

< 논문 >

개선된 저차 전단 변형 이론을 이용한 전기, 기계 하중을 받는 스마트 복합재 구조물의 연성 해석

오진호[†] · 조맹효* · 김준식**

(2006년 9월 7일 접수, 2006년 11월 28일 심사완료)

A Coupled Analysis of Smart Plate Under Electro-Mechanical Loading Using Enhanced Lower-Order Shear Deformation Theory

Jinho Oh, Maenghyo Cho and Jun-Sik Kim

Key Words : Shear Deformable Plate Theory(전단 변형 평판이론), Coupled Electro-Mechanical Loading(연성된 전기, 기계 하중), Smart Composite Plate Model(스마트 복합재 적층 평판)

Abstract

Enhanced lower order shear deformation theory is developed in this study. Generally, lower order theories are not adequate to predict accurate deformation and stress distribution through the thickness of laminated plate. For the accurate prediction of detailed stress and deformation distributions through the thickness, higher order zigzag theories have been proposed. However, in most cases, simplified zigzag higher order theory requires C_1 shape functions in finite element implementation. In commercial FE softwares, C_1 shape functions are not so common in plate and shell analysis. Thus zigzag theories are useful for the highly accurate prediction of thick composite behaviors but they are not practical in the sense that they cannot be used conveniently in the commercial package. In practice, iso-parametric C_0 plate model is the standard model for the analysis and design of composite laminated plates and shells. Thus in the present study, an enhanced lower order shear deformation theory is developed. The proposed theory requires only C_0 shape function in FE implementation. The least-squared energy error between the lower order theory and higher order theory is minimized. An enhanced lower order shear deformation theory(ELSDT) in this paper is proposed for smart structure under complex loadings. The ELSDT is constructed by the strain energy transformation and fully coupled mechanical, electric loading cases are studied. In order to obtain accurate prediction, zigzag in-plane displacement and transverse normal deformation are considered in the deformation field. In the electric behavior, open-circuit condition as well as closed-circuit condition is considered. Through the numerous examples, the accuracy and robustness of present theory are demonstrated.

1. 서론

[†] 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부

* 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : mhcho@snu.ac.kr

TEL : (02)880-1693 FAX : (02)886-1693

** Pennsylvania State University

고강도, 고강성, 경량화를 요구하는 시스템에 널리 사용되고 있는 지능 구조물에 대한 연구는 지속적으로 연구자들의 관심을 받아왔다. 특히, 비행체와 같은 시스템에 적용되는 지능 구조물의 경우

기계-전기등의 복합 하중 환경 하에 처하게 되는 경우가 빈번하기 때문에, 일반 기계 하중뿐만 아니라, 다 물리계의 환경을 고려하는 해석이 요구된다. 따라서, 이러한 복합 하중 상태하에 놓인 지능구조물에 대한 해석과 설계 방안에 대한 연구가 현재까지 활발히 진행되어왔다.

지능구조물 해석기법으로는 다음과 같은 해석모델들이 보고되어 있다. 먼저, 근사 단층이론^(1,2)을 들 수 있는데, 이 방법은 복합재 구조물의 두께방향으로의 횡 전단응력 연속조건을 만족하지 못하기 때문에 해석의 정확도를 보장할 수 없는 단점을 가지고 있다. 이를 보완하기 위해 적층 구조물의 두께 방향으로 각 층마다 자유도를 부과하는 층별 이론⁽³⁾이 제안되었다. 이 이론 또한 해석하고자 하는 시스템의 자유도가 적층 수에 의존하기 때문에, 계산량과 주자유도의 수가 적층 수의 증가에 따라 급격히 증가하는 단점을 보이게 된다. 이에 따라 상기된 두 이론이 가지는 단점들을 해결하기 위해 여러 종류의 지그재그 이론이 제안되었다. 자세한 내용은 참고문헌⁽⁴⁻⁶⁾에 주어진다. 본 연구에서 제안된 방법은 변위의 횡 전단 응력 연속조건을 층 경계면 마다 만족시킬 수 있으며 또한, 변위장의 기술에 있어서 층의 수와 상관없이 7 개 변수만을 사용하게 되므로 계산상에 있어서 많은 장점을 가지고 있다. 그러나 지그재그 이론을 이용하여, 유한 요소를 구현 하는 경우 C_1 연속조건을 만족하는 형상함수가 필요하게 되어, 결과적으로는 sub-parametric 요소를 사용하는 경우가 된다. 이는 일반적인 상업용 패키지에서 사용되는 등매개 요소에 적용되는 C_0 요소와 다르다는 문제점을 가지고 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위해, 후처리 기법들이 제안 되었으며, 가장 널리 사용되고 있는 방법으로는 전단 수정계수⁽⁹⁾를 구하여 FSDT(First-order shear deformation theory)의 해를 향상 시키는 방법이 있다. 그러나, 전단 수정계수를 구하는 방법 역시 해석 모델과 경계 조건에 따라 계산과정이 매우 복잡해지는 단점을 가지고 있다.

본 연구에서는, 이러한 여러 문제점을 해결하면서, 효율적으로 전기-기계 연성 해석을 수행 할 수 있는 개선된 저차 전단 변형(ELSDT) 이론을 개발한다. 제안된 이론은 고차 지그재그 이론의 정확성을 가질 뿐만 아니라, 유한요소 해석 시 C_0 연속조건을 만족하는 형상 함수만으로 정식화 할 수 있다. 또한, 본 연구에서 개발된 기법은 횡 방향 수직 변형을 고려 함으로써 열-전기 하중이 부과되었을 경우에 대해서도 해석의 정확도를 확보

할 수 있는 장점을 가지고 있다.

2. 고차 지그재그 이론의 정식화

2.1 변위장

개선된 저차 전단 변형이론을 정식화하기 위해서는 우선 고차 이론과 저차 이론의 매개적인 역할을 하는 와핑함수(Warping function)를 계산하여야 한다. 이 함수는 고차 이론의 변위장을 변형시켜서 얻을 수 있다. 자세한 내용은 아래에 기술하였다. 본 연구에서 사용된 고차이론은 지금까지 제안된 고차 이론 중에서 효율적이면서 정확히 해를 예측할 수 있는 고차 지그재그 이론^(7,8)을 사용하였다. 사용된 이론의 면내 변위장은 두께방향으로 매끈하게 변하는 3차 변위장에 1차 지그재그 변위장을 중첩하여 얻는다. 전기 하중 하에서 중요한 횡 수직 변형 효과를 포함하기 위해, 두께방향으로 면내수직 변위를 2차 식으로 가정하였다. 이를 수식으로 표현하면, 아래와 같다.

$$u_\alpha(x_\beta, z, t) = u_\alpha^0(x_\beta, t) + \psi_\alpha(x_\beta, t)x_3 + \xi_\alpha(x_\beta, t)x_3^2 + \varphi_\alpha(x_\beta, t)x_3^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta, t)(x_3 - x_3^{(k)})H(x_3 - x_3^{(k)}) \quad (1)$$

$$u_3(x_\alpha, z, t) = u_3^0(x_\alpha, t) + r_1(x_\alpha, t)x_3 + r_2(x_\alpha, t)x_3^2$$

여기서, u_α^0 와 u_3 는 기준면에서의 면내 변위와 면내 수직변위를 나타낸다. ψ_α 는 x_3 축에 대한 회전각도를 나타낸다. $H(x_3 - x_3^{(k)})$ 는 단위 계단함수이다. r_1, r_2 는 포물선 횡 수직 변형률을 나타내기 위한 변수이다. 위에 가정된 변위장을 보다 단순화하기 위해, 스마트 평판의 아랫면과 윗면에서 무전단 응력조건을 적용하여 다음과 같은 횡 전단 변형률을 얻을 수 있다.

$$\gamma_{\alpha 3} = -\frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta, t)(h + 2z) - r_{1,\alpha}(x_\alpha, t) \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_{2,\alpha}(x_\alpha, t)x_3^2 - 3\varphi_\alpha(x_\beta, t) \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + 3\varphi_\alpha(x_\beta, t)x_3^2 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta, t)H(x_3 - x_3^{(k)}) \quad (2)$$

여기서, S_α^k 는 각 층에서의 기울기의 변화를 나타낸다. 이 값은 횡방향 전단 응력 연속 조건으로부터 계산 되어 식 (3)과 같이 전단 강성 계수와 기준면에서 정의되는 변수만의 함수로 표현된다.

$$S_\alpha^k = a_{\alpha\gamma}^{(k)} \phi_\gamma \quad (3)$$

$$\phi_\alpha = (3\varphi_\alpha + r_{2,\alpha})$$

위의 식들을 이용하여, 최종적인 변위장을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$u_\alpha(x_i) = u_\alpha^o(x_\alpha) - u_{3,\alpha}^o(x_\alpha)x_3 + \Phi_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_3)\phi_\gamma(x_\alpha) + \Phi_{\alpha\gamma}^{(1)}(x_3)r_{1,\gamma}(x_\alpha) + \Phi_{\alpha\gamma}^{(2)}(x_3)r_{2,\gamma}(x_\alpha) \quad (4)$$

$$u_3(x_i) = u_3^o(x_\alpha) + r_1x_3 + r_1(x_3)^2$$

$$\Phi_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_3) = T_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_3) + C_{\alpha\gamma}^{(0)w}$$

$$T_{\alpha\gamma}^{(0)} = -x_3\left(\frac{1}{4}h^2\delta_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}a_{\alpha\gamma}^k\right) - x_3^2\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{N-1}a_{\alpha\gamma}^k + x_3^3/3\delta_{\alpha\gamma} + \sum_{k=1}^{N-1}a_{\alpha\gamma}^k(x_3 - x_3^{(k)})H(x_3 - x_3^{(k)}) \quad (5)$$

$$\Phi_{\alpha\gamma}^{(1)}(x_3) = -\frac{1}{2}x_3^2\delta_{\alpha\gamma}$$

$$\Phi_{\alpha\gamma}^{(2)}(x_3) = -\frac{1}{3}x_3^3\delta_{\alpha\gamma}$$

$$C_{\alpha\gamma}^{(0)w} = -\frac{1}{h}\langle T_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_3) \rangle$$

위의 식 (4)과 식 (5)로부터, 면내 와평함수를 얻을 수 있다. 면내 와평함수는 효율적인 횡전단 변형률 ϕ_γ 과 r_1 , r_2 로 구성된다. 최종적인, 면내 와평함수는 다음과 같다.

$$W_\alpha(x_i) = \Phi_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_3)\phi_\gamma(x_\beta) + \Phi_{\alpha\gamma}^{(1)}(x_3)r_{1,\gamma}(x_\beta) + \Phi_{\alpha\gamma}^{(2)}(x_3)r_{2,\gamma}(x_\beta) \quad (6) \quad (k=1,2,\dots,N_\phi)$$

위의 변위장에서 와평함수를 제거하면, 식 (4)의 면내 변위장은 고전평판 이론의 변위장이 된다. 결국, 이 함수가 고차 이론과 저차 이론의 매개적 역할을 하면서 해의 정확도를 보장한다.

기하학적 구속조건으로부터, 평균 변위를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{u}_\alpha^o = \frac{1}{h}\langle u_\alpha(x_i) \rangle, \quad \bar{u}_3^o(x_\beta) = \frac{1}{h}\langle u_3(x_i) \rangle \quad (7)$$

식 (4)과 식 (7)로부터, 다음과 같은 평균 면내 변위와 면내 수직 변위가 유도 된다.

$$\bar{u}_\alpha^o = u_\alpha^o + C_{\alpha\gamma}^{(0)}\phi_\gamma + C_{\alpha\gamma}^{(1)}r_{1,\gamma} + C_{\alpha\gamma}^{(2)}r_{2,\gamma}$$

$$C_{\alpha\gamma}^{(0)} = \frac{1}{h}\langle \Phi_{\alpha\gamma}^{(0)} \rangle, \quad C_{\alpha\gamma}^{(1)} = -\frac{1}{h}\langle x_3^2 \rangle \delta_{\alpha\gamma}, \quad C_{\alpha\gamma}^{(2)} = 0 \quad (8)$$

$$\bar{u}_3^o = u_3^o, \quad \bar{r}_1^o = r_1^o, \quad \bar{r}_2^o = r_2^o \quad (9)$$

식 (8)은 평균 면내 변위와 고차 지그재그 면내 변위 사이의 관계식을 보여준다. 이 관계식은 본 연구의 후반부에서 최소 오차 자승법을 이용하여 다시 한번 유도된다. 식 (8)과 식 (9)로 주어지는 기하학적 관계식을 도출하는 것이 제안하고자 하는 저차 평판이론의 핵심 사항이다.

고차이론의 면내 변형률과 횡 방향 전단 변형률은 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(x_i) = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(o)}(x_\alpha) + x_3\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}(x_\alpha) + x_3^2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}(x_\alpha) + x_3^3\varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)}(x_\alpha) + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(w)}(x_i),$$

$$\gamma_{3\alpha}(x_i) = u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha}$$

$$= \Phi_{\alpha\gamma,3}^{(0)}(x_3)\phi_\gamma(x_\beta) + \Phi_{\alpha\gamma,3}^{(1)}(x_3)r_{1,\gamma}(x_\beta) + \Phi_{\alpha\gamma,3}^{(2)}(x_3)r_{2,\gamma}(x_\beta) + r_{1,\alpha}x_3 + r_{2,\alpha}x_3^2 + W_{3,\alpha}$$

$$= \Phi_{\alpha\gamma,3}^{(0)}(x_3)\phi_\gamma(x_\beta) + W_{3,\alpha} \quad (10)$$

여기서,

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(o)} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^o + u_{\beta,\alpha}^o), \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{1}{2}(u_{3,\alpha\beta}^o + u_{\alpha\beta,3}^o),$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} = -r_{1,\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)} = -\frac{1}{3}r_{2,\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{(w)} = \frac{1}{2}(W_{\alpha,\beta} + W_{\beta,\alpha}) \quad (11)$$

면내 수직 와평 함수 W_3 는 효율적 횡 전단 변형률 ϕ_γ 에 비해 상당히 작은 값이므로 생략 할 수 있다. 결국, 횡 방향 전단 변형률은 아래와 같이 표현 될 수 있다.

$$\gamma_{3\alpha} \cong \Phi_{\alpha\gamma,3}^{(0)}(x_3)\phi_\gamma(x_\beta) \quad (12)$$

변형률을 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_e = \varepsilon_e^o + x_3\varepsilon_e^o + [x_3^2 \quad x_3^3 \quad \Phi_e] \begin{Bmatrix} \kappa_h^{(o)} \\ \kappa_h^{(1)} \\ \kappa_h^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$= \varepsilon_e^o + x_3\varepsilon_e^o + \tilde{\Phi}_h \tilde{\kappa}_h \quad (13)$$

$$\varepsilon_s = \tilde{\Phi}_s \phi$$

지금까지, 고차 지그재그 이론으로부터 와평 함수와 변형률을 얻어 내는 방법에 대해 기술 하였다.

2.2 전기장

전기장은 두께방향 층의 수에 의존하는 층별 이론을 사용하여 모델링 하였다. 전기적 포텐셜은 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi(x_i, t) = \sum_{j=1}^{N_\phi} \psi^j \phi^j$$

$$j \leq \frac{N}{2} \quad \psi^j(x_3) = \begin{cases} \psi^j_l : \frac{x_3 - x_3^{j-1}}{x_3^j - x_3^{j-1}} & x_3^{(j)} < x_3 < x_3^{(j-1)} \\ \psi^j_u : \frac{x_3 - x_3^{j+1}}{x_3^j - x_3^{j+1}} & x_3^{(j+1)} < x_3 < x_3^{(j)} \end{cases} \quad (14)$$

$$j > \frac{N}{2} \quad \psi^j(x_3) = \begin{cases} \psi^j_l : \frac{x_3 - x_3^j}{x_3^{j+1} - x_3^j} & x_3^{(j+1)} < x_3 < x_3^{(j)} \\ \psi^j_u : \frac{x_3 - x_3^{j+2}}{x_3^{j+1} - x_3^{j+2}} & x_3^{(j+2)} < x_3 < x_3^{(j+1)} \end{cases}$$

여기서, ϕ^j 스마트 평판의 j 번째 경계면에서의 전기적 포텐셜 함수를 나타낸다. N_ϕ 는 경계면의 개수이고, ψ^j 는 라그랑지안 내삽함수이다.

3. 저차 전단 변형 이론의 정식화

3.1 저차 이론과 고차 이론 사이의 관계식

평균화된 저차 전단변형이론의 면내 변위장은 선형으로, 면내 수직 변위장은 횡 방향 수직 변형 효과를 나타내기 위해 포물선 형태로 가정하였다. 결국, 평균 변위는 아래와 같이 정의된다.

$$\bar{u}_\alpha = \bar{u}_\alpha^o + x_3 \theta_\alpha, \quad \bar{u}_3 = \bar{u}_3^o + r_1 x_3 + r_2 x_3^2 \quad (15)$$

평균화된 변형률은 다음과 같다.

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^o + x_3 \kappa_{\alpha\beta} \quad (16)$$

우선, 고차 지그재그 이론과 평균화된 저차 전단 변형이론의 변위와 변형률에 최소 오차 자승법을 적용하면, 아래에 주어진 관계식이 유도된다.

$$\min_{\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^o} (\| \varepsilon_{\alpha\beta} - \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} \|_2) = 0 \rightarrow \quad (17)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^o = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} + \frac{1}{h} \langle x_3^2 \rangle \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + \frac{1}{h} \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^{(w)} \rangle$$

$$\min_{\kappa_{\alpha\beta}} (\| \varepsilon_{\alpha\beta} - \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} \|_2) = 0 \rightarrow \quad (18)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{12}{h^3} \langle x_3^4 \rangle \varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)} + \frac{12}{h^3} \langle x_3 \varepsilon_{\alpha\beta}^{(w)} \rangle$$

$$\min_{\bar{u}_\alpha^o} (\| u_\alpha - \bar{u}_\alpha \|_2) = 0 \rightarrow \quad (19)$$

$$\bar{u}_\alpha^o = u_\alpha^o - \frac{1}{h} \langle x_3^2 \rangle r_{1,\alpha} + \frac{1}{h} \langle W_\alpha \rangle$$

$$\min_{\theta_\alpha} (\| u_\alpha - \bar{u}_\alpha \|_2) = 0 \rightarrow \quad (20)$$

$$\theta_\alpha = -u_{3,\alpha} - \frac{12}{h^3} \langle x_3^4 \rangle r_{2,\alpha} + \frac{12}{h^3} \langle x_3 W_\alpha \rangle$$

$$\min_{\bar{u}_3^o} (\| u_3 - \bar{u}_3 \|_2) = 0 \rightarrow \quad (21)$$

$$\bar{u}_3^o = u_3^o + \frac{1}{h} \langle W_3 \rangle$$

식 (4)과 식 (15)을 식 (19)~(20)에 대입하여, 고차 지그재그이론과 평균화 변수 사이의 관계식을 정식화 할 수 있다. 관계식은 다음과 같다.

$$\bar{u}_\alpha^o = u_\alpha^o - \frac{1}{2} C_{\alpha\gamma}^{(1)} r_{1,\alpha} + C_{\alpha\gamma}^{(0)} \phi_\gamma \quad (22)$$

$$u_{3,\alpha} + \theta_\alpha = \Gamma_{\alpha\gamma}^{(0)} \phi_\gamma - \frac{1}{3} \Gamma_{\alpha\gamma}^{(2)} r_{2,\alpha}$$

여기서,

$$C_{\alpha\gamma}^{(0)} = \frac{1}{h} \langle \Phi_{\alpha\gamma}^{(0)} \rangle \quad C_{\alpha\gamma}^{(1)} = \frac{1}{h} \langle x_3^2 \rangle \delta_{\alpha\gamma} \quad (23)$$

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^{(0)} = \frac{12}{h^3} \langle x_3 \Phi_{\alpha\gamma}^{(0)} \rangle \quad \Gamma_{\alpha\gamma}^{(2)} = \frac{12}{h^3} \langle x_3^4 \rangle \delta_{\alpha\gamma}$$

효율적 전단 변형률 ϕ_γ 와 평균화된 횡방향 전단 변형률 $\bar{\gamma}$ 사이의 관계식은 식 (20)으로부터 구

해진다. 이 관계식은 저차 이론의 전단변형 에너지를 보정하여, 해석 해의 정확도를 높이는데 사용된다. 행렬 형태로 표현하면 아래와 같이 쓰여진다.

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^{(0)} \phi_\gamma = B \bar{\gamma}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \Gamma_{\alpha\gamma}^{(0)-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Gamma_{11}^{(2)}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{31}^{(0)} \\ \bar{\gamma}_{32}^{(0)} \\ \bar{\gamma}_{31}^{(1)} \\ \bar{\gamma}_{32}^{(1)} \\ \bar{\gamma}_{31}^{(2)} \\ \bar{\gamma}_{32}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\phi = \hat{\Gamma} \bar{\gamma}, \quad \hat{\Gamma} = \Gamma^{-1} B \quad (25)$$

면내 변형률 관계식 식 (17)와 식 (18)의 행렬 형태는 다음과 같다.

$$\varepsilon^o = \bar{\varepsilon}^o - \tilde{C} \kappa^h \quad (26)$$

$$\kappa^o = \bar{\kappa}^o - \tilde{\Gamma} \kappa^h \quad (27)$$

3 차원 변형에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$U^{3D} = \frac{1}{2} \langle Q_{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\mu} + Q_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\delta} + 2Q_{33\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{33} + Q_{3333} \varepsilon_{33} \varepsilon_{33} - 2e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - b_{ij} E_i E_j - 2k_{ij} \theta \varepsilon_{ij} - 2d_i E_i \theta - a_1 \theta^2 \rangle \quad (28)$$

여기서, Q_{ijkl} 은 단사정 재료의 재료 상수를 나타낸다. 기계-전기 연성해석에 사용되는 구성방정식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ R \\ D_i^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & E & e_{i_1}^j \\ B^T & D & F & e_{i_2}^j \\ E^T & F^T & H & e_{i_p}^j \\ -e_{i_1}^{jT} & -e_{i_2}^{jT} & -e_{i_p}^{jT} & \varepsilon_0^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_0 \\ \hat{\kappa}_h \\ \rho^j \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} V \\ D_i^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G & e_0^j \\ -e_0^{jT} & \varepsilon_1^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \rho_i^j \end{Bmatrix}$$

여기서,

$$A = \langle Q(x_3) \rangle, \quad B = \langle x_3 Q(x_3) \rangle, \quad D = \langle x_3^2 Q(x_3) \rangle, \\ G = \langle \Phi_\gamma^T Q(x_3) \Phi_\gamma \rangle, \quad E = \langle Q(x_3) \Phi_\gamma \rangle, \\ F = \langle x_3 Q(x_3) \Phi_\gamma \rangle, \quad H = \langle \Phi_\gamma^T Q(x_3) \Phi_\gamma \rangle \quad (30)$$

$$e_{i_1}^j = \langle e_i \psi_{i_1}^j \rangle, \quad e_{i_2}^j = \langle x_3 e_i \psi_{i_2}^j \rangle, \quad e_{i_p}^j = \langle \Phi_\gamma^T e_i \psi_{i_p}^j \rangle \\ e_0^j = \langle \Phi_\gamma^T e_i \psi^j \rangle, \quad \varepsilon_0^{ij} = \langle \psi_{i_1}^j \varepsilon_0^i \psi_{i_1}^j \rangle, \quad \varepsilon_1^{ij} = \langle \psi_{i_1}^j \varepsilon_1^i \psi_{i_1}^j \rangle$$

강성 행렬 A, B, D 는 고전 적층 평판이론과 전단 변형 이론에서 사용되는 변형행렬과 일치한다. $e_{i_1}^j, e_{i_2}^j, e_{i_p}^j$ 은 전기-기계 연성 강성계수이다.

식 (25)~(27)를 식 (28)에 대입하여, 재배열된 3 차원 변형에너지를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$2U = 2\bar{U} + 2\tilde{U} \quad (31)$$

여기서,

$$2\bar{U} = \bar{\varepsilon}^{\sigma T} A \bar{\varepsilon}^{\sigma} + 2\bar{\varepsilon}^{\sigma T} B \bar{\kappa}^{\sigma} + \bar{\kappa}^{\sigma T} D \bar{\kappa}^{\sigma} + 2\bar{\varepsilon}^{\sigma T} e_{ij}^i \rho_j^i + 2\bar{\kappa}^{\sigma T} e_{ij}^i \rho_j^i - \rho_i^j \varepsilon_{ij}^{\sigma} \rho_j^i + \phi^T G \phi + 2\phi^T e_{ij}^i \rho_j^i - \rho_i^j \varepsilon_{ij}^{\sigma} \rho_j^i \quad (32)$$

$$2\bar{U} = -\bar{\varepsilon}^{\sigma T} A \bar{C} \kappa^h - (\bar{C} \kappa^h)^T A \bar{\varepsilon}^{\sigma} + (\bar{C} \kappa^h)^T A \bar{C} \kappa^h - 2\bar{\varepsilon}^{\sigma T} B \bar{\Gamma} \kappa^h - 2(\bar{C} \kappa^h)^T B \bar{\kappa}^{\sigma} + 2(\bar{C} \kappa^h)^T B \bar{\Gamma} \kappa^h + 2\bar{\varepsilon}^{\sigma T} E \kappa^h - 2(\bar{C} \kappa^h)^T E \kappa^h - \bar{\kappa}^{\sigma T} D \bar{\Gamma} \kappa^h - (\bar{\Gamma} \kappa^h)^T D \bar{\kappa}^{\sigma} + (\bar{\Gamma} \kappa^h)^T D \bar{\Gamma} \kappa^h + 2\bar{\kappa}^{\sigma T} F \kappa^h - 2(\bar{\Gamma} \kappa^h)^T F \kappa^h + \kappa^{h T} H \kappa^h - 2(\bar{C} \kappa^h)^T e_{ij}^i \rho_j^i - 2(\bar{\Gamma} \kappa^h)^T e_{ij}^i \rho_j^i + 2\kappa^{h T} e_{ij}^i \rho_j^i \quad (33)$$

여기서, \bar{U} 는 평균화된 저차 이론의 변형 에너지이고 \bar{U} 는 3 차원 변형에너지와 저차 이론의 변형 에너지 사이의 상관 에너지이다.

상관 에너지를 소거함으로써, 평균화된 저차 이론의 변형 에너지가 고차 변형 에너지에 근접하게 된다. 상관에너지를 소거하기 위한 식은 아래와 같다.

$$\begin{cases} A \bar{C} + B \bar{\Gamma} - E = 0 \\ \bar{C}^T B + D \bar{\Gamma} - F = 0 \\ \bar{C}^T e_{ij}^i + \bar{\Gamma}^T e_{ij}^i - e_{ij}^i \rho_j^i = 0 \\ \bar{C}^T K_0 + \bar{\Gamma}^T K_1 - K_H = 0 \end{cases} \quad (34)$$

식 (34)은 비선형식이므로, 반복적인 계산을 통해 계수 \bar{C} 와 $\bar{\Gamma}$ 를 얻을 수 있다. 이 계수 값과 식 (24)을 이용하여, 식 (35)에 정의된 효율적 횡 방향 전단강성계수 \hat{G} 와 전기 전단강성계수 \hat{e}_o^i 를 구할 수 있다.

$$\hat{G} = \hat{\Gamma}^T G \hat{\Gamma}, \quad \hat{e}_o^i = \Gamma^T e_o^i \quad (35)$$

위의 계수들은, 본 연구에서 제안된 이론의 해가 고차 이론의 정확도를 얻을 수 있도록 하는 보정 계수의 역할을 한다.

3.2 변위와 변형률 복원을 위한 후처리 방법

본 연구에서 제안된 개선된 저차 전단 변형이론은 저차 전단 변형이론의 횡 방향 강성계수를 식 (35)에서 얻어진, 보정 계수로 갱신한 후, 후처리 식을 이용하여 변위와 변형률을 복원하는 방법이다. 특히, 완전 연계된 기계-전기 복합 하중을 받는 구조물 해석에 적합하다.

기계-전기 연성해석에 사용되는 구성방정식은 아래와 같다.

$$\sigma_{ij} = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k \quad (36)$$

$$D_i = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + b_{ij} E_j \quad (37)$$

여기서, σ_{ij} 와 D_i 는 응력과 전기 변위를 나타낸다. Q_{ijkl} 와 e_{ijk} 는 탄성계수와 전기-기계 연성계수 이

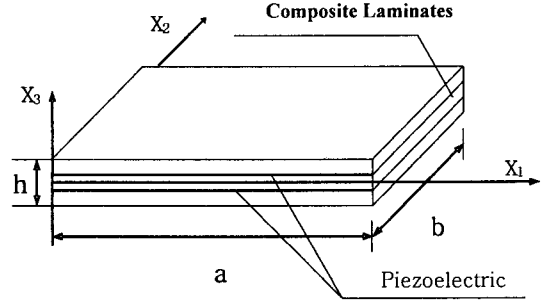


Fig. 1 Geometry and coordinates of a smart plate

다. E_i 와 b_{ij} 는 전기장과 유전률 성분을 나타낸다.

변분법이 적용된 전기-탄성 에너지함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \pi = \int_V (Q_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k) \delta \varepsilon_{ij} + (e_{ijk} \varepsilon_{jk} + b_{ij} E_j) \delta \phi_i dV - \int_S Q_E \delta \phi dS - \int_S t_i \delta u_i dS = 0 \quad (38)$$

여기서, u_i 는 변위 벡터이다. t_i 와 Q_E 는 표면력과 부과된 전하량을 나타낸다.

전기-기계하중이 완전 연계된 구조물을 해석하기 위한 지배 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi}^s \\ K_{\phi u}^s & K_{\phi\phi}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \phi_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F - K_{u\phi}^a \phi_a \\ Q^s - K_{\phi\phi}^{sa} \phi_a + d_{30}^{(piezo)} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

$$\phi_s = K_{\phi\phi}^{s-1} Q^s - K_{\phi\phi}^{s-1} K_{\phi u}^s U - K_{\phi\phi}^{s-1} K_{\phi\phi}^{sa} \phi_a + K_{\phi\phi}^{s-1} d_{30}^{(piezo)} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} (K_{uu} - K_{u\phi}^s K_{\phi\phi}^{s-1} K_{\phi u}^s) U = F - K_{u\phi}^s K_{\phi\phi}^{s-1} Q^s \\ + (K_{u\phi}^s K_{\phi\phi}^{s-1} K_{\phi\phi}^{sa} - K_{u\phi}^a) \phi_a - K_{u\phi}^s K_{\phi\phi}^{s-1} d_{30}^{(piezo)} \end{aligned} \quad (41)$$

여기서, U 는 평균변위 이고, ϕ_a 와 ϕ_s 는 작동기와 센서로 사용되는 압전체의 전기적 포텐셜을 나타낸다. 식 (39)~(41)을 이용하여 최종적인 전기-기계 연성해석이 수행된다. 해석 후, 구해진 평균화 변위들을 이용하여, 고차 지그재그이론의 변위와 응력을 완벽하게 복원할 수 있게 된다. 최종적으로 복원하기 위한 식은 아래 주어진다.

$$u_\alpha = \bar{u}_\alpha^0 - \bar{u}_{3,\alpha}^0 x_3 - C_{\alpha\gamma}^{(0)} \phi_\gamma - C_{\alpha\gamma}^{(1)} r_{1,\gamma} + \Phi_{\alpha\gamma} (x_3) \bar{\Gamma}_{\gamma\mu}^T \bar{\gamma}_{3\mu}^0, \quad (42)$$

$$u_3 = \bar{u}_\alpha^0 + \bar{r}_1 x_3 + \bar{r}_2 x_3^2$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{h} \langle x_3^2 \rangle \bar{r}_{1,\alpha\beta} - \frac{1}{h} \langle \bar{\Phi}_{\alpha\gamma}^e \hat{\Gamma}_{\gamma,\beta} \rangle \quad (43)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \bar{\Phi}_{\alpha\beta}^e \hat{\Gamma}_{\beta}^T$$

여기서 $\bar{(\)}$ 는 개선된 저차 전단 변형이론으로부터 얻어진 결과 값들이다. 개선된 저차 전단 변형이론에 대한 전체적인 계산 흐름도는 Fig. 3에 보여진다.

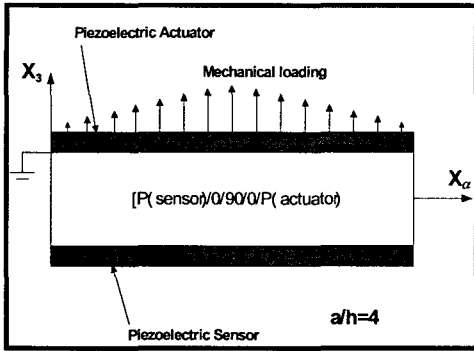


Fig. 2(a) Configuration of smart plate under mechanical and electric loading ($V=100$ volt)

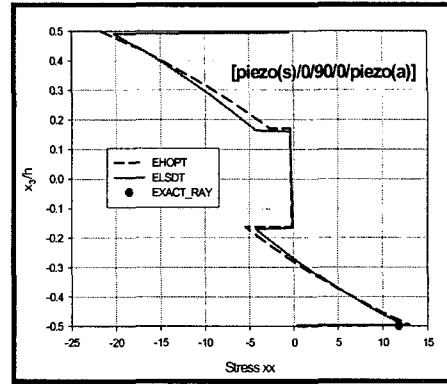


Fig. 2(b) In-plane stress $\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_x / q_0 S^2$

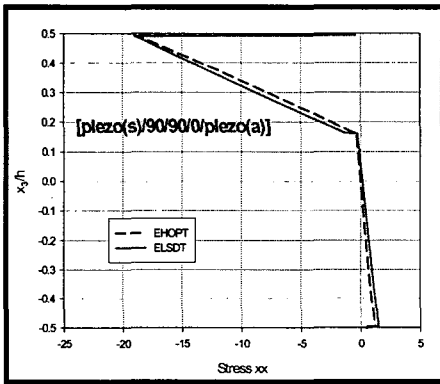


Fig. 2(c) In-plane stress $\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_x / q_0 S^2$

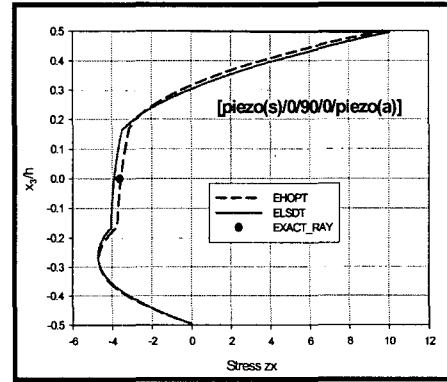


Fig. 2(d) Transverse shear stresses $\bar{\sigma}_{zx} = (\sigma_{zx}) / q_0 S$

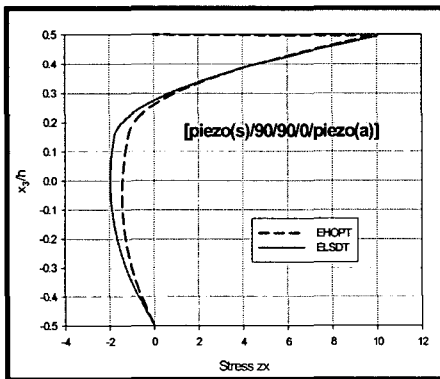


Fig. 2(e) Transverse shear stress $\bar{\sigma}_{zx} = (\sigma_{zx}) / q_0 S$

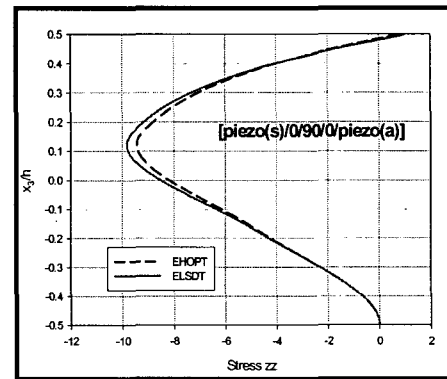


Fig. 2(f) Transverse normal stress $\bar{\sigma}_{zz} = -(\sigma_{zz}) / q_0 S$

4. 수치 예제

개발된 이론의 성능을 검증하기 위해서 완전 연계된 전기-기계 하중이 부과된 평판을 해석하였다. 수치 예제에 대한 형상은 Fig. 1에 주어진다. 해석을 위하여 [piezo(s)/0/90/0/piezo(a)]와 [piezo(s)/90/90/0/piezo(a)]의 두 가지 직교 적층배열의 경우를 고려 하였다. 해석에 사용된 물성치는 Table. 1에 주어진다.

4.1 기계-전기 연성 해석

정현파 기계 하중 6894.7Pa 이 판의 윗면에 가해지고, 압전 층에 100 volt 전압을 부과하였을 때의 결과를 Fig. 2 에 도시하였다. 여기서, piezo(a)와 piezo(s)는 작동기와 센서로서 역할을 하는 압전재료를 나타낸다.

Table 1 Material properties of the graph 1Table 1 Material properties of the graphite-epoxy and PVDF layer

PVDF layer	Graphite-epoxy layer
$E_1 = E_2 = E_3 = 2 \times 10^9$ (Pa)	$E_1 = 172.37 \times 10^9$ (Pa)
$\nu = 0.29$	$E_2 = E_3 = 6.895 \times 10^9$ (Pa)
$e_{31} = e_{32} = 0.0046$ (C/m ²)	$G_{12} = G_{13} = 3.4475 \times 10^9$ (Pa)
$e_{33} = e_{24} = e_{15} = 0$	$G_{23} = 1.379 \times 10^9$ (Pa)
$b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0.1062 \times 10^9$ (farads/m)	$\nu = 0.25$
	$b_{11} = b_{22} = b_{33} = 8.85 \times 10^{-12}$ (farads/m)

본 연구에서 제안된 이론과 탄성해의 변위 비교는 Table 2 에 주어진다. 현재 이론은 탄성해와 비교해서 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 2(b)와 2(c)는 적층배열을 바꾸어 두께방향으로 면내 응력 분포를 살펴보았다. 스마트 판의 면내 응력의 최대값 위치가 적층 배열에 따라 바뀌게 됨을 확인 할 수 있다. Fig. 2(d)-(f)에서 주어진 횡 방향 전단 응력과 수직응력은 3 차원 평형방정식을 이용하여 도시하였다. Fig. 2 에서 보여지듯이 개선된 저차 전단 변형 이론(Enhanced Lower Order Shear Deformation Theory)에 의해서 얻어진 면내 응력이 고차 지그재그 이론(Efficient Higher Order zig-zag Plate Theory)의 해와 비교해서 그 차이가 매우 적을 정도로 고차 이론의 해의 정확도에 버금가는 해를 제공할 수 있다.

Table 2 Displacement comparison between the present and the exact solution

S		$\bar{w}(0)$ 0 volt	$\bar{w}(0)$ 100 volt
4	Exact ¹⁰ (Ray, 1993) PT	1.99 2.17	-31.56 -26.44
10	Exact ¹⁰ (Ray, 1993) PT	0.774 0.769	-2.35 -2.04
100	Exact ¹¹ (Sheikh, 2001) PT	0.433 0.434	0.411 0.412

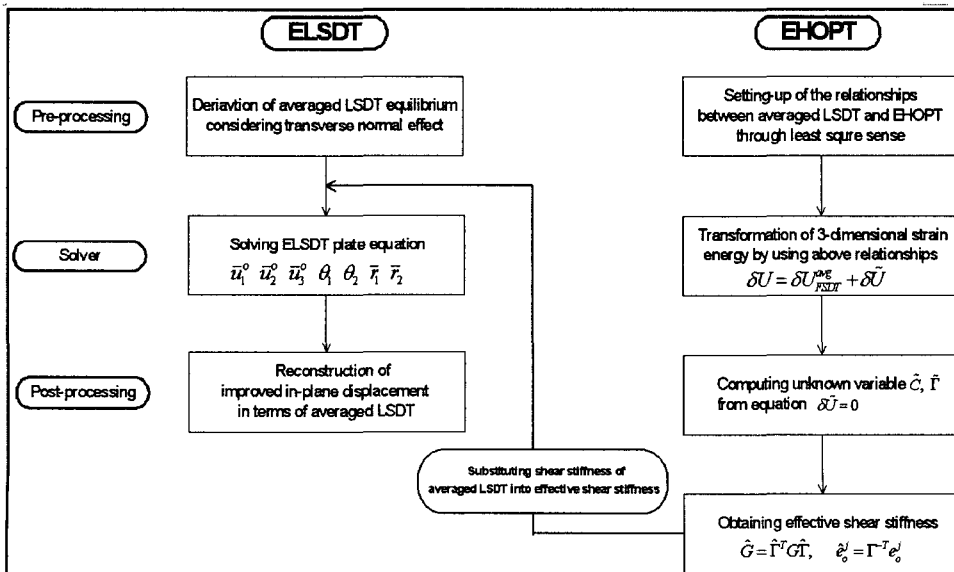


Fig. 3 Flowchart of the enhanced lower order shear deformation method

5. 결론

본 연구에서는, 개선된 저차 전단 변형 이론을 사용하여 전기-기계 복합 하중이 부과된 스마트 복합재료 적층 평판의 변형과 응력에 대해 해석을 수행하였다. 특히, 횡 수직 방향 변형 효과를 고려하기 위해 면내 수직 변위를 포물선으로 가정하여 해의 정확도를 높였다. 여러 수치예제를 통하여, 전기-기계 하중이 부과 되었을 때, 이러한 기술 방법은 꼭 필요하다는 것을 확인 할 수 있었다.

본 연구에서 제안한 개선된 저차 전단이론은 유한요소 정식화를 수행할 때, C_0 연속 조건을 만족하는 형상함수만을 필요로 하기 때문에, 유한 요소의 구현에 편리성이 있고 다양한 상용 유한요소 소프트웨어에서도 구현이 가능하다. 추후 본 연구에서 제안된 이론에 기반을 둔 유한요소를 개발할 계획이다.

후 기

이 논문은 2006 년도 유한요소법을 지원하는 세 계수준의 과학기술 범용 패키지 개발사업에 의해 지원되었음.

참고문헌

- (1) Lo, K. H., Christensen, R. M., and Wu, F. M., 1977, "A Higher-Order Theory of Plate Deformation Part 2: Laminated Plates," *Transaction of the ASME J. App. Mech.*, Vol. 44, pp. 669~676.
- (2) Levinson, M., 1980, "An Accurate Simple Theory of the Statics and Dynamics of Elastic Plates," *Mech. Research Communications*, Vol. 7, pp. 343~350.
- (3) Reddy, J. N., 1987, "A Generalization of Two-Dimensional Theories of Laminated Plates," *Comm. in Num. Meth. In Eng.*, Vol. 3, pp. 173~180.
- (4) Cho, M. and Parmerter, R. R., 1992, "An Efficient Higher-Order Plate Theory for Laminated Composites," *Composite Structures*, Vol. 20, pp. 113~123.
- (5) Carrera, E., 2003, "Historical Review of Zig-Zag Theories for Multilayered Plates and Shells," *Applied Mechanics Review*, Vol. 56, pp. 287~308.
- (6) Cho, Y. B. and Averill, R. C., 2000, "First-Order Zig-Zag Sublaminated Plate Theory and Finite Element Model for Laminated Composite and Sandwich Panels," *Composite Structures*, Vol. 50, No. 1, pp. 1~15.
- (7) Cho, M. and Oh, J., 2004, "Higher Order Zig-Zag Theory for Fully Coupled Thermo-Electric-Mechanical Smart Composite Plates," *Int. J. of Solids & Structures*, Vol. 41, No. 5-6, pp. 1331~1356.
- (8) Oh, J. and Cho, M., 2004, "A Finite Element Based on Cubic Zig-Zag Plate Theory for the Prediction of Thermo-Electric-Mechanical Behaviors," *Int. J. of Solids & Structures*, Vol. 41, No. 5-6, pp. 1357~1375.
- (9) Whitney, J. M., 1972, "Stress Analysis of Thick Laminated Composites and Sandwich Plates," *J. of Comp. Mat.*, Vol. 6, pp. 426~440.
- (10) Ray, M. C., Bhattacharya, R. and Samanta, B., 1993, "Exact Solution for Static Analysis of Intelligent Structures," *AIAA J.*, Vol. 31, No. 9, pp. 1684~1691.
- (11) Sheikh, A. H., Topdar, P. and Halder, S., 2001, "An Appropriate FE Model for Through-Thickness Variation of Displacement and Potential in Thin/Moderately Thick Smart Laminates," *Composite Structures*, Vol. 51, pp. 401~409.