 그 값이  $1 - \rho(A)$ 보다 작게 나타난다는 사실 [15]을 고려하면 타당한 가정으로 볼 수 있다.

또 다른 안정조건과 안정범위를 유도하기 위하여 (4), (6)을 이용하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$V(x(k+1)) - V(x(k))$$

$$\leq x^T(k) (A^T P A - P + R + A^T P^2 A) x(k) + x^T(k-d) (E^T(k) P E(k) - R + \mu^2 I_n) x(k-d) \tag{12}$$

정리 2:  $0 < \mu \leq 1$ 에 대하여 다음 두 개의 부등식을 동시에 만족하는 양의 정칙 행렬  $P = P^T, R = R^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 이 존재하면 (1), (2)의 시간지연 섭동이 있는 시스템은 제곱안정하다.

$$A^T P A - P + R < -A^T P^2 A \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} < 0 \tag{14}$$

증명: (12)로부터

$$A^T P A - P + R + A^T P^2 A < 0$$

$$E^T(k) P E(k) - R + \mu^2 I_n < 0$$

이면,  $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ .

$0 < \mu \leq 1$  에 대해서,

$$E^T(k)PE(k) - R + \mu I_n < 0$$

$$\Rightarrow E^T(k)PE(k) - R + \mu^2 I_n < 0 \quad (\because \mu^2 \leq \mu)$$

보조정리 1에 의해, 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & E^T(k)PE(k) - R + \mu I_n < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -R + \mu I_n & E^T(k) \\ E(k) & -P^{-1} \end{pmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -R & E^T(k) \\ E(k) & -P^{-1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E^T(k) \\ E(k) & 0 \end{pmatrix} < 0 \end{aligned}$$

(2)와 보조정리 2를 이용하면

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -R + \mu I_n & E^T(k) \\ E(k) & -P^{-1} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} \\ & + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} < 0 \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} -R + \mu I_n & E^T(k) \\ E(k) & -P^{-1} \end{pmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & E^T(k)PE(k) - R + \mu I_n < 0 \end{aligned}$$

따라서, (13), (14)를 만족하면,  $V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$ . ■

따름정리 2:  $0 < \mu \leq 1$  에 대하여 다음 두 개의 부등식을 동시에 만족하는 양의 정칙 행렬  $P = P^T$ ,  $R = R^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  이 존재하면 (1), (2)의 시간지연 섭동이 있는 시스템은 제곱 안정하다.

$$A^T P A - P + R < -A^T P^2 A \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & P^2 \end{pmatrix} < 0 \tag{16}$$

증명: (14)에 대하여 행렬  $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$  을 앞뒤로 곱하여도 부등식은 변하지 않는다.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \\ & + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} < 0 \\ & \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & P^2 \end{pmatrix} < 0 \\ & \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & P^2 \end{pmatrix} < 0 \end{aligned}$$

■

다음의 알고리즘은 (1), (2)로 표현되는 시스템의 안정성을 보장하는 섭동의 범위인  $\mu^*$  를 찾는 두 번째 방법에 대한 것이다.

알고리즘 2:  $\mu^*$  는 다음의 선형행렬부등식을 제한조건으로 하는 일반화된 고유치 문제의 최적해이다.  $\|E(k)\| < \mu < \mu^*$  인 섭동에 대해서 시스템 (1)은 제곱안정하다.

maximize  $0 < \mu \leq 1$  subject to

$$0 < P$$

$$0 < R$$

$$P^2 < X \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} -X & P \\ P & -I_n \end{pmatrix} < 0$$

$$A^T P A - P + R < -A^T X A$$

$$\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} < -\mu \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

알고리즘 1과 2의 안정범위에 대한 결과는 정의1의 형태를 갖고 있으므로 잘 알려진 일반화된 고유치 문제의 풀이 방법을 사용할 수 있으며, 기존의 시간지연이 없는 섭동의 크기에 관한 결과[21]를 확장한 형태임을 알 수 있다. [21]에서는 다음과 같은 일반화된 고유치 문제를 고려하였다.

maximize  $\lambda$  subject to

$$0 < P$$

$$\begin{pmatrix} -X & P \\ P & -I_n \end{pmatrix} < 0$$

$$-\begin{pmatrix} P & A^T P \\ P A & P \end{pmatrix} < \lambda \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

위와 같은 [21]의 일반 섭동에 대한 결과와 비교하여 알고리즘 1과 2는 선형행렬부등식 조건이 추가된 형태로 볼 수 있다. 이러한 문제도 MATLAB LMI Toolbox를 이용하면 쉽게 해를 구할 수 있다.

다음 장에서는 이번 장에서 유도된 알고리즘 1, 2를 구현하여 수치 예에 대하여 결과를 이전의 것들과 비교한다.

### III. 예제

참고문헌[15,21]에서 행렬  $A$  가 노말(normal)행렬의 경우에는 시간지연이 없는 섭동의 최대크기가  $1 - \rho(A)$  가 됨을 보

였다. 따라서, 본 연구에서도 시간지연이 있는 섭동 교란의 비교를  $1-\rho(A)$  와 지연이 없는 섭동에 대한 참고문헌[21]의 결과와 함께 비교한다.

예제 1:  $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$  는 노말 행렬로 지연이 없는 일반

섭동의 최대크기는 0.8이 된다. 이에 대하여 알고리즘 1을 통한 시간지연 섭동의 크기는 0.5813, 알고리즘 2인 경우는 0.6706으로 계산된다.

$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$  과 그 외의 경우에 대한 결과는 표 1에 정리되었다.

$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$  의 경우에 대한 자세한 행렬들은 다음과 같다.

알고리즘 1:

$$P = \begin{pmatrix} 1.6744 & 0.3733 \\ 0.3733 & 1.4904 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1.4228 & -0.0063 \\ -0.0063 & 1.4210 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 2.9607 & 1.4339 \\ 1.4339 & 5.0781 \end{pmatrix}, \quad X - P^2 = \begin{pmatrix} 0.0277 & -0.0184 \\ -0.0184 & 0.0149 \end{pmatrix}$$

$X - P^2$  행렬의 고유값은 0.0018, 0.0407로 양수이다. 따라서,  $P^2 < X$ .

$$A^T P A - P + R + \mu A^T X A = \begin{pmatrix} -0.0078 & 0.0063 \\ 0.0063 & -0.0059 \end{pmatrix} < 0$$

고유값: -0.0132, -0.0005

$$\begin{pmatrix} I_n - R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.0078 & 0.0063 & 0 & 0 \\ 0.0063 & -0.0059 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4426 & 0.2218 \\ 0 & 0 & 0.2218 & -0.1113 \end{pmatrix} < 0$$

고유값: -0.5538, -0.0132, -0.0005, -0.0001

알고리즘 2:

$$P = \begin{pmatrix} 1.6327 & 0.0474 \\ 0.0474 & 2.3548 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1.0755 & -0.2659 \\ -0.2659 & 1.1036 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 2.7249 & 0.1195 \\ 0.1195 & 5.6333 \end{pmatrix}, \quad X - P^2 = \begin{pmatrix} 0.0569 & -0.0696 \\ -0.0696 & 0.0859 \end{pmatrix}$$

$X - P^2$  행렬의 고유값은 0.0003, 0.1425로 양수이다. 따라서,  $P^2 < X$ .

$$A^T P A - P + R + A^T X A = \begin{pmatrix} -0.1874 & 0.1972 \\ 0.1972 & -0.2077 \end{pmatrix} < 0$$

고유값: -0.3950, -0.0002

$$\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.2524 & 0.2659 & 0 & 0 \\ 0.2659 & -0.2805 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5112 & 0.0018 \\ 0 & 0 & 0.0018 & -0.0364 \end{pmatrix} < 0$$

고유값: -0.5327, -0.5113, -0.0364, -0.0001

표 1은 여러 가지 기준 행렬에 따른 섭동 교란의 안정 범위를 구한 것으로, 노말 행렬과의 근접한 정도를  $\|A\| - \rho(A)$  를 기준으로 비교하였다 결과에서 알 수 있는 것은 시간 지연을 고려한 섭동의 크기가 시간지연이 없는 섭동의 크기에 비해서 작게 나옴을 알 수 있다. 또한, 알고리즘 1과 2의 상호간의 결과의 우수성은 결론 내릴 수 없음을 알 수 있다.

예제 2: 다음과 같은 4차 시스템을 고려한다. 이 경우  $\|A\| = 0.857$ ,  $\rho(A) = 0.682$ ,  $\|A\| - \rho(A) = 0.175$  이다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.05 & 0.1 & 0.25 & 0.4 \\ 0 & 0.15 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

예제 3: 시스템 행렬이  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$  로 표시되는 경우에

대하여 여러 가지의  $\alpha$  와  $\beta$  에 대한 안정범위를 비교한 것이 표 3와 표 4이다. 시간지연이 있는 섭동의 안정범위가 시간지연이 없는 섭동의 안정범위보다 작게 나옴을 알 수 있다. 특히, 알고리즘 2이 알고리즘 1에 비하여 안정된 해를 제공함을 알 수 있다.

표 1. 여러 가지 경우에 대한 섭동 안정범위 비교

Table 1. Comparison of stability bounds for various system matrices.

	$\ A\  - \rho(A)$	$1 - \rho(A)$	[21]	알고리즘 1	알고리즘 2
$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$	0	0.8	0.8	0.5813	0.6706
$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$	0.0472	0.5628	0.5515	0.4151	0.4116
$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$	0.0829	0.3185	0.3108	0.1280	0.0761
$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ -0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$	0.1805	0.5476	0.4415	0.2821	0.1967
$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$	0.5343	0.8	0.5656	0.3651	0.4492

표 2. 4차 시스템의 섭동 안정범위 비교

Table 2. Comparison of stability bounds for 4-th order system matrix.

$1 - \rho(A_1)$	[21]	알고리즘 1	알고리즘 2
0.3180	0.2750	0.1014	0.0696

표 3. 비 구조화된 섭동의 안정범위 비교( $A, \beta = 1$ ).

Table 3. Comparison of stability bounds for unstructured uncertainty( $A, \beta = 1$ ).

$\alpha$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
Yaz(1989)	0.4142	0.3563	0.2406	0.1235	0.0344
Sezer(1987)	0.2929	0.2539	0.1652	0.0727	0.0129
Kolla(1989)	0.2247	0.1951	0.1259	0.0536	0.0089
[21]	0.6176	0.4433	0.2808	0.1403	0.0385
알고리즘1	*	0.2600	*	*	*
알고리즘2	0.4195	0.3240	0.1410	0.0273	0.0014

\*: 의미있는 해를 구할 수 없음

표 4. 비 구조화된 섭동의 안정범위 비교( $A, \alpha = 0.2$ ).

Table 4. Comparison of stability bounds for unstructured uncertainty( $A, \alpha = 0.2$ ).

$\beta$	0.2	0.5	0.8	1.5	2.0	3.0
Yaz(1989)	0.6873	0.5290	0.4132	0.2603	0.2028	0.1394
Sezer(1987)	0.6794	0.4797	0.3261	0.1447	0.0906	0.0438
Kolla(1989)	0.6774	0.4567	0.2969	0.0855	0.0424	0.0142
[21]	0.7061	0.5881	0.4942	0.3466	0.2806	0.2
알고리즘1	0.5232	0.4069	0.3109	4.3e-7	0.0937	*
알고리즘2	0.6080	0.4842	0.3786	0.2296	0.1812	0.1272

\*: 의미있는 해를 구할 수 없음

IV. 결론

본 논문에서는 일정한 시간지연 특성을 갖는 시변 섭동이 있는 시스템의 안정성에 대하여 충분조건을 유도하고 이에 따르는 섭동의 안정범위를 제안하였다.

제안된 안정범위는 선형행렬부등식의 제한 조건을 갖는 일반 고유치 문제로 표현된다. 일반고유치문제의 해는 수치적인 방법에 의하여 쉽게 구해질 수 있으므로 제안된 방법은 실제 적용에 있어서 용이함을 갖는다. 본 논문의 결과는 시불변 섭동에 대하여서만 유도된 기존 결과와 비교해 보면 연구범위를 시변 섭동으로 확대한 것으로 이산 시스템의 시간지연 섭동에 대한 새로운 연구 방향을 제시한 것이다.

참고문헌

[1] J. Richard, "Time-delay systems:an overview of some recent advances and open problems," *Automatica*, vol. 39, pp. 1667-1694, 2003.

[2] L. Dugard and E. I. Verriest, *Stability and Control of Time-delay Systems*, Springer-Verlag, 1998.

[3] M. L. Ni and M. J. Er, "Stability of linear systems with delayed perturbations: An LMI approach," *IEEE Trans. of Circuits and Systems-1:Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 1, pp. 108-112, 2002.

[4] Z. H. Shao, "Stability bounds of singularly perturbed delay system," *IEE Proc., Control Theory Appl.*, vol. 151, no. 5, pp. 585-588, September 2004.

[5] T. Su, C .Y. Lu, and J. S. Tsai, "LMI approach to delay-

dependent robust stability for uncertain time-delay systems," *IEE Proc., Control Theory Appl.*, vol. 148, no. 3, pp. 209-212, May 2001.

[6] J. H. Kim, "Robust stability of linear systems with delayed perturbations," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 41, no. 12, pp. 1820-1822, 1996.

[7] T. Ooba and Y. Funahashi, "Comments on "Robust stability of linear systems with delayed perturbations","" *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 44, no. 8, pp. 1582-1583, 1999.

[8] H. I. Kang, "Comments on "Robust stability of linear systems with delayed perturbations","" *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 44, no. 8, pp. 1612, 1999.

[9] S. Chen and J. Chou, "D-stability robustness for linear discrete uncertain singular systems with delayed perturbations," *International Journal of Control*, vol. 77, no. 7, pp. 685-692, May 2004.

[10] T. Su et. al., "Correction to robust D-stability for linear uncertain discrete time-delay systems," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 48, no. 4, pp. 709, 2003.

[11] T. Su and W. Shyr, "Robust D-stability for linear uncertain discrete time-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 2, pp. 425-428, Feb. 1994.

[12] T. S. Li, J. Chiou, and F. Kung, "Stability bounds of singularly perturbed discrete systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 10, pp. 1934-1938, Oct. 1999.

[13] H. Trinh and M. Aldeen, "Robust stability of singularly perturbed discrete-delay systems," *IEEE Trans. of Automatic Control*, vol. 40 no. 9, pp. 1620-1623, September 1995.

[14] E. I. Verriest and A. F. Ivanov, "Robust stability of delay-difference equations," *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 1, pp. 386-391, 13-15 Dec. 1995.

[15] 송성호, 박섭형, 이봉영, "시변 시간 지연을 갖는 불확실한 이산 시간 선형시스템의 건설 안정성," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, vol. 5, no. 6, pp. 641-646, August 1999.

[16] M. Halicka and D. Rosinová, "Stability robustness bound estimates of discrete systems : analysis and comparison," *International Journal of Control*, vol. 60, no. 2, pp. 297-314, 1994.

[17] E. Yaz and X. Niu, "Stability robustness of linear discrete-time systems in the presence of uncertainty," *International Journal of Control*, vol. 50, no. 1, pp. 173-182, 1989.

[18] S. R. Kolla, R. K. Yedavalli, and J. B. Farison, "Robust stability bounds on time-varying perturbations for state-space models of linear discrete-time systems," *International Journal of Control*, vol. 50, no. 1, pp. 151-159, 1989.

[19] M. E. Sezer and D. D. Siljak, "Robust stability of discrete systems," *International Journal of Control*, vol. 48, no. 5, pp. 2055-2063, 1988.

[20] E. Yaz and X. Niu, "Robustness of discrete-time systems for unstructured stochastic perturbations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 7, pp. 867-869.

[21] 김병수, 한형석, 이장규, "시변 섭동의 안정범위에 관한 연구," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, vol. 3, no. 1, pp. 17-22, January 1997.

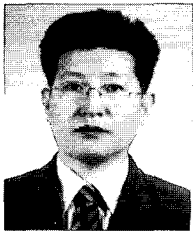
[22] R. A. Horn and C .R. Johnson, *Matrix Analysis*, New York: Cambridge University Press, 1985.

[23] S. P. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Siam, 1994.

기호

- $\lambda_i(X)$  : i-번째 고유치(i-th eigenvalue)
- $\lambda_m(X)$  : 최소 고유치(minimum eigenvalue)
- $\lambda_M(X)$  : 최대 고유치(maximum eigenvalue)
- $\sigma_M(X)$  : 최대 특이치(maximum singular value)
- $$\sigma_M(X) = \lambda_M^{1/2}(X^T X)$$

- $\|X\|$  : 스펙트럴 노름(spectral norm),  $\|X\| = \sigma_M(X)$
- $X > 0$  : 대칭행렬  $X$  가 양의 정칙(positive definite)
- $I_m$  :  $m \times m$  단위행렬(identity matrix)



한형석

1963년 6월 30일생. 1986년 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1988년 서울대학교 제어계측공학과(공학석사). 1993년 서울대학교 제어계측공학과(공학박사). 1993년~1997년 순천향대학교 제어계측공학과 조교수. 1997년~현재 경원대학교

전자전기정보공학부 교수. 관심분야는 건설제어, 유도제어, 센서응용시스템, 디스플레이 구동회로.



이달호

1959년 7월 20일생. 1982년 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1985년 서울대학교 제어계측공학과(공학석사). 1992년 서울대학교 제어계측공학과(공학박사). 1992년~현재 경원대학교 전자전기정보공학부 교수. 관심분야는 제어공학, 시스템식별.

시스템식별.