

# 이동질량과 압축력을 받는 티모센코 회전축의 무차원 변수 연구

## Nondimensional Parametric Study of a Timoshenko Rotating Shaft Subject to Moving Mass and Compressive Axial Forces

박 용 석\* · 홍 성 철\*

Yong-Suk Park and Sung-Chul Hong

(2007년 10월 1일 접수 ; 2007년 11월 5일 심사완료)

**Key Words** : Moving Mass(이동질량), Moving Load(이동하중), Rotating Shaft(회전축)

### ABSTRACT

The Timoshenko beam theories are used to model the rotating shaft. The nondimensional equations of motion for the rotating shaft subjected to moving mass and compressive axial forces are derived by using Hamilton's principle. Influence of system parameters such as the speed ratio, the mass ratio and the Rayleigh coefficient is discussed on the response of the moving system. The effects of compressive axial forces are also included in the analysis. The results are presented and compared with the available solutions of a rotating shaft subject to a moving mass and a moving load.

### 기 호 설 명

### 1. 서 론

- $\alpha$  : 이동질량의 속도비
- $\bar{\Omega}$  : 회전비
- $\beta$  : Rayleigh 보의 계수
- $\bar{m}$  : 질량비
- $\nu$  : 푸아송비
- $f_a$  : 무차원 압축력비
- $f_s$  : 무차원 이동하중
- $v_s$  : 무차원 정적치짐
- $v/v_s$  : Y방향 무차원 처짐비
- $w/v_s$  : Z방향 무차원 처짐비

탄성 구조물을 따라 이동하는 물체에 관한 문제는 많은 연구자들의 관심 대상이 되어왔다<sup>(1)</sup>. 이러한 문제에 대한 관심은 초기에 교량, 철로, 고가도로 등과 같은 구조물의 설계에 대한 연구로서 토목분야에서 시작되었다. 이동하중을 받는 구조물은 정적하중을 받을 때 보다 큰 동적처짐과 응력을 받게 되어 구조물의 안정성과 성능에 매우 중요한 문제로 대두하게 되었다<sup>(2-5)</sup>. 정확도를 요구하는 최신의 병기 분야에서도 고속으로 회전하며 추진되는 탄과 포신과의 동적상호작용에 따른 운동 특성 해석이 성능 유지 및 개선을 위해 연구의 대상이 되고 있다<sup>(6-8)</sup>. 아울러 강체의 고속회전운동에 관한 문제는 기존에 회전체 역학(rotor dynamics)이라는 분야에서 많은 연구가 수행 되어지고 있다<sup>(9,10)</sup>.

Katz<sup>(11)</sup>는 Euler, Rayleigh, Timoshenko보에 일정한 속도로 이동하는 이동하중을 받는 문제의 동적

† 교신저자: 정희원, 인하공업전문대학 기계과  
E-mail : yspark@inhac.ac.kr  
Tel : (032)870-2136, Fax : (032)870-2500  
\* 정희원, 한라대학교 기계자동차공학부

응답 해석을 수행하였다. Lee<sup>(12,13)</sup>는 가정된 모드기법(assumed mode method)을 이용하여 이동하중을 받는 Timoshenko보에 대하여 운동에너지와 포텐셜 에너지를 행렬식으로 나타냈으며, Hamilton의 원리를 이용하여 운동의 방정식을 유도하였다. 축방향의 압축력을 고려한 운동의 수치해석이 병행되었다. 한편 Lee<sup>(13)</sup>는 이동질량을 받는 회전축에 대하여 한 평면에 대한 연구를 수행하였으며, 일정속도 이상의 회전속도에서의 이동물체의 분리현상을 연구하였다. Gu<sup>(14)</sup>는 고속으로 회전하는 샤프트와 이동질량으로 구성된 시스템의 양방향 처짐을 고려한 해석을 수행하였다.

그러나 대부분의 연구에서는 운동의 특성을 규명하는 변수들에 대한 무차원화된 운동방정식이 유도되지 않아 설계변수에 대한 특성을 일반화하지 못하고 있는 실정이다. 아울러 선반가공 시 일정 각속도로 회전하는 공작물이 주축대에 의해 한쪽 끝이 고정되어지며 다른쪽은 심압대의 스펀들에 의해 지지되고 있으므로 실지의 모델은 적당한 축방향의 압축력이 작용하고 있으므로 축방향의 압축력에 따른 응답특성 해석에 대한 연구가 필요하다.

이 연구에서는 이동질량은 물론 이동하중과 축방향의 압축력을 포함하고 회전축의 전단변형과 회전관성효과를 고려한 포괄적인 무차원 운동방정식을 유도하고, 무차원 설계파라미터의 설정과 이들의 변화 영역내에서 계의 동적상호작용 특성을 파악해 봄으로써, 어떠한 무차원 변수들이 응답특성에 중요한 영향을 미치는지를 해석하고자 한다. 이러한 연구결과는 볼나사와 같이 회전축의 속도와 연계된 이동계의 전반적인 운동을 해석할 수 있는 기반을 제시할 수 있게 된다.

## 2. 운동방정식

### 2.1 시스템의 운동방정식

길이가  $L$ 인 축이 Fig.1과 같이 단순지지 되어 있다. 축방향으로 압축력  $F_a$ 을 받으며, 일정한 각속도  $\Omega$ 로 회전하고 있다. 회전축과 접촉하고 있는 질량  $M$ 은  $X$ 축을 따라 일정한 속도  $v_m$ 으로 이동한다. 이동물체는 축의 회전에 구속되어 있으나 회전에 의한 효과는 무시하며, 축과 접촉상태를 유지한다고 가정한다. 축의 단면적은  $A$ , 단면 2차모멘트는  $I$ , 단면

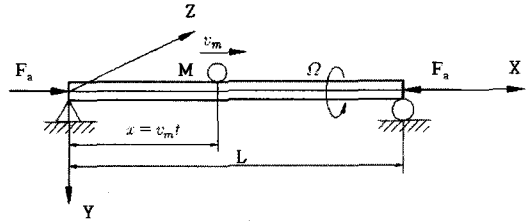


Fig.1 A rotating shaft subjected to moving mass and axial forces

형상계수는  $\kappa$ , 영의 계수는  $E$ , 전단탄성계수는  $G$  그리고 밀도는  $\rho$ 로 나타낸다.

축은 Timoshenko의 빔으로  $Y$ 와  $Z$ 축 방향으로 처짐은  $V(x,t)$ 와  $W(x,t)$ ,  $Y$ 와  $Z$ 축에 대한 미소의 회전각은  $B(x,t)$ 와  $\Gamma(x,t)$ 로 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} V(x,t) &= V_b(x,t) + V_s(x,t) \\ W(x,t) &= W_b(x,t) + W_s(x,t) \\ B(x,t) &= -\frac{\partial W_b(x,t)}{\partial x}, \quad \Gamma(x,t) = \frac{\partial V_b(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $V_b$ 와  $W_b$ 는 굽힘에 의한 처짐을,  $V_s$ 와  $W_s$ 는 전단에 의한 처짐을 나타낸다.

시스템의 포텐셜에너지  $U$ 는 식(1)의 관계식으로부터 다음과 같이 정리되어진다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L EI [(\Gamma')^2 + (B')^2] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GA [(V')^2 + (W')^2 \\ &+ \Gamma^2 + B^2 - 2\Gamma V' + 2BW] dx \\ &- \frac{1}{2} F_a \int_0^L [(V')^2 + (W')^2] dx \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $(\cdot)$ 는  $x$ 에 대한 편미분을 나타낸다.

일정한 속도  $\Omega$ 로 회전하는 축의 운동에너지  $T_R$ 과 일정한 속도  $v_m$ 으로 이동하는 질량에 의한 운동에너지  $T_M$ 은 각각 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A [V^2 + W^2] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \rho I [B^2 + \Gamma^2] dx \\ &- \frac{1}{2} \Omega (2\rho I) \int_0^L [\Gamma B - B\Gamma] dx \\ &+ \frac{1}{2} \Omega^2 \int_0^L 2\rho I dx \end{aligned} \quad (3)$$

$$T_M = \frac{1}{2} M [v_m^2 + (\frac{\partial V}{\partial t} + v_m \frac{\partial V}{\partial x})^2 + (\frac{\partial W}{\partial t} + v_m \frac{\partial W}{\partial x})^2] \Big|_{x=v_m t} \quad (4)$$

여기서 (·)는 시간에 대한 편미분을 나타낸다.

중력에 의해 시스템에 가해지는 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_G = Mg \delta V \Big|_{x=v_m t} \quad (5)$$

운동방정식을 얻기 위하여, 식(2)~식(5)를 아래와 같은 Hamilton's principle에 적용한다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T_R + \delta T_M - \delta U + \delta W_G) dt = 0 \quad (6)$$

식(1)에 대한 변분을 취한 뒤, 부분적분과정을 수행하면 다음과 같은 시스템의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{V} + M(\ddot{V} + 2v_m \dot{V}' + v_m^2 V'') \delta(x - v_m t) \\ - \kappa A G(V'' - \Gamma') + F_a V'' = Mg \delta(x - v_m t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{W} + M(\ddot{W} + 2v_m \dot{W}' + v_m^2 W'') \delta(x - v_m t) \\ - \kappa A G(W'' + B') + F_a W'' = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\rho I \ddot{B} + 2\Omega \rho I \dot{\Gamma} - EI B'' + \kappa GA(B + W') = 0 \quad (9)$$

$$\rho I \ddot{\Gamma} - 2\Omega \rho I \dot{B} - EI \Gamma'' + \kappa GA(\Gamma - V') = 0 \quad (10)$$

## 2.2 시스템의 무차원 운동방정식 유도

시스템의 운동 특성을 결정하는 중요한 파라미터들의 변화에 따른 운동 해석을 수행하기 위해 다음과 같은 무차원 매개변수(nondimensional parameter)를 정의한다.

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{L}, \tau = \frac{v_\sigma t}{L}, v = \frac{V}{L}, w = \frac{W}{L}, \\ v_b = \frac{V_b}{L}, w_b = \frac{W_b}{L}, q = \frac{\partial v_b}{\partial \xi}, p = -\frac{\partial w_b}{\partial \xi} \quad (11) \\ \alpha = v_m/v_\sigma, \bar{\Omega} = \Omega/\omega_1, \beta = \frac{\pi r_0}{L}, \\ \bar{m} = \frac{M}{\rho A L}, f_a = \frac{F_a}{F_\sigma}, f_s = \frac{Mg}{F_\sigma} \end{aligned}$$

여기서,  $v_\sigma$ 은 회전하지 않는 단순지지 오일러 보의 임계속도로  $(\pi/L) \sqrt{EI/\rho A}$ 이며,  $\beta$ 는 축의 길이에 대한 지름과 관련된 단면의 정보를 나타내는 Rayleigh 보의 계수이다.  $r_0$ 는 회전반경,  $\omega_1$ 은 단순 지지보의 1차 고유진동수,  $F_\sigma$ 은 임계좌굴하중으로  $\pi^2 EI/L^2$ 이다.

식(7)~(8)의 운동방정식은 식(11)의 무차원 변수를 이용하여 정리하면, 아래와 같은 시스템의 무차원화된 운동방정식을 얻게 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{v} + \bar{m}(\ddot{v} + 2\alpha \dot{v}' + \alpha^2 v'') \delta(\xi - \alpha\tau) \\ - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{1}{\beta^2} (v'' - \phi') + f_a v'' = f_s \delta(\xi - \alpha\tau) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \bar{m}(\ddot{w} + 2\alpha \dot{w}' + \alpha^2 w'') \delta(\xi - \alpha\tau) \\ - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{1}{\beta^2} (w'' - \phi') + f_a v'' = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\ddot{p} + 2\pi \bar{\Omega} \dot{q} - \frac{1}{\beta^2} p'' + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{\pi^2}{\beta^4} (p + w') = 0 \quad (14)$$

$$\ddot{q} - 2\pi \bar{\Omega} \dot{p} - \frac{1}{\beta^2} q'' + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{\pi^2}{\beta^4} (q - v') = 0 \quad (15)$$

유도된 무차원 운동방정식은 회전축의 회전관성, 전단변형과 축하중을 고려하고 이동질량 및 이동하중의 효과까지 검토할 수 있는 포괄적인 방정식이다. 무차원 운동방정식의 변위를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} v(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n v_i(\tau) \phi_i(\xi), w(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n w_i(\tau) \phi_i(\xi) \\ p(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n p_i(\tau) \psi_i(\xi), q(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n q_i(\tau) \psi_i(\xi) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서  $\phi_i(\xi), \psi_i(\xi)$ 는 경계조건을 만족하는 형상함수이며, 단순지지축의 경우 다음과 같다.

$$\phi_i(\xi) = \sqrt{2} \sin \frac{i\pi\xi}{L}, \psi_i(\xi) = \sqrt{2} \cos \frac{i\pi\xi}{L} \quad (17)$$

Galerkin방법에 의해 식(12)~(15)의 무차원 운동방정식은 다음과 같은 행렬 방정식으로 유도된다.

$$\begin{aligned}
 & [M + \bar{m}B] \ddot{\mathbf{v}} + 2\alpha \bar{m} A \dot{\mathbf{v}} \\
 & + \left[ \frac{k}{2(1+\nu)\beta^2} \mathbf{H} - \alpha^2 \bar{m} \mathbf{C} - f_a \mathbf{H} \right] \mathbf{v} \\
 & - \frac{k}{2(1+\nu)\beta^2} \mathbf{E}^T \mathbf{q} = f_s \mathbf{a}
 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 & [M + \bar{m}B] \ddot{\mathbf{w}} + 2\alpha \bar{m} A \dot{\mathbf{w}} \\
 & + \left[ \frac{k}{2(1+\nu)\beta^2} \mathbf{H} - \alpha^2 \bar{m} \mathbf{C} - f_a \mathbf{H} \right] \mathbf{w} \\
 & + \frac{k}{2(1+\nu)\beta^2} \mathbf{E}^T \mathbf{q} = 0
 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} \ddot{\mathbf{p}} + 2\pi \bar{\Omega} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}} + \left[ \frac{1}{\beta^2} \mathbf{K} + \frac{k}{2(1+\nu)\beta^4} \mathbf{S} \right] \mathbf{p} \\
 + \frac{k}{2(1+\nu)\beta^4} \mathbf{E} \mathbf{w} = 0
 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}} + 2\pi \bar{\Omega} \mathbf{S} \dot{\mathbf{p}} + \left[ \frac{1}{\beta^2} \mathbf{K} + \frac{k}{2(1+\nu)\beta^4} \mathbf{S} \right] \mathbf{q} \\
 + \frac{k}{2(1+\nu)\beta^4} \mathbf{E} \mathbf{v} = 0
 \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, 각 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T, \quad \mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T \\
 \mathbf{p} &= \{p_1, p_2, \dots, p_n\}^T, \quad \mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T \\
 \mathbf{M} &= [M_{ij}], \quad M_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j \, d\xi \\
 \mathbf{S} &= [S_{ij}], \quad S_{ij} = \int_0^1 \psi_i \psi_j \, d\xi \\
 \mathbf{K} &= [K_{ij}], \quad K_{ij} = \int_0^1 \psi'_i \psi'_j \, d\xi \\
 \mathbf{H} &= [H_{ij}], \quad H_{ij} = \int_0^1 \phi'_i \phi'_j \, d\xi \\
 \mathbf{E} &= [E_{ij}], \quad E_{ij} = \int_0^1 \psi_i \phi'_j \, d\xi \\
 \mathbf{A} &= [A_{ij}], \quad A_{ij} = \frac{1}{2} (\phi_i(\xi=\alpha\tau) \phi'_j(\xi=\alpha\tau) \\
 & \quad - \phi'_i(\xi=\alpha\tau) \phi_j(\xi=\alpha\tau)) \\
 \mathbf{B} &= [B_{ij}], \quad B_{ij} = (\phi_i(\xi=\alpha\tau) \phi_j(\xi=\alpha\tau)) \\
 \mathbf{C} &= [C_{ij}], \quad C_{ij} = (\phi'_i(\xi=\alpha\tau) \phi'_j(\xi=\alpha\tau)) \\
 \mathbf{a} &= \{a_j\}, \quad a_j = \phi_i(\xi=\alpha\tau)
 \end{aligned} \quad (22)$$

### 3. 수치해석

시스템의 운동특성을 알아보기 위해, 무차원 파라미터 변화에 대하여 5차 Runge-Kutta법<sup>(16)</sup>을 이용

하여 식 (18)~(21)에 대한 시스템의 해를 구하였으며, 해의 수렴성을 고려하여 10차 모드까지 고려하였다. 사용된 무차원 변수로 푸아송비  $\nu=0.33$ , 원형 단면에서의  $\kappa=0.9$ <sup>(15)</sup>를 사용하였으며, 다양한 시스템의 운동특성을 알아보기 위해 사용된 무차원 변수 값은 다음과 같은 영역 내에서 선택되었다.

- 속도비 :  $0 \leq \alpha \leq 1.5$
- 회전비 :  $0 \leq \bar{\Omega} \leq 2.5$
- Rayleigh 보의 계수 :  $0 \leq \beta \leq 0.3$
- 질량비 :  $0.1 \leq \bar{m} \leq 0.2$
- 압축력비 :  $0 \leq f_a \leq 0.4$

이동질량에 따른 회전축의 응답은 물론 이동하중에 따른 응답 해석을 수행하였으며, 무차원 변수들이 어떠한 영향을 미치는지를 계산하였다.

Fig. 2는 속도비와 Rayleigh보의 계수가 시스템의 응답에 어떠한 영향을 미치는지를 해석한 결과이다. 속도비  $\alpha=0.11, 0.5, 1.5$ 일 때와 Rayleigh보의 계수  $\beta=0.03, 0.15, 0.3$ 일 때에 대한 이동질량의 응답을 비교하고 있다. 여기서  $v_s$ 는 이동질량이 보의 중앙에 위치했을 때 최대정적처짐을 의미하며, 이동질량의 무차원 처짐비  $v/v_s$ 를 수직축으로 나타내었다. 속도비가 커질수록 Y방향 무차원 처짐비  $v/v_s$ 의 최대값은 점점 커지다가 작아지며,  $\beta$ 가 커짐에 따라 최대처짐이 전반적으로 크게 나타남을 알 수 있다. 최대처짐이 발생하는 위치는 속도비가 커질수록 축

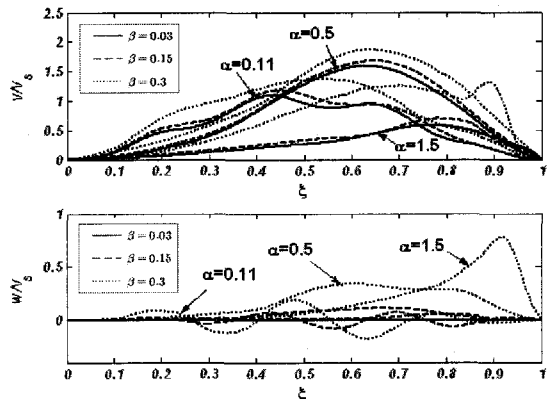


Fig. 2 Deflections  $v/v_s, w/v_s$  under the moving mass for the various values of  $\alpha, f_a=0, \bar{\Omega}=2.5$ , and  $\bar{m}=0.2, \beta=0.03, \dots, \beta=0.15, \dots, \beta=0.3, \dots$

의 우측 끝 부위로 이동하며 발생하고 있다. 아울러 최대처짐은 Fig. 3에서 보는데와 같이  $v/v_s$ 의 경우  $\alpha = 0.3 \sim 0.4$  부근에서 나타나며,  $w/v_s$ 는 회전관성의 영향으로 속도비와 단면의 크기가 큰  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0.3$ 일 때 발생함을 알 수 있다.

이동질량과 이동하중에 따른 응답의 크기 비교가 Table 1에서 비교되고 있다.  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 작을 경우에는 이동하중에 의한 응답이 다소 크게 나타나며, 큰

경우에는 이동질량에 따른 응답이 크게 나타남을 알 수 있다. 속도비  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0.3$ 일 때,  $w/v_s$ 의 최대 값이 이동하중을 받을 경우 0.11( $\xi = 0.90$ )이지만 이동질량을 받을 경우 0.7783( $\xi = 0.92$ 지점)으로 크게 많아진 것을 확인 할 수 있다. 이러한 결과는 표에서 비교한  $Gu^{(9)}$ 의 결과와도 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 4는 회전비  $\bar{\Omega}$ 와 질량비  $\bar{m}$ 의 변화에 따른 영향을 고찰한 결과이다. 질량비  $\bar{m}$ 가 커짐에 따라 처짐이 크게 나타나고 있다. 회전비  $\bar{\Omega}$ 가 커질수록  $v/v_s$ 는 다소 작아지는 경향을 나타내며,  $w/v_s$ 는 회전관성에 의한 영향으로 처짐이 커지며, 변화폭도 크게 나타남을 알 수 있다.

Fig. 5(a), (b)는  $\beta = 0.15$ ,  $\bar{\Omega} = 2.5$ 일 때, 무차원 압축력비가 처짐에 미치는 영향을 살펴본 결과이다. 압축력비는 전반적으로 처짐을 크게 나타내게 하며, 속도비가 작을수록 처짐 변화의 폭이 크게 나타난다. 최대처짐이 발생하는 위치는 압축력비가 커짐에 따라 축의 우측지점으로 이동하여 나타남을 알 수 있다.

Fig. 6은 이동하중과 이동질량을 받는 경우에 대한 압축력이 처짐에 미치는 영향을 알아본 것이다. 이동질량을 받는 경우에 의한 응답비가 이동하중에 대한 응답보다 전반적으로 크게 나타나고 있으며,

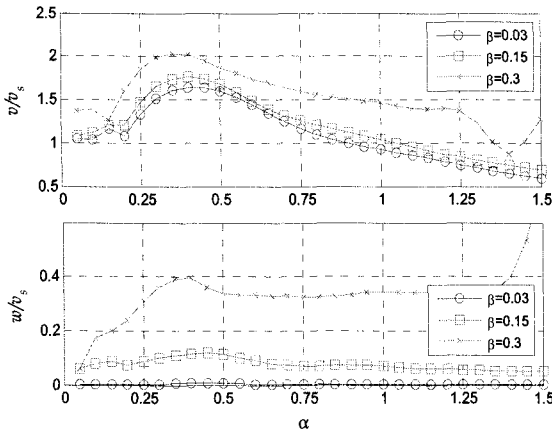


Fig. 3 Maximum deflections of  $v/v_s$ ,  $w/v_s$  as a function of  $\alpha$  under the moving mass for  $f_a = 0$ , and  $\bar{\Omega} = 2.5$ ,  $\bar{m} = 0.2$

Table 1 Values of maximum  $v/v_s$  for  $Gu^{(9)}$  and present results

$\alpha$	$\beta$	$\bar{\Omega} = 2.5$ , $\bar{m} = 0.2$ , and $f_a = 0$			
		Moving load		Moving mass	
		$Gu^{(9)}$	Present	$Gu^{(9)}$	Present
$v/v_s$	0.03	1.602	1.6017( $\xi = 0.61$ )	1.593	1.5925( $\xi = 0.63$ )
	0.15	1.704	1.7037( $\xi = 0.63$ )	1.675	1.6756( $\xi = 0.65$ )
	0.3	1.863	1.8637( $\xi = 0.66$ )	1.862	1.8620( $\xi = 0.64$ )
$w/v_s$	0.03	0.603	0.6030( $\xi = 0.79$ )	0.585	0.5850( $\xi = 0.77$ )
	0.15	0.634	0.6332( $\xi = 0.81$ )	0.695	0.6954( $\xi = 0.78$ )
	0.3	0.737	0.7372( $\xi = 0.90$ )	1.322	1.3198( $\xi = 0.89$ )
$v/v_s$	0.03	0.005	0.0053( $\xi = 0.59$ )	0.005	0.0048( $\xi = 0.62$ )
	0.15	0.131	0.1308( $\xi = 0.80$ )	0.113	0.1132( $\xi = 0.66$ )
	0.3	0.357	0.3567( $\xi = 0.67$ )	0.339	0.3393( $\xi = 0.61$ )
$w/v_s$	0.03	0.002	0.0016( $\xi = 0.83$ )	0.002	0.0016( $\xi = 0.76$ )
	0.15	0.042	0.0425( $\xi = 0.81$ )	0.051	0.0515( $\xi = 0.78$ )
	0.3	0.110	0.1103( $\xi = 0.90$ )	0.777	0.7783( $\xi = 0.92$ )

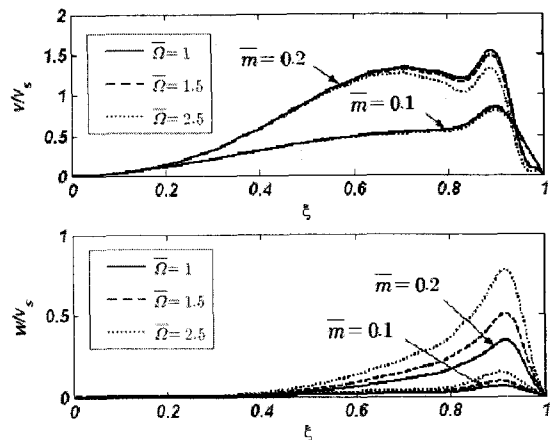


Fig. 4 Deflections  $v/v_s$ ,  $w/v_s$  under the moving mass for the various values of shaft rotational speed  $\bar{\Omega} = 1, \dots, \bar{\Omega} = 1.5, \dots, \bar{\Omega} = 2.5, \dots$ , for  $f_a = 0$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\alpha = 1.5$ , and  $\bar{m} = 0.1, 0.2$

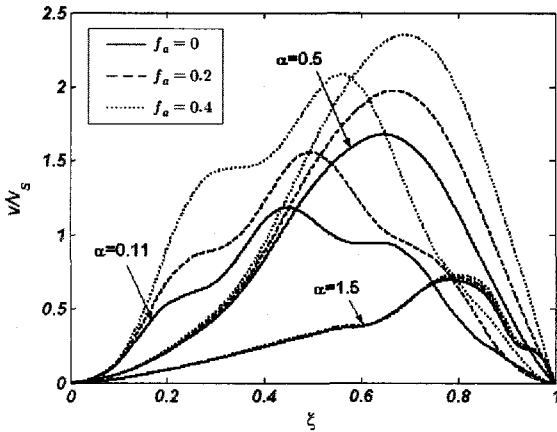


Fig. 5(a) Deflections  $v/v_s$  under the moving mass for the various values of  $\alpha$ ,  $\bar{\Omega}=2.5$ ,  $\beta=0.15$ , and  $\bar{m}=0.2$ ,  $f_a=0$ , —,  $f_a=0.2$ , - - -,  $f_a=0.4$ , .....

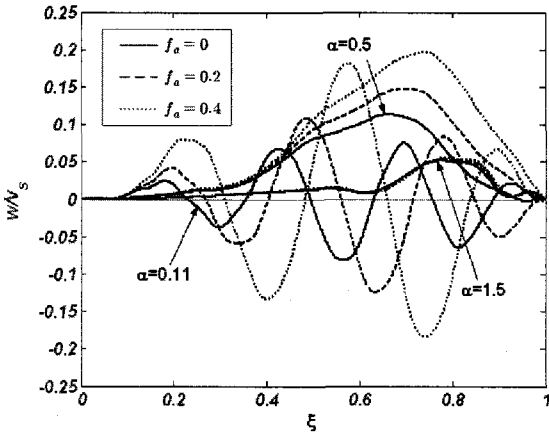


Fig. 5(b) Deflections  $w/v_s$  under the moving mass for the various values of  $\alpha$ ,  $\bar{\Omega}=2.5$ ,  $\beta=0.15$ , and  $\bar{m}=0.2$ ,  $f_a=0$ , —,  $f_a=0.2$ , - - -,  $f_a=0.4$ , .....

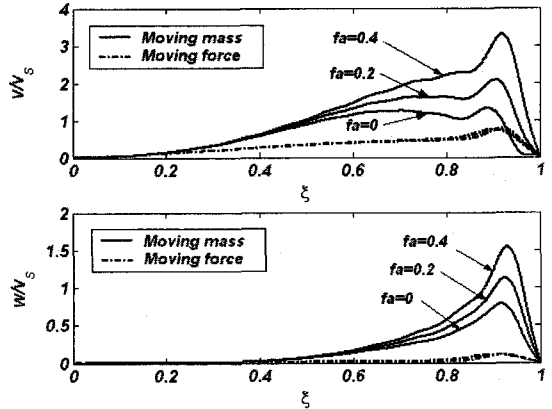


Fig. 6 Deflections ratio  $v/v_s$  and  $w/v_s$  under the moving mass and the equivalent moving load for  $f_a=0, 0.2, 0.4$  and  $\bar{\Omega}=2.5$ ,  $\alpha=1.5$ ,  $\bar{m}=0.2$ ,  $\beta=0.3$

Table 2 Values of Maximum  $v/v_s$  under the moving mass with various values of the compressive axial forces ratio  $f_a$

$\beta$	$\alpha$	$\bar{\Omega}=2.5, \bar{m}=0.2$		
		$f_a=0$	$f_a=0.2$	$f_a=0.4$
0.03	0.11	1.090( $\xi=0.43$ )	1.439( $\xi=0.48$ )	1.949( $\xi=0.54$ )
	0.5	1.593( $\xi=0.63$ )	1.870( $\xi=0.66$ )	2.220( $\xi=0.68$ )
	1.1	0.857( $\xi=0.72$ )	0.904( $\xi=0.73$ )	0.954( $\xi=0.74$ )
	1.5	0.585( $\xi=0.77$ )	0.599( $\xi=0.78$ )	0.613( $\xi=0.78$ )
0.15	0.11	1.184( $\xi=0.45$ )	1.557( $\xi=0.50$ )	2.081( $\xi=0.56$ )
	0.5	1.676( $\xi=0.65$ )	1.973( $\xi=0.67$ )	2.348( $\xi=0.69$ )
	1.1	0.951( $\xi=0.74$ )	1.005( $\xi=0.75$ )	1.061( $\xi=0.75$ )
	1.5	0.695( $\xi=0.78$ )	0.713( $\xi=0.79$ )	0.730( $\xi=0.79$ )
0.3	0.11	1.364( $\xi=0.54$ )	1.706( $\xi=0.52$ )	2.745( $\xi=0.45$ )
	0.5	1.862( $\xi=0.64$ )	2.224( $\xi=0.66$ )	2.696( $\xi=0.68$ )
	1.1	1.404( $\xi=0.80$ )	1.524( $\xi=0.81$ )	1.661( $\xi=0.82$ )
	1.5	1.320( $\xi=0.89$ )	2.084( $\xi=0.91$ )	3.284( $\xi=0.92$ )

이동하중의 경우 압축력이 응답에 미치는 영향은 미미한 것을 알 수 있다.

Table 2는 이동질량을 받는 압축력비 변화에 따른  $v/v_s$ 의 최대치점과 위치를 나타낸 것으로 압축력비가 클수록 처짐이 커지고 최대치점이 발생하는 위치가 축의 우측으로 이동하여 나타난다. 아울러  $\beta$ 값이 작은 영역에서는 속도비가 작을수록,  $\beta$ 값이 큰 영역에서는 속도비가 클수록 압축력이 처짐에 미치는 영향이 크게 나타나고 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

이동하중은 물론 이동질량과 축방향의 압축력을 포함하고 회전축의 전단변형과 회전관성효과를 고려한 포괄적인 무차원 운동방정식을 유도하여, 무차원 설계파라미터의 설정과 이들의 변화 영역내에서 계의 동적상호작용 특성을 파악할 수 있게 되었다.

(1) 이동질량을 받는 회전축의 경우 속도비가 커짐에 따라 Y방향 처짐비  $v/v_s$ 의 최대값은 점점 커진다

가 작아지며, 최대처짐은  $\alpha=0.3\sim 0.4$  부근에서 나타난다. 그리고 최대처짐이 발생하는 위치는 회전축의 우측부위로 이동하며 나타남을 확인 할 수 있다.

(2) Rayleigh 보의 계수  $\beta$ 의 값이 큰 경우는 단면적이 큰 축으로 처짐비가 크게 나타남을 알 수 있다. 특히 속도비가 큰  $\alpha=1.5$ 인 경우  $w/v_s$ 의 최대처짐은 회전관성의 영향으로 크게 나타남을 알 수 있다

(3) 질량비  $\bar{m}$ 가 커짐에 따라 처짐이 크게 나타나고 있다. 회전비  $\bar{\omega}$ 가 커질수록  $v/v_s$ 는 다소 작아지는 경향을 나타내며,  $w/v_s$ 는 회전관성에 의한 영향으로 처짐이 커지며, 변화폭도 크게 나타남을 알 수 있다.

(4) 이동질량을 받는 경우 압축력비가 클수록 처짐이 커지고 최대처짐이 발생하는 위치가 축의 우측으로 이동하여 나타난다.  $\beta$ 값이 작은 영역에서는 속도비가 작을수록,  $\beta$ 값이 큰 영역에서는 속도비가 클수록 압축력이 처짐에 미치는 영향이 크게 나타나고 있음을 알 수 있다. 그러나 이동하중의 경우 압축력이 응답에 미치는 영향은 미미한 것을 알 수 있다.

(5) 이 연구를 통하여 회전축의 비틀림 효과와 볼나사와 같이 회전축의 속도와 연계된 특성 해석까지를 포함한 이동계의 전반적인 운동을 해석할 수 있는 기반을 마련하였다.

## 후 기

이 논문은 2006년도 인하공업전문대학 교내연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

## 참 고 문 헌

(1) Fryba, L., 1972, "Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads, Noordhoff International, Groningen", Netherlands.  
 (2) Ting, E. C., Genin, J. and Ginsberg, J. H., 1974, "A General Algorithm for Moving Mass Problems", J. of Sound and Vibration, Vol. 33, No. 1, pp. 49~58.  
 (3) Akin, J. E. and Mofied, M., 1989, "Numerical Solution for Response of Beam with Moving Mass", Journal of Structure Engineering, Vol. 115, No. 1, pp.

120~131.

(4) Cifuentes, A. O., 1989, "Dynamic Response of a Beam Excited by a Moving Mass", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 5, pp. 49~58.

(5) Stanisic, M. M., 1985, "On a New Theory of the Dynamic Behavior of the Structures Carrying Moving Masses", Ingenieur-Archive, Vol. 56, pp. 175~185.

(6) Ansari, K. A. and Baugh, J. W. Jr., 1986, "Dynamics of a Balloting Projectile in a Moving Gun Tube", BRL-CR-605.

(7) Soifer, M. T. and Becker, R. S., 1984, "Projectile Motion in a Flexible Gun Tube", BRL - CR - 536.

(8) Park, Y. S. and Hong, S. C., 2005, "Torsional Vibration of a Hollow Shaft subjected to a Moving Mass", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 15, No. 8, pp. 975~979.

(9) Lee, C. W., 1993, Vibration Analyssy of Rotors, Kluwer Academic Publisher, Netherlands.

(10) Enrich, F. F., 1992, Handbook of Rotordynamics, McGraw-Hill, Inc.

(11) Katz, R., Lee, C. W., Ulsoy, A. G., Scott, R. A., 1988, "The Dynamic Response of a Rotating Shaft Subject to a Moving Load", Journal of Sound and Vibration, Vol. 122, No. 1, pp. 131~148.

(12) Lee, H. P., 1995, "Dynamic Response of a Rotating Timoshenko Shaft Subject to Axial Forces and Moving Loads", Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 1, pp. 169~177.

(13) Lee, H. P., 1996, "Dynamic Response of a Timoshenko Beam Subject to a Moving Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 198, No. 2, pp. 249~256.

(14) Gu, U. C., Cheng, C. C., 2004, "Vibration Analysis of a High-speed Spindle under the Action of a Moving Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 278, No. 4-5, pp. 1131~1146.

(15) Cowper, G. R., 1966, "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", J. of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335~340.

(16) Meirovitch, L., 1980, Computational Methods in Structural Dynamics, Sijith & Noordhoff.