

입자법을 이용한 비선형성 자유표면 유동의 수치 시뮬레이션

이병혁* · 박종천* · 정성준* · 류민철** · 김용수** · 김영훈***

*부산대학교 조선해양공학과

**대우조선해양(주) 선박해양 기술연구소

***한국조선협회 조선인력개발센터

Numerical Simulation of Non-linear Free-surface Motions Using Moving Particle Semi-implicit(MPS) Method

BYUNG-HYUK LEE*, JONG-CHUN PARK*, MIN-CHEOL RYU**, YONG-SOO KIM** AND YOUNG-HUN KIM***

*Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University, Busan, Korea

**Ship and Ocean R&D Institute, Daewoo Shipbuilding and Marine Engineering Co, Ltd, Geoje, Korea

***Ship Building HRD Center, The Korea Shipbuilder's Association, Seoul, Korea

KEY WORDS: Particle method 입자법, Computational fluid dynamics(CFD) 전산유체역학, Moving particle semi-implicit method(MPS) 입자간 상호작용 모델, Kernel function 커널함수, Non-linear free-surface flow 비선형성 자유표면 유동, Incompressible flow 비압축성 유동, Dam-broken problem 댐붕괴 문제

ABSTRACT: A particle method, recognized as one of gridless methods, has been developed to investigate non-linear free-surface motions interacting with structures. This method is more feasible and effective than conventional grid methods for solving flow fields with complicated boundary shapes. The method consists of particle interaction models representing pressure gradient, diffusion, incompressibility, and the free-surface boundary conditions without grids. In the present study, broken dam problems with various viscosity values are simulated to validate the developed method.

1. 서 론

연속체의 수치 시뮬레이션 법에는 격자격을 이용하는 방법이 넓게 사용되고 있다. 하지만 복잡한 3차원 형상에 대한 격자생성에 많은 어려움이 있고 방대한 시간이 소요된다. 또한 경계면이 크게 변형하는 문제는 격자가 꼬이는 등의 문제로 인해 계산을 할 수 없는 상황에까지 이르게 된다. 한편 입자를 사용하는 SPH법(Monaghan, 1988), PIC법(Evans and Harlow, 1957), PIC법의 계량인 FLIP법(Brackbill and Ruppel, 1986), MPS법(Koshizuka and Oka, 1996) 등은 격자생성의 복잡한 작업이 불필요하며, 경계면이 크게 변형되는 문제에도 적용될 수 있는 수치 시뮬레이션 기술이다. 입자를 이용한 수치시뮬레이션 방법은 비선형성 자유표면 유동 수치시뮬레이션의 경우에 있어서, 격자를 이용한 해석방법보다 복잡한 형상의 물리현상을 해석할 수 있는 가능성을 가지고 있다. 또한 입자를 이용한 수치시뮬레이션 방법은 이류항(Convection)의 계산을 입자의 완전한 라그랑지안(Lagrangian) 접근에 의해 입자의 이동으로 계산함으로써 오일러(Eulerian) 방법에서 심각하게 유발되는 수치확산(Numerical diffusion)을 줄일 수 있다.

본 논문에서는 비압축성 유동의 수치 시뮬레이션을 위하여 Koshizuka and Oka(1996)이 제안한 MPS(Moving particle

semi-implicit method)법을 기초로 새로운 입자법 기술을 개발하는 것을 목적으로 하며, 개발된 입자법을 비압축성 유체의 댐붕괴 문제에 적용하여 그 타당성을 확인하였다.

2. 지배방정식

비압축성 점성 유체의 운동에 관한 지배방정식은 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식이다.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \tag{2}$$

여기서, \vec{u} 는 속도벡터, t 는 시간, ∇ 은 구배 연산자, P 는 압력, ν 는 동점성계수, \vec{F} 는 외력을 각각 나타낸다.

연속방정식 식 (1)은 격자법에서 일반적으로 속도의 발산(Divergence)으로 쓰여지는 반면, 본 연구에서는 밀도의 발산으로 쓰여졌다. Navier-Stokes 방정식 식 (2)의 좌변은 이류항을 포함한 라그랑지안의 전미분(Total derivative) 형태이고, 입자의 직접적인 이동에 의해 계산된다. 한편, 우변은 압력 구배항, 점성항 그리고 외력항으로 구성되어 있다. 비압축성 점성 유동을 시뮬레이션 하기 위해서는 압력 구배항, 점성항 및 비압축

교신저자 박종천: 부산광역시 금정구 장전동 산30

051-510-2480 jcpark@pusan.ac.kr

성을 나타내는 입자간의 상호작용 모델이 필요하며, 본 연구에서는 이러한 모델들에 대하여 Koshizuka and Oka(1996)에 의해 제안된 MPS법을 도입하기로 한다. 각각의 모델들에 대한 상세한 검증은 이병혁 등(2007)에 소개되어 있다.

3. 입자간 상호작용 모델

MPS법에서는 연속체의 이산적인 계산을 입자 상호작용 모델을 통해서 행한다. 즉, 지배방정식의 편미분 연산자에 대응하는 입자간 상호작용 모델을 만들고, 지배방정식 각각의 항과 등가인 입자 상호작용 모델로 치환한다.

3.1 커널 함수(Kernel function)

연속 유체는 입자의 속도성분, 질량, 압력과 같은 물리량으로 나타내어진다. 유체의 흐름은 입자들의 상호작용 움직임에 의해 가시화된다. 따라서 지배방정식은 입자간의 상호작용으로 표시할 수 있다. MPS법에서 입자 상호작용은 커널 함수에 기초하여 이루어져 있다. 본 연구에서 사용한 커널 함수의 구체적인 식과 그림은 각각 식 (3)과 Fig. 1에 나타나 있다.

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & (0 \leq r < r_e) \\ 0 & (r_e < r) \end{cases} \quad (3)$$

여기에서 r 은 두 입자 사이의 거리이고, r_e 는 입자 상호작용 범위를 나타내는 커널 크기(Kernel size)이다. 커널 함수는 두 입자 사이의 거리 즉 중심 입자에서 주변 입자까지의 거리에 따라 입자 각각에 대하여 물리량의 가중치를 주는 것이다. 임계거리 r_e 는 초기 입자 배치 상태에서 평균 입자간 거리 l_0 에 임의의 값을 곱하여 얻는다.

3.2 구배 모델(Gradient model)

MPS법에서 입자 i 위치에서의 구배 모델은 입자 i 와 그 주변 입자 j 사이에서 구배 벡터를 $(P_j - P_i) \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}$ 으로 계산하고 이것을 커널 함수로 평균화 한 것이다(Fig. 2). 구배 모델에서는 동일한 입자에 대한 구배 벡터는 고려하지 않는다.

$$\langle \nabla P \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{P_j - P_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right] \quad (4)$$

식 (4)에서 d 는 계산 공간의 차원이고, n^0 는 초기 입자 배치 상태에서의 입자수밀도(Particle number density)이다. 입자 i 의 입자수밀도는 식 (5)와 같이 정의한다.

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \quad (5)$$

식 (5)는 주변의 입자 j 의 커널 함수의 합을 취한 것이다. 식

(5)에서 중심입자 i 는 입자수밀도 계산에 포함하지 않는다. 체적 V 중에 질량 m 의 입자가 N 개 들어 있다고 하면 밀도는

$$\rho = \frac{mN}{V} \quad (6)$$

이다. 입자수밀도의 정의로부터 N 을 입자수밀도로, V 를 커널 함수의 적분으로 근사할 수 있다.

$$\frac{N}{V} \cong \frac{\langle n \rangle}{\int w dv} \quad (7)$$

따라서 밀도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho \cong \frac{m \langle n \rangle}{\int w dv} \quad (8)$$

커널 함수의 임계거리가 일정하면 커널 함수의 적분도 일정하므로 밀도는 입자수밀도에 비례한다. 따라서 입자수밀도의 물리적 의미는 밀도이다.

3.3 확산(Laplacian) 모델

수학 연산자인 라플라시안(Laplacian, ∇^2)은 물리적으로 확산을 의미하며, Fig. 3에서 표시하는 바와 같이 입자 i 가 갖는 물리량의 일부를 주위의 입자 j 쪽으로 커널 함수의 분포에 따라 분배하는 역할을 해 준다.

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle = \frac{2d}{\lambda n_i} \sum_{j \neq i} [(\phi_j - \phi_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)] \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) |\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2}{\sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)} \cong \frac{\int_V w(r) r^2 dv}{\int_V w(r) dv} \quad (10)$$

식 (9)에서 d 는 계산 공간의 차원이고, λ 는 해석해와 동일한 분산을 유지하기 위해 사용하는 계수이다.

3.4 비압축성 모델

만약 입자의 질량이 모두 동일하다면, 유체의 밀도는 입자수 밀도에 비례하므로 연속방정식 식 (1)은 입자수밀도가 일정하다는 조건과 동일하다.

MPS법에서는 비압축성 유동의 계산 알고리즘으로서 SMAC(Simplified marker and cell)법과 거의 유사한 알고리즘을 사용한다(Fig. 4). 매 시간스텝은 양과 음의 2단계로 나눈다. 먼저, 시각 n 에 있어서 입자의 위치, 속도, 압력을 각각 \vec{r}_i^n , \vec{u}_i^n , P_i^n 로 한다. 제 1단계 즉 양적인 단계에서는 점성과 외력만을 고려하여 입자의 중간속도인 \vec{u}_i^* 를 계산하고, 입자의 중간속도 \vec{u}_i^* 를 이용하여 입자의 중간위치 \vec{r}_i^* 를 계산한다. 즉,

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i^n + \Delta t \vec{u}_i^* \quad (11)$$

식 (11)에 의한 입자의 이동은 격자를 사용하는 방법에 있어서 이류항의 계산에 해당된다. 계산된 입자의 중간 위치를 이용하여 중간의 입자수밀도 n_i^* 를 계산할 수 있다.

제 2단계 즉 음적인 단계에서는 먼저 압력의 포아송(Poisson) 방정식을 계산한다.

식 (12)의 우변 즉 포아송 방정식의 소스항은 양적인 단계에서 계산된 입자수밀도 n_i^* 와 초기 입자수밀도 n^0 와의 차로 이루어

$$\langle \nabla^2 P \rangle_i^{n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i^* - n^0}{n^0} \quad (12)$$

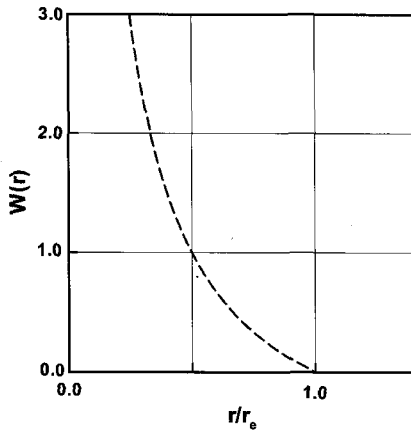


Fig. 1 The kernel employed in the present study

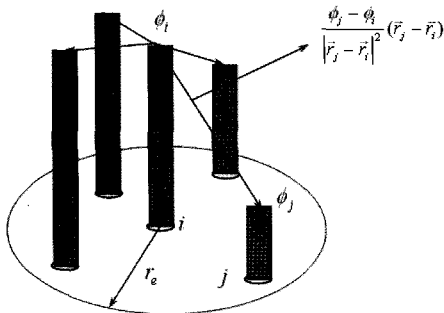


Fig. 2 The gradient model of MPS method

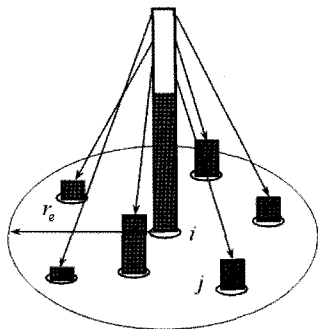


Fig. 3 The Laplacian model of MPS method

져 있으며 압력에 의해 입자가 집중되는 것을 방지하다. 식 (12)의 좌변은 확산 모델인 식 (9)에 의해 연립 1차방정식으로 이산화 할 수 있으며, 적절한 반복해법에 의해 구할 수 있다. 본 연구에서 사용한 반복법은 CG(Conjugate gradient)법이다. 식 (12)에서 계산된 압력을 식 (13)에 대입하여 음적인 단계에서의 속도 수정치 \vec{u}_i' 를 계산한다. 단, 우변의 압력 구배 계산은 MPS법의 구배모델 식 (4)를 사용한다.

$$\vec{u}_i' = -\frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla P^{n+1} \rangle_i \quad (13)$$

최종적으로, 시각 $n+1$ 에서 입자의 속도와 위치는 각각 식 (14), (15)에 의해 새롭게 얻어진다.

$$\vec{u}_i^{n+1} = \vec{u}_i^* + \vec{u}_i' \quad (14)$$

$$\vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^* + \Delta t \vec{u}_i' \quad (15)$$

3.5 벽 경계 조건

본 연구에 사용되는 입자는 유체 입자(Fluid particles), 벽면 본 방법과 일반적인 차분법에 있어서의 SMAC법과의 차이는 이류항의 계산이 입자의 이동에 의해 직접 계산된다는 것과 압력의 포아송 방정식에 있어서 우변의 소스항이 속도의 발산이 아닌 입자수밀도로 표시되는 것이다.

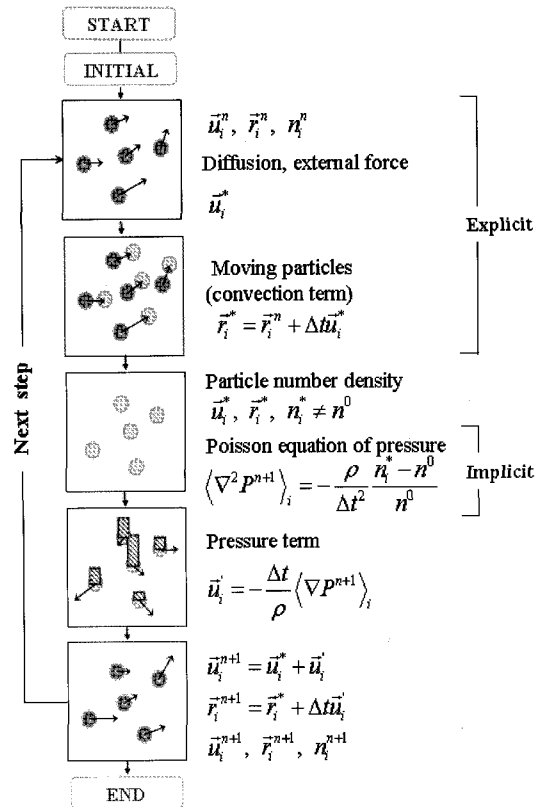


Fig. 4 Algorithm of the present particle method

입자(Wall particles) 그리고 벽 내의 가상입자로 구성되어 있다. 벽면 입자는 유체 입자와 가상입자 사이의 입자이다. 유체 입자와 벽면 입자는 압력의 계산에 포함시킨다. 벽면 입자를 압력 계산에 포함시키는 이유는 유체 입자가 벽면 주변에 집중될 경우 벽면 입자의 압력을 크게 하여 벽면에 유체 입자가 집중되는 것을 방지하기 위함이다. 벽 내 가상 입자의 배치는 벽면 입자의 입자수밀도 계산이 적절히 되도록 커널 함수의 임계거리까지 벽면 입자의 외측에 배치한다.

입자법의 물리량 계산은 주변 입자의 물리량으로부터 계산 되기 때문에 경계면에서의 물리량 설정이 매우 중요하다. 따라서 벽 내 가상 입자들의 물리량에 대한 정보가 필요하다. 본 연구에 사용된 벽 경계 조건은 이동경계조건이다. 이동경계조건은 식 (16)에 의해 계산되어지며, 식 (16)에서 \vec{n} 과 \vec{t} 는 각각 벽면의 수직벡터와 수평벡터이다.

$$\begin{aligned} P_{dummy} &= P_i + \rho gh, \quad x_{dummy} = 2x_{wall} - x_i \\ \vec{u}_{dummy} \cdot \vec{n} &= 2\vec{u}_{surface} \cdot \vec{n} - \vec{u}_i, \quad \vec{u}_{dummy} \cdot \vec{t} = \vec{u}_i \cdot \vec{t} \end{aligned} \quad (16)$$

3.6 자유표면 경계조건

자유표면 경계조건으로 동역학적 경계조건과 운동학적 경계 조건이 있다. 본 연구에서 동역학적 경계조건은 자유표면 입자의 압력을 대기압과 동일한 0의 값으로 고정하고, 운동학적 경계조건은 자유표면 입자를 직접 이동하여 만족시켰다. 두 경계 조건을 만족시키기 위해서는 자유표면 입자의 탐색이 선행되어야 한다. 식 (17)을 통해 자유표면 입자를 탐색한다.

$$n_i^* < \beta n^0 \quad (17)$$

자유표면 입자는 근방의 입자들에 비해 상대적으로 입자수가 작기 때문에 입자수밀도가 작다. 식 (17)에서 β 는 1.0미만의 상수이며 본 연구에서는 0.97로 고정하였다. 이 조건은 자유표면의 형상을 고려할 필요 없이 모든 입자에 대해 동일하게 정의할 수 있으므로 유체 내부에 기체가 생기거나 유체가 분열·합체되는 경우에도 사용할 수 있다.

4. 수치시뮬레이션

4.1 댐 붕괴 문제의 수치시뮬레이션

앞서 설명한 입자 상호작용 모델을 2차원의 댐 붕괴 문제에 적용하였다. Fig. 6은 댐 붕괴 문제의 초기 형상을 나타낸다. 물기둥의 폭과 높이는 각각 L 과 $2L$ 이다. 물기둥은 사각박스의 왼쪽에 위치한다. 본 시뮬레이션에서 중력가속도 g 는 $9.81m/s^2$, 밀도는 $1000kg/m^3$, L 은 $150mm$ 그리고 동점성계수 ν 는 $10^{-6}m^2/s$ 로 고정하였으며, 표면장력의 영향은 무시하였다. 커널 함수의 임계거리는 지배방정식의 점성항, 구배항 그리고 자유표면 입자 탐색에 대해 $2.1l_0$, 압력의 포아송 방정식에 대해 $4.0l_0$ 를 사용하였다. 본 시뮬레이션에서 사용한 총 입자의 개수는 4044개이다.

Fig. 7은 붕괴되는 물기둥 앞부분(Leading edge)의 위치 변화를 보여준다. x 축($t(2g/L)^{0.5}$)은 시간에 대한 무차원수를, y 축(Z/L)은 공간에 대한 무차원수를 각각 나타낸다. 그림에서 기호(Symbol)들은 선행된 실험 결과를 나타내며, 선은 선행된 시뮬레이션 결과를 나타낸다. 본 시뮬레이션 결과가 선행된 계산 결과들과 잘 일치함을 알 수 있다. 하지만 선행된 실험결과와는 다소 차이를 보이고 있는데, 이는 실험 조건과 시뮬레이션 조건이 다소 상이하여 비롯된 것이라고 볼 수 있다.

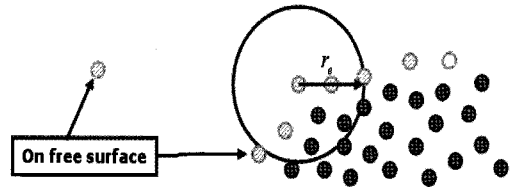


Fig. 5 Free-surface model of MPS method

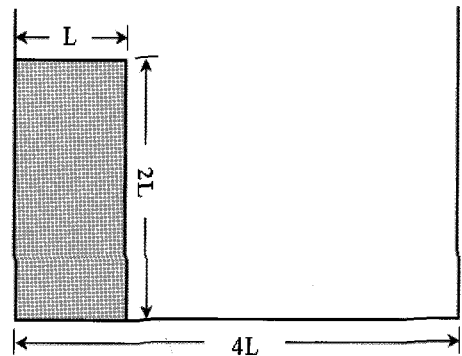


Fig. 6 Schematic of set up for dam-broken simulation

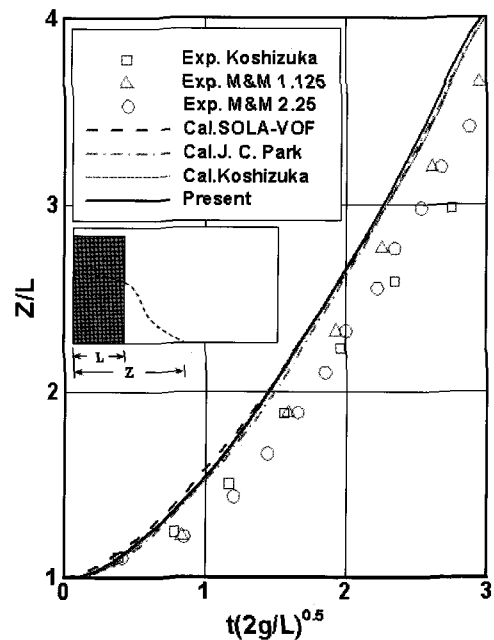
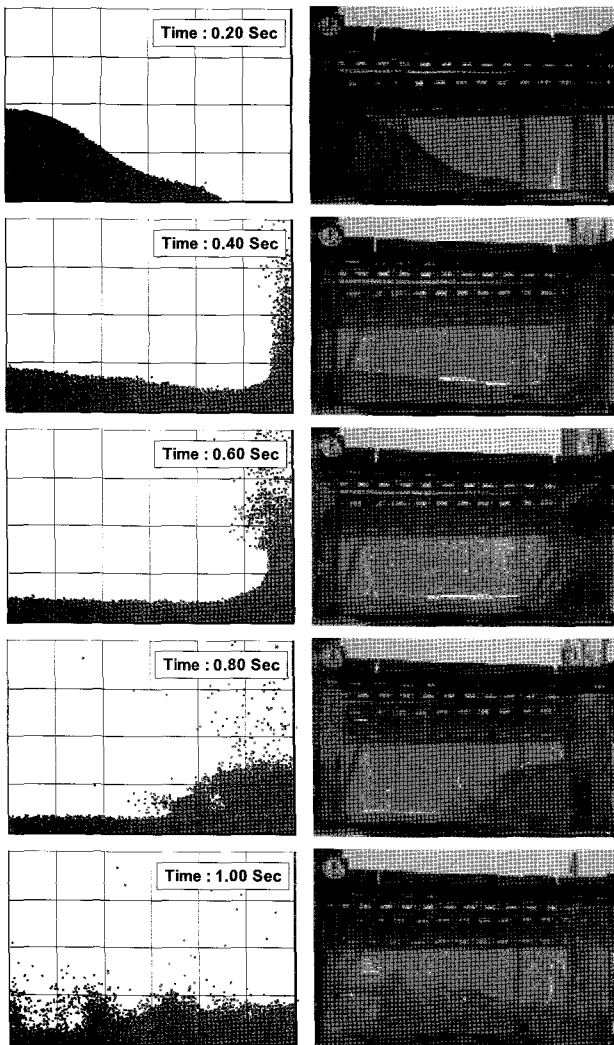


Fig. 7 Comparison with experiments and other simulated results for dam-broken problem



(a) Present method (b) Experiment

Fig. 8 Comparison of free-surface profiles between the present numerical result and the experimental result of Koshizuka et al. (1995)

Fig. 8는 본 시뮬레이션과 Koshizuka et al.(1995)가 수행한 실험의 시간에 따른 자유표면 형상을 나타내고 있다. 시간 0.2sec에서 붕괴된 물기둥의 시작 끝 부분은 왼쪽 벽으로부터 $3L$ 의 위치에 도착한다. 시간 0.4sec 일 때 물기둥의 시작 끝 부분은 오른쪽 벽에 부딪친 후에 오른쪽 벽을 따라 연직 상승한다. 시간 0.6sec 일 때 벽면을 따라 연직 상승한 물기둥은 중력에 의해 낙하하기 시작하며, 0.8sec일 때 바닥의 물과 충돌하게 된다. 1.0sec일 때 오른쪽 벽에서 튀겨진 물은 왼쪽 벽과 충돌한다. 본 연구에서 수행된 시뮬레이션 결과는 약 0.8초 부근까지 Koshizuka et al.(1995)에 의한 실험 결과와 자유표면 형상이 잘 일치하나 그 이후는 기포류의 혼입과 유동의 난류적 거동으로 실험과 잘 일치하지 않는다. 향후 난류적 거동을 표현하는 것에 개선의 여지가 있어 보인다.

Fig. 9은 물기둥의 점성을 $10^6 \text{m}^2/\text{s}$ 에서 $10^2 \text{m}^2/\text{s}$ 까지 변화시켰을 때 붕괴되는 물기둥 앞부분의 위치 변화를 보여준다.

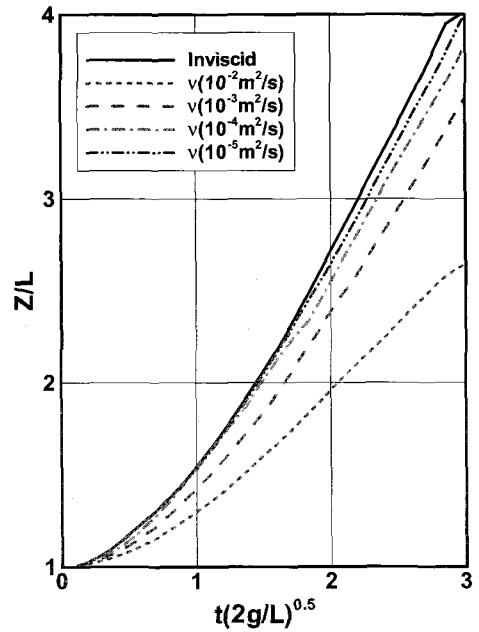


Fig. 9 Comparison with various viscosity

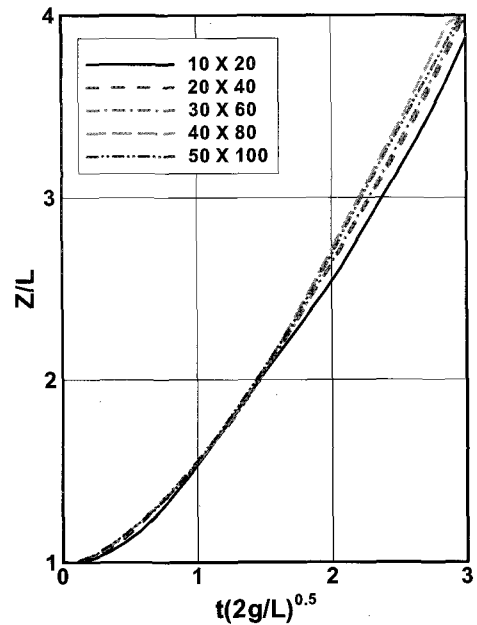


Fig. 10 Comparison with various total number of particles of water column

점성이 증가함에 따라 붕괴되는 물기둥이 오른쪽 벽면에 도달하는 시간이 증가됨을 알 수 있고, 이 결과는 Fig. 11에서도 확인할 수 있다. 점성이 증가함에 따라 붕괴되는 물기둥의 앞부분 형상이 점점 둥글게 변하며, 자유표면의 분열(Fragmentation)이 감소한다.

Fig. 10은 물기둥의 폭×높이 방향 입자의 개수에 따른 물기둥 앞부분의 위치 변화를 보여준다. 물기둥의 개수가 10×20 인 경우를 제외하고 비슷한 경향을 보이고 있다. 따라서 정확한 시뮬레이션을 위해서는 10×20 개 이상의 입자가 필요하다.

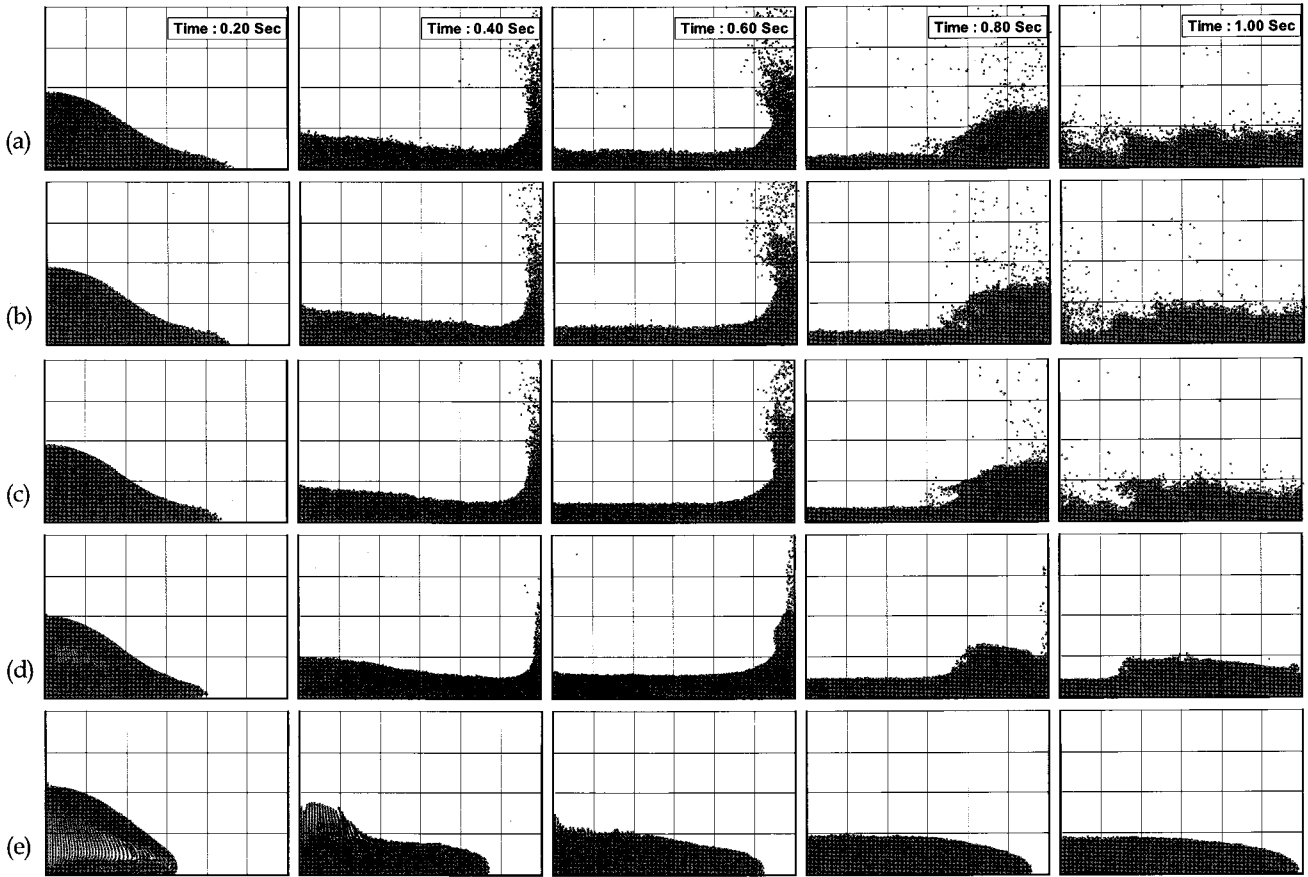


Fig. 11 Free-surface deformation and fluid fragmentation with various viscosity; (a) $\nu = 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$, (b) $\nu = 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$, (c) $\nu = 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$, (d) $\nu = 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$, (e) $\nu = 10^2 \text{ m}^2/\text{s}$.

5. 결 론

본 논문에서는 비압축성 유동의 수치 시뮬레이션을 위한 입자법을 개발하였다. 지배방정식을 MPS법(Koshizuka and Oka, 1996)의 입자 상호 작용 모델로 치환하였다. 또한 각각의 입자 상호작용 모델을 2차원 댐붕괴 문제에 적용하였으며, 시뮬레이션 결과는 선행 연구들과 잘 일치하였다. 향후 입자간 상호작용모델을 복잡한 파동과 구조물의 상호작용 문제에 적용할 예정이다.

후 기

본 연구는 대우조선해양(주)의 “유체충격에 기인한 유체-고체 간의 상호연성 시뮬레이션 기술 개발”과제의 지원으로 수행된 연구결과 중 일부임을 밝히며, 지원에 깊이 감사드립니다.

참 고 문 헌

이병혁, 박종천, 류민철, 김용수, 김영훈 (2007). “비압축성 유동 해석을 위한 입자법 수치 시뮬레이션 기술 개발”, 한국해

양공학회지, 제21권, 제4호, pp 8-14.

Brackbill, J.U. and Ruppel, H.M. (1986). "FLIP: A Method for Adaptively Zoned, Particle-in-Cell Calculations of Fluid Flows in Two Dimensions", J. Comput. Phys., Vol 65, pp 314-343.

Evans, M.W. and Harlow, F.H. (1957). "The Particle-in-Cell Method for Hydrodynamics Calculations", LA-2139, Los Alamos National Laboratory.

Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y. (1995). "A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation", J. Comput. Fluid Dynamics, Vol 4, pp 29-46.

Koshizuka, S. and Oka, Y. (1996). "Moving-Particle Semi-implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid", Nucl. Sci. Eng., Vol 123, pp 421-434.

Monaghan, J.J. (1988). "An Introduction to SPH", Comput. Phys. Comm., Vol 48, pp 89-96.

2007년 11월 20일 원고 접수
2007년 12월 10일 최종 수정본 채택