

분기관을 이용한 피스톤 펌프의 압력 맥동에 관한 연구

이홍선[†], 임태형⁺⁺, 천세영⁺⁺, 권순광⁺⁺⁺, 이창돈⁺⁺⁺⁺, 양순용^{*}

(논문접수일 2007. 10. 9, 심사완료일 2007. 11. 21)

A Study on Pressure Ripple of Axial Piston Pump using Branch Hose

Lee Hong-Seon[†], Lim Tae-Hyeong⁺⁺, Chun Se-Young⁺⁺,
Kwon Soon-Kwang⁺⁺⁺, Lee Chang-Don⁺⁺⁺⁺, Yang Soon-Young^{*}

Abstract

The pressure ripple in most hydraulic systems is the root cause of their noise and vibration. This paper reduced the pressure ripple using side branch hose for an axial piston pump applied to small excavator. First, in calculating open area, a new method using groove area of valve plate is proposed. Simulation model in AMESim environment is developed to verify proposed method, find effective length and diameter of branch hose. Finally, the comparisons with experiment results show that the proposed method is more effective than previous method in reducing the pressure ripple.

Key Words : Axial piston pump(피스톤 펌프), Open area(개구면적), Valve plate(밸브 판), Side branch hose(측면 분기관), Pressure ripple (압력맥동)

1. 서 론

도심 작업이 많은 소형 굴삭기의 경우 운전자에 대한 소음 및 진동은 물론 작업장 주위에 대한 작동소음도 문제가 되고 있다.

사판식 피스톤 펌프는 엔진의 기계적 에너지를 유압 에

너지로 변환하며 고효율 및 고출력으로 널리 사용되지만, 고가이고 토출 압력에 대한 맥동이 큰 단점을 가진다. 사판식 피스톤 펌프의 기구적 특성에 기인된 유량 맥동은 강관과 고압 호스 등으로 구성된 관로계의 임피던스와 결합하여 압력 맥동으로 나타나며, 이 압력 맥동이 관로를 따라 전파되면서 소음 및 진동을 야기하고, 나아가 유압부품의 내구성을 악화

[†] 현대중공업(주)

⁺⁺ 신호시스템(주)

⁺⁺⁺ 울산대학교 기계자동차공학부 대학원

⁺⁺⁺⁺ 울산대학교 2단계 BK21 지능형 자동차 부품 기술 개발팀

^{*} 교신저자, 울산대학교 기계자동차공학부(soonyy@mail.ulsan.ac.kr)

주소 : 680-749 울산광역시 남구 무거2동 산 29번지

시킨다. 사판식 피스톤 펌프의 해석 및 제어에 관한 연구로는 Zeiger^(1,2) 등이 사판 제어를 위한 비선형 모델을 구축하였고 Schoenau⁽³⁾, Kaliaferis⁽⁴⁾ 등은 사판 제어 토크 계산에 회귀법을 이용하여 수치 해석과 실험을 수행하였다. Kim⁽⁵⁾ 등은 펌프의 파라미터 규명을 위한 민감도 해석을 수행하였고, Marning^(6,10)에 의해 고차 비선형 모델에 대한 간략화 등 제어 모델에 관한 연구가 다수 진행된 바 있다. 또한 맥동을 줄이기 위한 연구로는 Bahr⁽¹¹⁾ 등의 사판각의 일정 제어를 위한 진동 해석이 있다.

본 논문에서는 소형 굴삭기에 장착되는 사판식 피스톤 펌프를 상용 S/W인 AMESim 환경에서 모델링하였다. 송출흡을 가지는 밸브 판의 개구면적 도출을 위해서 실린더와 흡입 및 토출구의 겹침 면적으로 개구면적을 도출하는 기존의 방식에 대하여 본 논문에서는 송출흡의 면적으로 개구면적을 도출하는 방식을 제안하였다. 이 두 가지 방식에 대해서 시뮬레이션을 수행하였고, 실차 시험값과 비교하여 제안한 방식의 타당성을 검증하였다. 그리고 용량 공명기인 측면 분기 관의 길이와 직경 변화에 따른 압력 맥동 감쇠 특성을 시뮬레이션 및 실차 시험을 통해 구하였다.

2. 펌프 해석

2.1 구조 및 수학적 모델

사판식 피스톤 펌프의 구조를 Fig. 1에 나타내었다. 구동축이 엔진 토크를 전달받아 피스톤이 실린더 블록 내에서 왕복 운동하고 피스톤 스트로크는 제어 피스톤(control piston)에 의한 사판각으로 결정된다. 피스톤의 왕복 운동으로 작동 유를 흡입 및 송출하게 되고, 이 때 흡입량과 송출량은 밸브 플레이트의 흡입구 및 송출구의 면적에 의해 결정된다.

N 개의 피스톤을 가지는 사판식 피스톤 펌프의 경우 일반적으로 $(N+2)$ 개의 상태변수를 가진다. 본 논문에서 고려한 펌프의 경우 10개의 피스톤을 가지므로 12개의 변수 $(\alpha, \theta, P_1, P_2, \dots, P_{10})$ 를 가진다. α 는 사판각, θ 는 피스톤의 회전각, P_n 은 각 피스톤이 형성하는 실린더 챔버 내의 압력이다.

피스톤은 Fig. 2에서 x 축을 따라 움직이며 R 은 피스톤 폭 치 반경, e 는 사판 회전 중심과 x 축 사이의 편차, a 는 피스톤 볼조인트 중심과 사판 회전 중심의 x 축상 편차이다. 이 때 피스톤의 변위, 속도, 가속도는 식 (1)~(3)으로 표현된다^(1,2).

$$x_p = (e + R\sin\theta)\tan\alpha + \frac{a}{\cos\alpha} \quad (1)$$

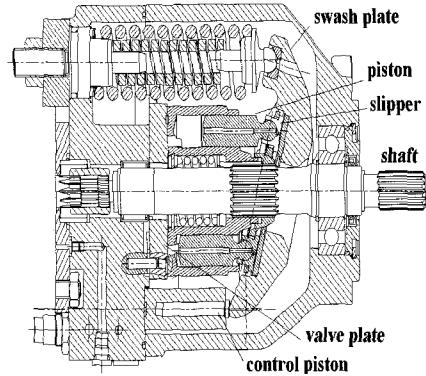


Fig. 1 Axial piston pump

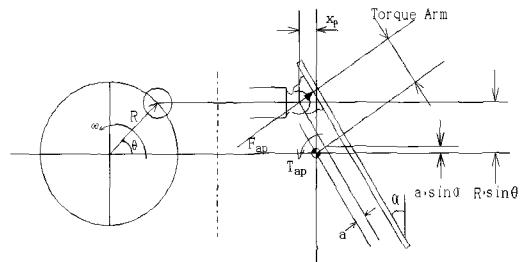


Fig. 2 Piston and swash plate

$\dot{\theta} = \omega$ 으로 두면

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= R\omega\cos\theta\tan\alpha + R\sin\theta \frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{\alpha} \\ &+ \frac{\dot{\alpha}\sin\alpha}{\cos^2\alpha}a + \frac{\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha}e \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p &= -\omega^2 R\sin\theta\tan\alpha + 2\omega R\cos\theta \frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{\alpha} \\ &+ 2R\sin\theta \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\dot{\alpha}^2 + R\sin\theta \frac{1}{\cos^2\alpha}\ddot{\alpha} \\ &+ \left(\frac{\ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}^2\tan\alpha}{\cos^2\alpha} \right)e + \left(\frac{2R\dot{\alpha}\omega}{\cos^2\alpha} + R\omega\tan\alpha \right)\cos\theta \\ &+ \left(\frac{(1+2\tan^2\alpha)\dot{\alpha}^2}{\cos\alpha} + \frac{\ddot{\alpha}\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \right)a \end{aligned} \quad (3)$$

n 번 째 실린더 챔버 내의 체적은 다음과 같다.

$$V_n = V_{0n} - A_p x_{pn} = V_{0n} - A_p R\sin\theta_n \tan\alpha_n \quad (4)$$

여기서 A_p 는 피스톤 단면적, V_{0n} 는 n 번째 피스톤 변위에

의한 초기 체적이다.

하나의 피스톤에 대한 유량은 다음의 오리피스 방정식으로 표현된다^(1,2).

$$Q_{dn} = -A_{dn} C_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|P_d - P_n|} \operatorname{sign}(P_d - P_n) \quad (4)$$

$$Q_{in} = -A_{in} C_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|P_i - P_n|} \operatorname{sign}(P_i - P_n) \quad (5)$$

식 (4)를 시간에 대해 미분하면 식 (6)이 되고, n 번째 피스톤의 시간에 대한 압력변화는 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다 (3,4).

$$\frac{dV_n}{dt} = - \left(A_p R \cos \theta \tan \alpha \omega + A_p R \frac{1}{\cos^2 \alpha} \sin \theta \dot{\alpha} \right) \quad (6)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{\beta}{V_n} \left\{ Q_p + A_p R \left(\tan \alpha \cos \theta \omega + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \sin \theta \dot{\alpha} \right) \right\} \quad (7)$$

한편, Q_p 는 밸브 플레이트의 노치와 포트를 통하여 발생하는 유량 Q_{p1} 과 실린더 내벽과 피스톤 슈에서 발생하는 누설유량 Q_{p2} 의 합이다.

여기서

$$Q_{p1} = \operatorname{sign}(P_{out} - P_n) C_d A(\theta) \sqrt{\frac{2|P_{out} - P_n|}{\rho}}$$

$$Q_{p2} = -C_{leak} P_p$$

P_{out} 은 유로의 연결 상태에 따라 여러 가지 압력값이 된다.

2.2 개구면적 도출

본 논문의 대상 펌프는 일반적인 사판식 피스톤 펌프와는 다소 다른 구조를 가진다. 중대형 굴삭기에 장착되는 일반적인 펌프는 Fig. 1과 같이 펌프 두 개가 동일 구동축에 연결된 탠덤형인데 반해 본 논문의 대상 펌프는 하나의 흡입구와 두 개의 송출구를 가지는 구조이다. 이는 밸브 판의 형상에 의해 결정되는 것으로 Fig. 3에 대상 펌프의 밸브 판의 형상 을 앞면과 뒷면으로 나타내고 있다. 흡입구는 일반적인 펌프의 밸브 판과 유사하지만(노치 2개), 송출구의 경우 노치와 송출구가 판 면을 따라 홈 형태로 가공되어 있고 밸브 판 뒷면의 네 개의 송출 구멍을 통해 2개의 주 송출 구(main supply port)로 송출한다.

개구면적은 실린더와 밸브 판의 겹침되는 면적을 가정하는 방법⁽⁶⁾과 본 논문에서 제안한 작동유가 이동하는 송출 홈의 면적으로 가정하는 방법으로 도출하여 각각 시험 결과와 비교한다.

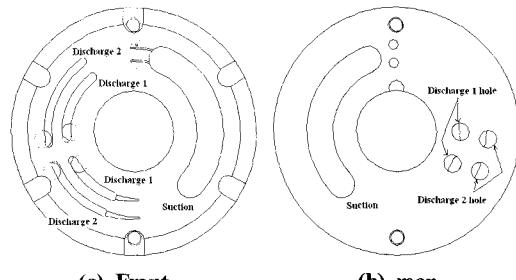


Fig. 3 Valve plate

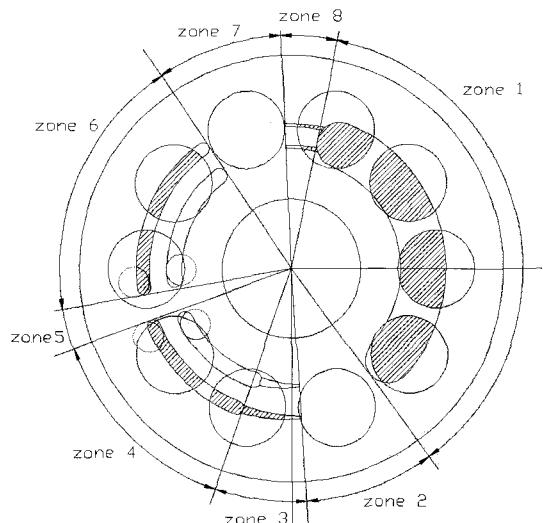


Fig. 4 Overlap area of cylinder and valve plate

2.2.1 실린더와 밸브 판의 겹침 면적

1번 실린더가 0° 에 위치하고 모든 실린더가 탱크로부터 작동유를 흡입하여 송출할 때의 예를 Fig. 4에 나타내었다. 1, 2, 9, 10번 실린더는 흡입, 4~7번 실린더는 송출, 3, 8번 실린더는 밸브 플레이트가 막혀 있으므로 흡입, 송출이 없다. 그림에서 각 실린더의 빛금 친 부분은 흡입 및 송출 면적이다. 1번 실린더가 흡입 구간인 zone 1을 지나 막혀 있는 zone 2로 이동하면서 흡입 개구면적은 작아지며 노치 구간인 zone 3에서 흡입 개구면적은 0이 된다.

반면, 이 때 송출 개구면적은 증가하며 zone 5에서 감소, zone 6에서 다시 증가, zone 7에서 감소한다. zone 8은 흡입 노치 구간이다. 이는 Fig. 5의 개구면적 선도로 나타낼 수 있으며, 흡입은 zone 1, 2, 8에서, 나머지 구간에서는 송출이 이루어진다.

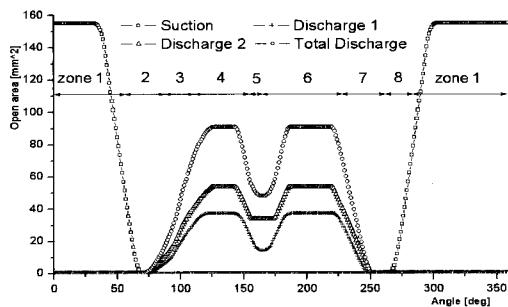


Fig. 5 Open area calculated with overlap area

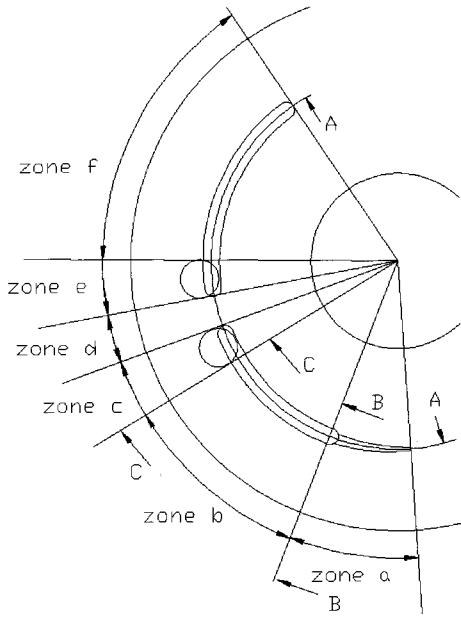
2.2.2 송출 흠의 면적

송출을 제외한 구간(zone 1, 2, 7, 8)의 개구면적은 겹침면적 도출법과 동일하나 송출 구간(zone 3~6)에서 작동유는 송출흡을 이용, 밸브 판 면을 따라 흘러 zone 4~6으로 송출된다. 이 구간을 Fig. 6 (a), (b)와 같이 zone a~f로 다시 나눌 수 있다. zone a는 노치 구간으로 폭이 넓어지면서 깊이도 동시에 커진다. zone b, f는 일정폭을 가지고 깊이만 일정하게 커지는데, 그 단면은 B-B로 시작하여 C-C로 끝나는 형태로 Fig. 6 (c), (d)와 같고, 개구면적은 Fig. 6 (e)로 등가화 된다. zone c, e는 구멍을 통해 작동유가 송출되는 구간으로 실린더와 겹치는 구간을 개구면적으로 가정하였다. 이 때, zone a~f에 걸쳐 계산된 개구면적은 Fig. 7에 나타내었다. 앞 절의 겹침 면적에 의한 개구면적 결과와 비교하여 노치부(zone a), 송출흡(zone b, f)에서의 개구면적은 유사하나 송출구(zone c, e)에서의 개구면적은 오히려 증가하여 송출구 사이(zone d)에서 최대가 됨을 확인할 수 있다. 이는 zone c, e 양 쪽의 송출구를 통해 작동유가 동시에 송출되므로 개구면적이 이들의 합으로 계산되었기 때문이다.

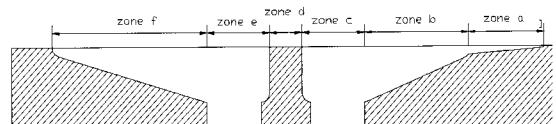
서로 다른 두 가지 개구면적에 대한 타당성을 알아보기 위해 무부하 상태에서의 폼프 송출구 압력값에 대해 실차시험 및 시뮬레이션 결과를 비교하여 Fig. 8에 나타냈다. 겹침 면적을 이용한 경우에 비해 송출 흠 면적을 이용한 경우의 압력이 실차 시험의 압력에 보다 근접함을 확인하였다.

3. 측면 분기관 길이 선정

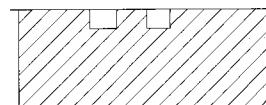
유압 관로 내 압력 파는 일정한 주기와 진폭을 가지고 조화 운동을 한다. Fig. 9에 나타낸 바와 같이 길이 l_m 의 주관로를 통하여 길이 l_s 의 분기관으로 흘러 들어갔다 나오는 유량이 이후 주관로에서의 유량과 하류 분기점에서 다시



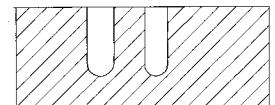
(a) Discharge zone



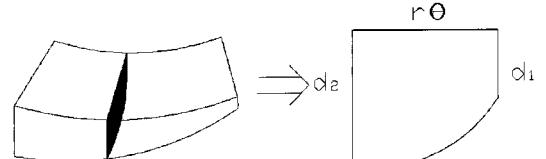
(b) Section A-A



(c) Section B-B



(d) Section C-C



(e) Open area of discharge groove

Fig. 6 Sections and open area of discharge groove

합쳐질 때 주 관로로 흐르는 압력파와 측면 분기관을 흐르는 압력파 사이에서 길이 $l_s'(2l_s)$ 의 위상차가 발생되고, 이 위상 간섭에 의해 압력 맥동을 감쇠시키는 원리를 이용한 것이

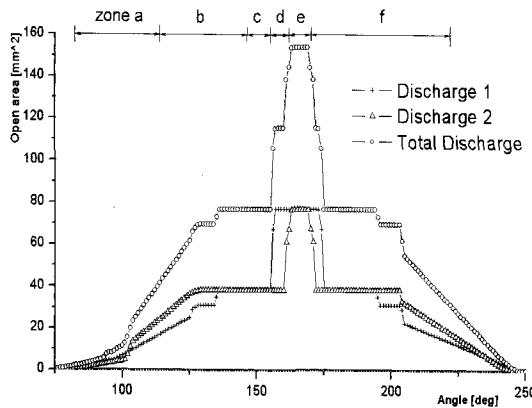


Fig. 7 Open area calculated with discharge groove

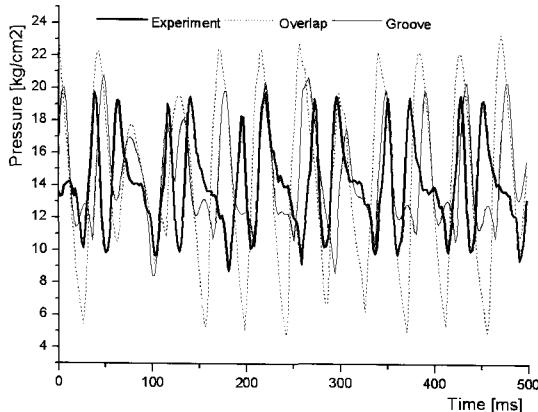


Fig. 8 Pressure ripple of simulations and experiments

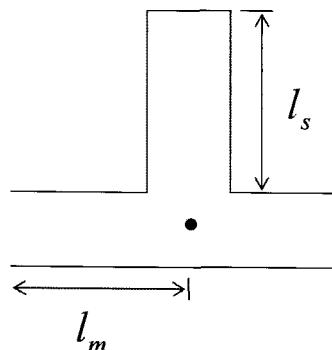


Fig. 9 Side branch

측면 분기관이다. 특히, π 의 위상차가 발생되면 완전 상쇄로 최대 감소 효과를 얻을 수 있다. Fig. 9에서 주 관로의

길이 l_m 을 지나는 맥동파와 측면 분기관 내부를 왕복한 길이 l_s 를 이동한 맥동파의 위상차가 분기점에서 π 가 되기 위해서는 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$l_s' - l_m = l_s = \frac{kc}{4f} = \frac{\lambda}{4}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (8)$$

여기서 관로 내 압력파의 속도 c 는 다음과 같다.

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho(1 + \frac{\beta D}{TE})}} \quad (9)$$

여기서 λ 는 전파계수, f 는 주파수, ρ 는 작동유의 밀도, D 는 파이프 내경, T 는 파이프 두께, β 는 작동유의 체적탄성계수, E 는 관로의 탄성계수이다. $k=1$ 로 선정하였다.

4. 시뮬레이션 모델 및 실차시험

4.1 시뮬레이션 모델

사판식 피스톤 펌프의 두 가지 개구면적에 대한 겹증과 길이와 직경, 형태에 따른 측면 분기관 특성을 알아보기 위해 상용 S/W인 AMESim을 이용하여 모델링하였다. Fig. 10은 측면 분기관의 직경 및 길이 변화에 의한 압력 맥동 특성을 비교하기 위한 대상 펌프 전체에 대한 모델이다. 1개 실린더의 흡입, 송출에 관한 모델을 Fig. 11에 나타내었다. 엔진으로부터의 토크가 ①을 통해 전달되면 회전수가 센서 ②에 의해 검출되고 사판각도가 ③을 통해 입력되면 피스톤 ⑦의 속도는 사판각 α 와 구동축의 회전각도 θ 의 함수 모델 ④에 의해 계산되어 단위 변환을 위한 게인(gain)을 통해 피스톤 속도 도출 함수 ⑤에 입력된다. 피스톤의 중공과 slipper 사이의 누설유량은 모델 ⑧로 고려되었고, 1번 포트를 통한 흡입량과 4, 5번 포트를 통한 송출량은 구동축의 회전수에 의해 결정되므로 계속 증가하는 구동축의 회전각도를 $0^\circ \sim 360^\circ$ 사이의 각도로 변환하는 모델 ⑥에 의해 흡입 개구면적을 포함한 가변 오리피스 모델 ⑨와 토출 개구면적을 포함한 ⑩에 의해 제한된다. 10개의 실린더가 사판각에 의해 각각 다른 초기 변위를 가지므로 이에 의해 형성되는 초기 체적도 다르게 적용해야 한다.

4.2 시뮬레이션 및 시험조건

소형 굴삭기에 분기관과 압력 센서를 장착하여 시험한 개략도를 Fig. 12에 나타내었다. 시뮬레이션 및 시험 조건을

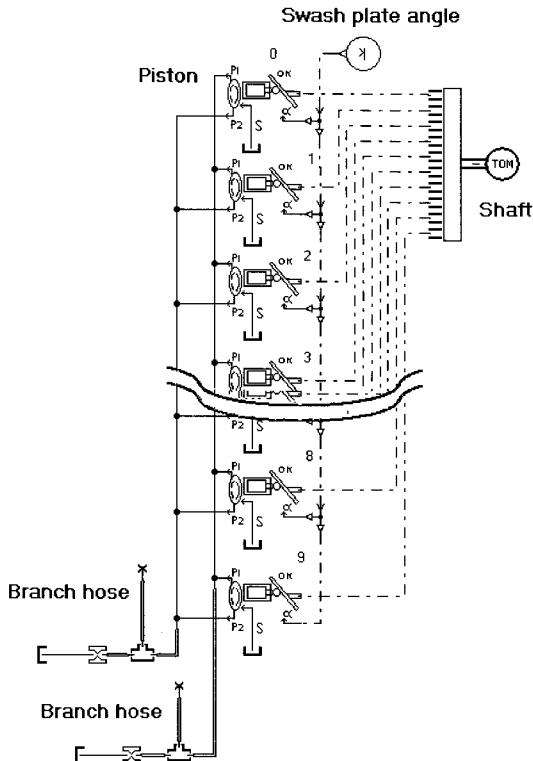


Fig. 10 AMESim model of pump

Table 1에, 시뮬레이션을 위한 파라미터를 Table 2에 나타내었다. Table 1에서 Impact type의 경우 브랜치 호스와 장착 방향이 90° 다른 것으로 Fig. 9에서 l_s 방향이 주 관로 방향이다.

5. 시뮬레이션 및 시험 결과

압력 맥동을 줄이기 위해, Table 1의 조건에서 부하별, 엔진 회전수별, 분기관의 길이 및 직경, 분기관의 적용 방식에 따라 시험한 결과를 Fig. 13에 나타내었다. 분기관을 적용하지 않았을 때의 압력 맥동을 100[%]로 하여 각 타입별 압력 맥동을 비율로 표시하였다. 무부하에서는 모든 종류의 분기관이 맥동을 줄일 수 있으나 부하가 증가할수록 맥동이 커져서 짧은 분기관의 경우 2배 가까운 맥동 진폭의 증가를 보였다. 750[mm], 850[mm]의 경우 전 영역에서 맥동이 줄어드는 것을 확인하였다.

350[mm]와 850[mm] 임팩트 타입의 분기관의 경우 분기

Table 1 Simulation and experiment conditions

Type	No Branch, Branch, Impact	Unit
Diameter	$\phi 12.5, \phi 15.5$	mm
Length	0, 350, 450, 750, 850, 950	mm
Load Pressure	0, 150, 220	bar
Revolution	1400, 1700, 2000, 2200	rpm

Table 2 Parameters of simulation

	Name	Symbol	Value
Pipe	Young's modulus	E	$2.06 \times 10^{11} N/m^2$
	Inner diameter	D	12.5mm
	Thickness	T	3.9mm
Length of main line	L_1		1000mm
Oil	Density	ρ	876 kg/m ³
	Bulk modulus	β	$1.7 \times 10^{-9} N/m^2$
	Kinematic viscosity	ν	$4.6 \times 10^{-5} m/s^2$

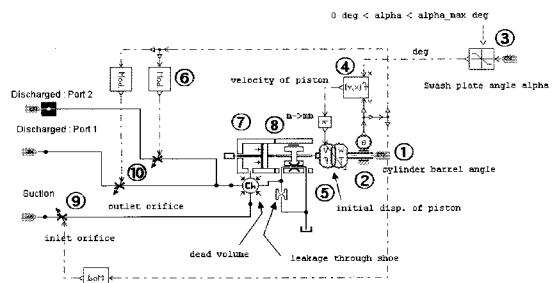


Fig. 11 AMESim pump model for a cylinder

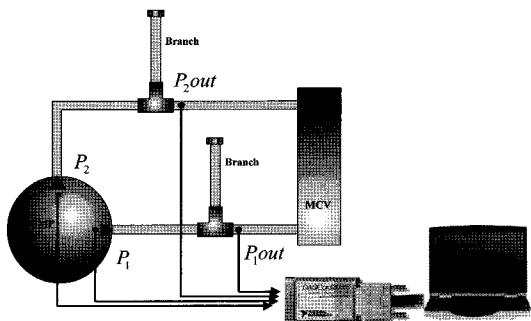
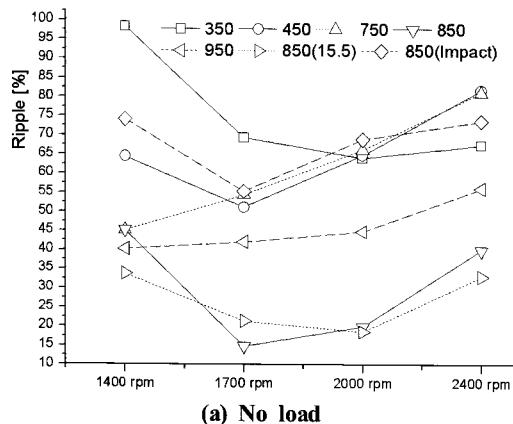
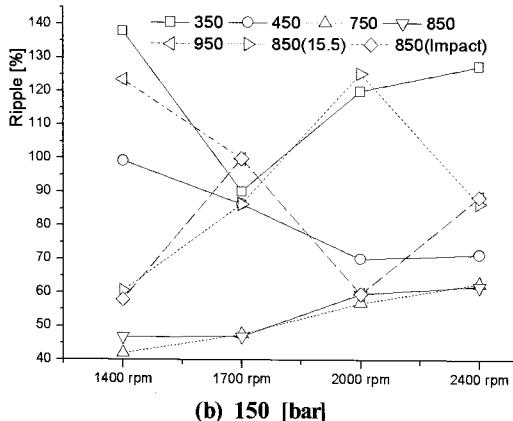


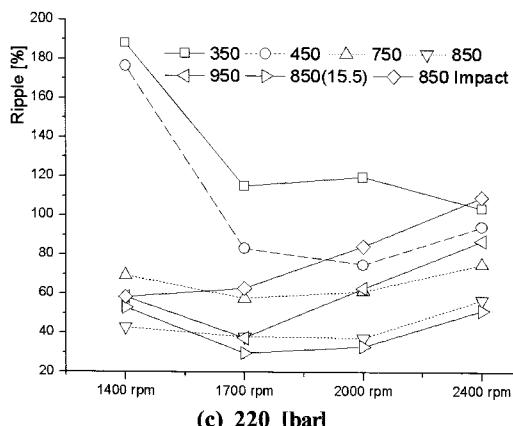
Fig. 12 Schematic of experiment



(a) No load



(b) 150 [bar]



(c) 220 [bar]

관을 설치하지 않았을 때보다 맥동이 증가하였으나 분기관 길이가 늘어남에 따라 맥동이 감소하는 경향을 확인하였다.

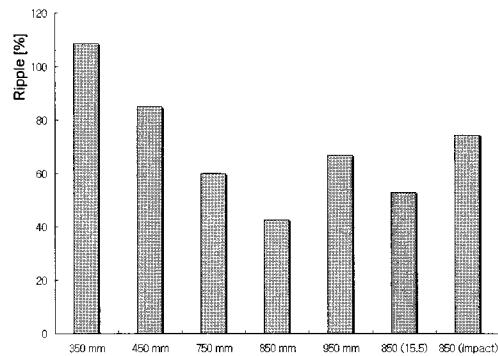


Fig. 14 Average ripples

또한 분기관의 길이가 850[mm]보다 길어질 경우 분기관을 설치하지 않았을 때보다 작지만 맥동이 증가함을 확인하였다. 전 영역에서의 맥동을 평균한 결과를 Fig. 14에 나타냈다. 850[mm]의 분기관을 적용한 경우 가장 작은 압력 맥동을 보였고, 350[mm]을 적용한 경우 분기관을 적용하지 않을 때보다 맥동이 오히려 증가하는 것을 확인하였다.

6. 결론

소형 굴삭기에 이용되는 사판식 펌프의 맥동을 줄이기 위해 모델링을 수행하고, 다양한 분기관을 적용하여 시뮬레이션 및 실차 실험을 통해 비교 검증하였다.

본 연구의 대상 펌프는 흡입, 송출구가 관통되어 있는 일반적인 밸브판과 달리, 대상 펌프의 밸브판은 송출홀과 송출구멍을 통해 작동유가 송출되는 구조이다. 우선, 하나의 흡입구, 두 개의 송출구를 가지는 대상 펌프에 대해 상용 S/W인 AMESim 환경에서 모델링을 수행하였다. 그리고, 실린더와 흡입, 송출구의 겹치는 면적으로 개구선도를 도출하는 방식과 본 연구에서 제안한 송출홀의 단면을 개구면적으로 도출하는 두 방식에 대해 시뮬레이션을 행하고 실차 실험과 비교하였다.

이 결과로서, 실린더와 흡입, 송출구의 겹치는 면적으로 개구면적을 도출하는 방식보다 본 연구에서 제안한 송출구 면적으로 개구면적을 도출하는 방식이 실험치에 근접함을 확인하였다.

압력 맥동의 저감을 위해 다양한 길이, 직경 및 장착 위치에 따른 시뮬레이션 및 실차 실험을 수행하였다. 분기관을 적용하지 않았을 경우에 비해, $\phi 12.5[\text{mm}]$, 850[mm]의 분기관을 적용한 경우, 엔진 회전수와 부하의 변화에 대해 압

력 맥동의 진폭이 42[%]까지 감소함을 확인하였다. 또한 짚은 분기관을 적용했을 경우 오히려 맥동이 증가함을 확인하였다.

후기

본 연구는 울산대학교 교내 연구비 및 2단계 BK21 지원에 의한 것입니다.

참고문헌

- (1) Zeiger, G. and Akers, A., 1986, "Dynamic Analysis of an Axial Pump Swash Plate Control", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 200, No. C1, pp. 49~58.
- (2) Zeiger, G. and Akers, A., 1985, "Torque on the Swash Plate of an Axial Piston Pump", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 107, pp. 220~226.
- (3) Kaliasfetis, P. and Costopoulos, T., 1995, "Modeling and Simulation of an Axial Piston Variable Displacement Pump with Pressure Control", *Mech. Mach. Theory*, Vol. 30, No. 4, pp. 599~612.
- (4) Schoenau, G., Burton, R. and Kavanagh, G., 1990, "Dynamic Analysis of a Variable Displacement Pump", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 112, pp. 122~132.
- (5) Kim, S., Cho, H. and Lee, C., 1987, "A Parameter Sensitivity Analysis for the Dynamic Model of a Variable Displacement Axial Piston Pump", *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 201, pp. 235~243.
- (6) Manring, N. and Johnson, R., 1996, "Modeling and Designing a Variable Displacement Open Loop Pump", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 118, pp. 267~271.
- (7) Zhang, X. and Manring, N., 2000, "Reduced Order Modeling of the Dynamics of an Indexing Value Plate Pump", *Proceedings of the American Conference*, pp. 3595~3599.
- (8) Du, H. and Manring, N., 2001, "A Single Actuator Control Design for Hydraulic Variable Displacement Pumps", *Proceedings of the American Conference*, pp. 4484~4489.
- (9) Manring, N. and Damtew, F., 2001, "The Control Torque on the Swash Plate of an Axial-Piston Pump Utilizing Piston-Bore Springs", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 123, pp. 471~478.
- (10) Manring, N., 2002, "The Control and Containment Forces on the Swash Plate of an Axial Piston Pump Utilizing a Second Swash Plate Angle," *Proceedings of the American Conference*, pp. 4837~4842.
- (11) Bahr, M., Svoboda, J. and Bhat, R., 2003, "Vibration Analysis of Constant Power Regulated Swash Plate Axial Piston Pumps", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 5, pp. 1225~1236.