

## 일반 교통망에서 브라이스 역설 발견 모형\*

박 구 현\*\*

### A Model for Detecting Braess Paradox in General Transportation Networks\*

Koohyun Park\*\*

#### ■ Abstract ■

This study is for detecting the Braess Paradox by stable dynamics in general transportation networks. Stable dynamics, suggested by Nesterov and de Palma[18], is a new model which describes and provides a stable state of congestion in urban transportation networks. In comparison with user equilibrium model based on link latency function in analyzing transportation networks, stable dynamics requires few parameters and is coincident with intuitions and observations on the congestion. Therefore it is expected to be an useful analysis tool for transportation planners.

The phenomenon that increasing capacity of a network, for example creating new links, may decrease its performance is called Braess Paradox. It has been studied intensively under user equilibrium model with link latency function since Braess[5] demonstrated a paradoxical example. However it is an open problem to detect the Braess Paradox under stable dynamics. In this study, we suggest a method to detect the Paradox in general networks under stable dynamics. In our model, we decide whether Braess Paradox will occur in a given network. We also find Braess links or Braess crosses if a network permits the paradox. We also show an example how to apply it in a network.

Keyword : Braess Paradox, Stable Dynamics, Braess link, Braess Cross, User Equilibrium, Wardrop Principle, Selfish Routing, Transportation Networks.

논문접수일 : 2006년 12월 26일 논문게재확정일 : 2007년 10월 12일

\* 이 논문은 2006학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음.

\*\* 홍익대학교 정보산업공학과

## 1. 서 론

### 1.1 안정 동력학

본 연구는 도시 교통망에서 브라이스 역설이 존재하는 네트워크를 안정 동력학(stable dynamics)에 기초하여 발견하고자 한다. 기존의 이용자 균형(user equilibrium) 모형에서 링크 통행시간 함수가 매우 인위적인 가정이라고 판단한 Nesterov와 de Palma는 물리적인 개념에 기초한 새로운 안정 동력학 모형을 제시하였다[17, 18, 19]. 그들은 링크 통행시간 함수에 기초한 이용자 균형 모형의 결과가 도시 교통망에서 관찰되는 직관과 일치하지 않음을 지적하였다. 그들이 제시한 안정 동력학 모형에서는 인위적인 링크 통행시간 함수를 가정하지 않고, 링크별로 아주 기본적인 2개의 물리량, 최소 통행시간( $\bar{t}_i$ )과 최대 통행량( $\bar{f}_i$ )만을 요구한다. 그리고 물리이론의 공리(axiom)에 해당되는 가정을 다음과 같이 하였다. “최대통행량 이하에서는 최소 통행시간으로 흘러가고, 최대통행량에서는 최소 통행시간 이상으로 흘러간다.” 즉,  $f_i < \bar{f}_i$  이면,  $t_i = \bar{t}_i$  이고,  $f_i = \bar{f}_i$  이면,  $t_i \geq \bar{t}_i$  이다. 이와 같이 간단한 물리적인 가정과 Wardrop 원칙[23]으로 세워진 안정 동력학 모형은 관찰 및 직관과 잘 부합되는 결과를 제공하며, 효율적인 해법이 개발되어 있는 수리계획 문제로 표현된다. 또한 안정 동력학 모형은 간략한 네트워크에서 브라이스 역설과 같은 미묘한 상황도 표현할 수 있음을 제시한 바 있다[18]. 본 연구에서는 일반적인 네트워크에서 안정 동력학 모형에 의해 브라이스 역설의 존재 여부를 발견하고자 한다.

### 1.2 링크 통행시간 함수에 기초한 이용자 균형 모형에서 브라이스 역설 관련 연구

링크 통행시간 함수에 기초한 균형통행량은 Wardrop 원칙에 의해서 표현된다. 즉, 임의의 출발지-목적지에 대해 통행량이 배정된 경로들의 경

로통행시간은 모두 같으며, 통행량이 배정되지 않은 경로로서 경로통행시간이 더 작은 경로는 존재하지 않는 경우를 의미한다. 이러한 Wardrop 원칙이 만족되는 균형통행량을 결정하는 문제는 변동부등식(Variational Inequality)[16]으로 표현될 수 있으며, Beckmann 모형[3]으로 알려진 최소화 문제로도 표현된다. 이러한 모형에서 링크 통행시간 함수는 통행량에 대한 함수로 정의되며 비감소를 가정한다.

링크 통행시간 함수에 기초하는 통행량 균형은 두 가지 균형 모형으로 표현된다. 첫째, 이용자 균형 모형에서는 무수히 많은 운전자들이 협력하지 않고 각자 자신의 목적지까지 최단의 경로를 발견하여 가는 상황을 가정한다. 이러한 모형에서 균형이란 극미한 통행량을 다른 경로로 보낼 때 전체 통행시간이 증가되거나 더 이상 감소될 수 없는 상태로 정의된다[4]. 둘째, 시스템 균형(system equilibrium) 모형에서는 네트워크 전체를 한 사람(하나의 통제기구)이 관리하여 목적지까지 경로와 통행량을 결정하는 상황을 가정한다. 네트워크 전체 통행시간은 시스템 균형에 의해 최소화된다. 브라이스 역설은 네트워크의 용량이 증가할 때 오히려 전체 통행시간이 증가하는 상황을 표현하는 용어로서, 시스템 균형 모형에서는 있을 수 없고 이용자 균형 모형에서 발생한다.

이용자 균형 모형에서 브라이스 역설과 관련된 연구는 오래된 주제이고, 브라이스 역설이 존재하기 위한 네트워크 조건들과 접근방법들이 다양하게 연구되어 왔다. Braess[5]는 각 운전자들이 목적지까지 가는데 각 개인에게 최선의 경로라고 생각하는 경로를 선택하는 것이 결과적으로 모두에게 최선이 아닐 수 있음을 지적하였으며, 새로운 링크의 추가가 통행량의 재분배를 가져와 결과적으로 모든 개인의 통행시간이 길어질 수 있는 예를 처음으로 소개하였다. Braess가 소개한 네트워크는 본 논문 [그림 2-1]의 네트워크와 같으며, 각 링크의 통행시간 함수로는 “ $10x$ ,  $50 + x$ ,  $10 + x$ ”의 선형함수들을 가정하였다. 여기서  $x$ 는 해당 링크의 통행량을

의미한다.

Murchland[15]는 Braess가 소개한 동일한 네트워크에 대해 다른 통행시간 함수( $23x/3, 46, 0$ )를 가정하여도 Braess 역설이 성립됨을 보였으며, Frank [12]도 동일한 네트워크에 대해 일반적인 선형함수를 가정하여 상세한 분석을 하였으며, 브라이스 역설이 성립되는 필요충분조건을 제시하였다. Braess, Murchland 및 Frank가 네트워크의 확장이 전체 통행시간을 증가시킨다는 의미에서 역설을 소개한 반면, Fisk[11]는 네트워크는 그대로 유지하고 통행 수요를 감소시키는 것이 전체 통행시간을 증가시킬 수 있음을 처음으로 소개하였다.

Steiberg and Zangwill[22]은 처음으로 일반적인 네트워크에 대해 브라이스 역설의 존재 조건을 연구하였다. 일반적인 네트워크에서 새로운 링크를 추가할 때, 브라이스 역설이 존재하기 위한 조건을 제시하였다. 링크에서의 통행시간은 선형함수를 가정하였다. Dafermos and Nagurney[9]는 일반적인 네트워크에서 비대칭 균형 문제의 역설적 상황의 존재 조건에 대해 연구하였다. 이전의 브라이스 역설 관련 연구가 해당 링크의 통행량만의 함수로서 통행시간 함수를 가정하였으나, 그들은 해당 링크 및 다른 링크 통행량에 영향을 받는 비대칭 통행시간 함수를 가정하였다. 그들은 링크 통행시간 함수에 대해 선형 및 strong monotonicity를 가정한 후, 통행 수요의 변화가 전체 통행시간에 영향을 주는 정도를 공식으로 제시하였으며, 또한 새로운 링크 추가에 대해서도 브라이스 역설이 존재하는 조건을 공식으로 제시하였다.

Pas and Principio[20]는 브라이스 역설의 존재에 대해 통행 수요와 통행시간 함수가 동시에 관계된다는 것을 밝혔다. 그들은 Braess가 소개했던 네트워크에서 브라이스 역설은 통행 수요가 어느 범위에 속할 때만 존재하게 되는데, 그 범위의 상한 및 하한은 선형 통행시간 함수의 계수들로 표현되는 값임을 보였다. Yang and Bell[24]은 어떤 링크가 추가되어 전체 통행시간이 증가하게 될 때, 그 링크를 역방향으로 바꿈으로 역설적인 통행시간

증가를 회피할 수 있다고 지적하였다.

대부분의 브라이스 역설 관련 연구가 안정상태(stationary state), 즉 정적인 이용자 균형(static user-equilibrium) 모형인 경우에 관심을 갖은 반면, Akamatsu[1]는 통행량이 시간의 함수인 동적 이용자 균형(dynamic user-equilibrium) 모형에서 브라이스 역설이 존재하는 예를 보였으며, Akamatsu and Heydecker[2]는 일반적인 동적 네트워크 모형에서 브라이스 역설이 존재하기 위한 필요충분조건을 제시하였다. 동적 모형에서의 브라이스 역설도 정적인 경우와 마찬가지로 새로운 링크의 추가(일반적으로 네트워크 용량 증가)가 오히려 전체 통행시간을 증가시키는 경우를 의미한다.

한편 네트워크에서의 통행량 할당 및 균형 문제를 게임이론으로 접근하는 연구가 진행되어 왔다. Devarajan[10]는 교통망에서의 이용자 균형은 비협력적 게임(noncooperative game)의 순수한 내쉬(Nash) 균형 전략임을 보였으며, Friesz[13]는 이용자 균형을 전적인 비협력적인 게임으로, 전체 통행시간을 최소화하는 시스템 균형을 전적인 협력적 게임(cooperative game)으로 간주하였다. Harker [14]는 출발지-목적지별로 이용자 균형 또는 시스템 균형이 구분하여 적용되는 복수 균형 모형을 제안하였다. 이는 시스템 균형으로 표현되는 소수의 대기업과 이용자 균형으로 표현되는 다수의 소기업이 함께 있는 시장 균형(market equilibrium)과 비교될 수 있는 모형이다.

Catoni and Pallottino[7]는 이용자 균형과 시스템 균형을 두 극단의 모형으로 보고, 게임이론에서 쿠르노-내쉬(Cournot-Nash) 균형 모형이 적용되는 중간 단계 모형에 대해 연구하였다. 즉, 게임 참여자가 1인인 경우는 전적으로 협력적인 시스템 균형에 해당되고, 게임 참여자 수를 크게 증가시키면 비협력이 점점 증가하여 이용자 균형에 가까워진다고 보았다. 또한 협력이 증가할수록 전체 통행 통행시간이 감소할 것이라는 직관에 반해 어떤 네트워크에서는 협력이 증가됨에도 불구하고 전체 통행 시간이 증가되는 역설적인 경우가 존재함을 보였다.

최근에 Roughgarden[21]은 각 운전자들을 이기적이고 비협력적인 게임 참여자로 간주하고, 브라이스 역설을 초래하는 링크를 제외하는 네트워크 설계 문제의 근사(approximate) 알고리즘에 대해 연구하였다. 링크 통행시간 함수가 연속이고 비감소일 때, 브라이스 링크를 제외하는 설계 문제는 근사비가  $'n/2'$ ( $n$ 은 노드수)보다 적은 근사알고리즘은 존재하지 않으며, 링크 통행시간 함수가 선형일 때는 근사비가  $'(4/3-\epsilon)'$ 보다 적은 근사알고리즘이 존재하지 않음을 증명하였다. 여기서 근사비란 다항식 시간 안에 근사알고리즘이 제공하는 네트워크의 전체 통행시간이 최적해의 전체 통행시간의 근사비 배수를 넘지 않는다는 의미이다. 또한 그가 제시하는 근사알고리즘은 주어진 원 네트워크를 그대로 근사해로 제시하기 때문에 그는 이를 자명한 알고리즘(trivial algorithm)이라 불렀다.

### 1.3 이용자 균형모형에서의 링크 통행시간 함수와 안정 동력학의 링크 통행시간

이용자 균형모형에서 다양한 형태의 링크 통행시간 함수가 이용되고 있으나, 미국 BPR(Bureau of Public Roads)에서 제안하여 널리 적용되고 있는 BPR식은 아래와 같다.

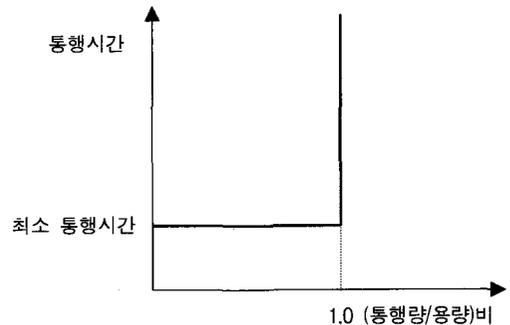
$$t_{\alpha} = \bar{t}_{\alpha} \left( 1 + A \left( \frac{f_{\alpha}}{\bar{f}_{\alpha}} \right)^B \right) \quad (1-1)$$

여기서  $\bar{t}_{\alpha}$ 은 링크  $\alpha$ 에서의 최소 통행시간이고  $\bar{f}_{\alpha}$ 은 링크  $\alpha$ 에서의 최대 통행량(용량)이다. BPR식에서  $\bar{t}_{\alpha}$  및  $\bar{f}_{\alpha}$ 는 상수이고, A 및 B는 파라미터이므로, 링크 통행시간( $t_{\alpha}$ )은 링크 통행량( $f_{\alpha}$ )의 다항식 함수(상수항 + B차식)가 되며, BPR은 A = 0.15, B = 4.0을 제시한 바 있다[25]. 그 후 파라미터 A, B에 대한 적합성 연구들이 국내외에서 많이 행하여졌으며, 최근의 한 연구결과[26]에 의하면, 프리웨이에서 제한속도에 따라 파라미터 A, B의 값을 달리 제시하고 있으며, 복수 차선의 경우는 같은

제한속도라도 별도의 값들을 제시하고 있다. 예를 들어 70mph의 경우 A = 0.88, B = 9.8을 제시하고, 복수 차선의 경우는 A = 1.0, B = 5.4를 제시하고 있다.

이용자 균형 모형에서는 BPR식 외에 다른 형태의 링크 통행시간 함수를 적용하기도 한다. 그러나 어떠한 함수식에도 다수의 계수 및 지수의 파라미터를 포함하고 있다. 또한 실제 링크 통행시간 함수를 적용할 때는 주어진 식의 파라미터를 보정(calibration)하는 과정을 거친다. 즉, 신뢰할 만한 방법으로 자료를 측정된 후 이에 맞게 링크 통행시간 함수의 파라미터 값들을 다시 조정하는 절차를 갖는다. 이와 같은 파라미터 값의 수정 및 조정 절차는 혼잡에 근접한 상황에서 링크 통행시간을 정확하게 반영하기 위한 과정이라고 이해할 수 있다.

이에 비해 안정 동력학에서는 (통행량/용량) < 1.0 일 때는 통행시간 = 최소통행시간이 되고, (통행량/용량) = 1.0일 때는 통행시간은 최소통행시간 이상의 어느 값이 될 것이라고 가정한다. 따라서 안정 동력학 모형에서의 링크 통행시간의 그래프는 [그림 1]과 같다. 이는 정확히 말해서 함수가 아니다. (통행량/용량) = 1.0일 때 통행시간은 최소통행시간 이상의 무수히 많은 값을 취할 수 있기 때문이다. 그러나 실제 혼잡상황 즉, (통행량/용량) = 1.0이 될 때, 링크 통행시간은 해당 링크의 통행량에 의해서 결정되지 않고, 전체 교통망의 통행 상황을 반영하는 수리계획 모형에 의해 결정된다.



[그림 1] 안정 동력학에서의 링크 통행시간 그래프

안정 동력학 모형은 ‘주어진 통행수요가 계속 유지되고 동적인 통행 상태가 시간이 지나면서 안정 상태로 수렴하게 된다면, 안정상태에 대한 통행 상황은 안정 동력학 모형에 의해 표현될 것이다’는 것을 전제하고 있다. 만일 이러한 전제가 사실이라면 안정 동력학 모형은 이론적이고 기본적인 분석 모형이 될 것이다. 왜냐하면 링크 통행시간이 링크 통행량 함수의 어떠한 파라미터도 포함하고 있지 않기 때문이다. 그러나 안정 동력학 전제에 대한 증명과는 별도로 안정 동력학 모형 자체가 혼잡을 근사적으로 표현할 수 있는 유용한 모형임을 보이는 연구가 수행될 수 있다. 이와 같은 의도에서 안정 동력학 모형에 기초하여 일반 네트워크에서 브라이스 역설을 발견하는 모형 연구(본 연구)나 개인 자동차로 역까지 가서 주차하고 전철이나 버스를 타고 출퇴근하는 모형(park-and-ride model)[19] 연구가 수행되었다고 할 수 있다.

### 1.4 안정 동력학 모형의 알려진 과제와 논문의 구성

본 연구는 안정 동력학 모형에서 브라이스 역설이 존재하는 네트워크를 발견하고자 한다. 안정 동력학 모형에서도 브라이스 역설이 존재한다는 것은 Nesterov와 de Palma[18]가 소개한 바 있으나, 일반적인 네트워크에서 브라이스 역설을 발견하는 방법 또는 수리계획 모형은 안정 동력학 모형에서 알려진 과제(open problem)이다.

안정 동력학 모형에서는 링크에서의 통행시간 함수를 고려하지 않기 때문에 이용자 균형 모형에서 전개되었던 연구 과정과는 다른 접근 방법이 요구된다. 본 연구에서는 일반적인 네트워크에서 브라이스 역설을 발견하기 위해 안정 동력학의 가정을 수정하여 새로운 균형 해를 발견하는 것으로부터 시작한다. 그리고 이 해를 근거로 문제의 네트워크에 브라이스 역설이 존재하는지의 여부를 판단한다. 본 연구에서는 브라이스 링크와 그것의 극한 형태인 브라이스 횡단 (노드 횡단 또는 경로 횡

단)이 존재하는 경우의 브라이스 역설을 발견한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서 안정 동력학 모형을 소개하고, 브라이스 링크 및 브라이스 횡단(노드 횡단 및 경로 횡단)에 의한 브라이스 역설이 존재하는 예를 보인다. 제 3장에서는 일반적인 네트워크에서 브라이스 역설을 발견하는 방법 및 수리계획 모형을 제안한다. 제 4장에서는 제안된 방법을 네트워크에 적용하는 예를 소개하며, 제 5장은 결론 및 후후 연구이다.

## 2. 안정 동력학 모형과 브라이스 역설

### 2.1 표현 및 가정

먼저 출발지 노드가  $n_s$ 이고, 목적지 노드가  $n_t$ 인 단일 출발지-목적지 모형을 가정한다. 사실 브라이스 역설 관련 단일 출발지-목적지 모형의 결과는 모든 출발지-목적지 쌍을 포함하는 일반 모형의 결과로 확장가능하다. 따라서 제 2장 및 3.2절까지는 단일 출발지-목적지 모형에 대해 언급하며, 모든 출발지-목적지 쌍을 포함하는 일반 모형은 3.3절에서 취급한다. 모형에서 정의된 표현은 아래와 같다.

$G = G(N, E)$ , 방향성 네트워크,

$N$  = 노드 집합,  $|N|$ 는 전체 노드의 수,

$E$  = 방향성 링크 집합,  $|E|$ 는 전체 링크의 수,

$d$  = 출발지  $n_s$ 에서 목적지  $n_t$ 로의 통행 수요,

$P$  = 출발지  $n_s$ 와 목적지  $n_t$ 를 연결하는 경로 집합,  $|P|$ 는 전체 경로의 수,

$\bar{f}_i$  = 링크  $i$ 의 최대 통행량,  $i \in E$ ,  $\bar{f} \in R^{|E|}$ 는 벡터 형태,  $\bar{f} \geq 0$ ,

$\bar{t}_i$  = 링크  $i$ 의 최소 통행시간,  $i \in E$ ,  $\bar{t} \in R^{|E|}$ 는 벡터 형태,  $\bar{t} \geq 0$ ,

$F_j$  =  $j$ 번째 경로의 통행량, 의사결정변수,  $j \in P$ ,  $F \in R^{|P|}$ 는 벡터 형태,

$f_i$  =  $i$ 번째 링크의 통행량, 의사결정 보조변수,

$i \in E, f \in R^E$ 는 벡터 형태,  
 $t_i = i$ 번째 링크의 통행시간, 의사결정변수,  $i \in E$ ,  
 $t \in R^E$ 는 벡터 형태,  
 $T =$  출발지  $n_s$ 에서 목적지  $n_t$ 까지 최단경로 통  
 행시간, 의사결정 보조변수,  $T \in R$ ,  
 $A = |E| \times |P|$ 행렬, 링크  $i$ 가 경로  $j$ 에 포함되면  
 $A_{ij} = 1$ , 그렇지 않으면  $A_{ij} = 0$ ,  
 $e =$  모든 요소가 1인 열벡터,  $e = (1, \dots, 1)^T$ ,  
 $\langle x, y \rangle = x, y$ 의 내적, 즉  $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$ .

안정 동력학은 각 링크의 최소 통행시간과 최대 통  
 행량으로부터 각 링크의 균형 통행량과 균형 통행  
 시간을 계산한다. 여기서 링크의 최소 통행시간이  
 란 최대 제한속도로 이동하는 최소 자유 통행시간  
 을 의미하고, 최대 링크 통행량은 도로의 차선수,  
 교차로에서의 녹색 신호등 주기, 날씨 등에 의해  
 결정되는 단위 시간당 최대 통행량이다. 이제 다음  
 의 2가지 가정으로부터 균형 값을 계산한다.

가정 2-1: (Wardrop 제 1원칙) 각 링크의 통행  
 시간이  $t$ 로 주어졌을 때, 각 운전자들  
 은 최단 시간의 경로를 선택하여 목적  
 지까지 간다.

가정 2-2: 링크  $i \in E$ 의 통행량  $f_i$ 는 최대 링크 통  
 행량  $\bar{f}_i$ 를 넘지 않는다. 링크 통행시간  
 $(t_i)$ 은 (i)  $f_i < \bar{f}_i$ 이면,  $t_i = \bar{t}_i$ 이고, (ii)  
 $f_i = \bar{f}_i$ 이면,  $t_i \geq \bar{t}_i$ 이다.

위의 가정 2-1은 Wardrop[23]의 제 1원칙의 다  
 른 표현이다. 본래 Wardrop 균형은 임의의 출발지  
 -목적지에 대해 통행량이 배정된 경로들의 경로통  
 행시간은 모두 같으며, 통행량이 배정되지 않은 경  
 로로서 경로통행시간이 이보다 더 작은 경로는 존  
 재하지 않는 경우의 통행을 의미한다. 가정 2-1에  
 의할 때 임의의 출발지-목적지에 대해 경로통행시  
 간이 가장 짧은 경로집합외의 다른 경로를 개별 운  
 전자가 선택하지 않을 것은 자명하다. 따라서 가정

2-1를 만족하는 통행은 Wardrop 제1원칙을 만족  
 함을 알 수 있다.

## 2.2 안정 동력학 모형

안정 동력학에 의한 균형 값을 계산하기 위해 각  
 링크에서의 통행시간이  $t$ 로 주어졌다고 가정한다.  
 그러면 출발지-목적지간 최단경로 시간은  $t$ 의 함수  
 로 다음과 같이 표현된다.

$$T(t) = \min \{ \langle A_j, t \rangle \mid j = 1, \dots, |P| \}$$

여기서  $A_j$ 는  $A$ 의  $j$ 번째 열을 의미한다. 따라서  
 $T(t)$ 는  $t$ 에 대해서 부분적-선형(piecewise linear)  
 이며, 오목(concave)이 된다. 따라서 수요를 만족  
 하는 총 통행시간은  $dT(t)$ 이 된다.

안정 동력학의 기본제약 (2-1) 하에서 균형 값은  
 아래의 정리 2-1로 계산될 수 있다.

$$0 \leq f \leq \bar{f}, t \geq \bar{t} \quad (2-1)$$

정리 2-1: 링크 통행시간  $t^*$ 과 링크 통행량  $f^*$ 이  
 (2-1)의 조건을 만족하는 균형 값이 되  
 기 위한 필요충분조건은  $t^*$ 가 아래의  
 최대화 문제 (2-2)의 최적해인 것이며  
 이때  $f^* = AF^* = \bar{f} - s^*$ 이 된다. 여기서  
 $s^*$ 는 제약식 (2-2b)의 최적 쌍대승수  
 (dual multiplier)이다.

$$\text{Maximize} \quad dT - \langle \bar{f}, t \rangle \quad (2-2a)$$

$$\text{subject to} \quad t \geq \bar{t}, \quad (2-2b)$$

$$A^T t \geq T e. \quad (2-2c)$$

(증명) Nesterov와 de Palma의 안정 동력학 정리  
 [18, 정리 2]에 의하면 링크 통행시간  $t^*$ 과 링크 통  
 행량  $f^*$ 이 (2-1)의 조건을 만족하는 균형 값이 되  
 기 위한 필요충분조건은  $t^*$ 가 아래의 문제 (2-3)의  
 최적해인 것이며,  $s^*$ 가 제약식의 최적 쌍대승수일

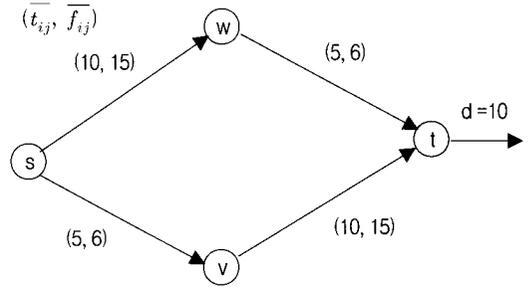
때  $f^* = f - s^*$  이 된다. 또한 아래에서 보는 바와 같이 문제 (2-3)은 등식의 마지막 문제, 즉 정리에서 제시한 문제 (2-2)와 동치가 된다.

$$\begin{aligned}
 & \max\{dT(t) - \langle \bar{f}, t \rangle \mid t \geq \bar{t}\} \\
 & = \max\{dT(t) - \langle \bar{f}, t \rangle \mid t \geq \bar{t}, \\
 & \quad T = \min\{\langle A_j, t \rangle \mid j = 1, \dots, |P|\}\} \\
 & = \max\{dT(t) - \langle \bar{f}, t \rangle \mid t \geq \bar{t}, \\
 & \quad \langle A_j, t \rangle \geq T, j = 1, \dots, |P|\} \\
 & = \max\{dT(t) - \langle \bar{f}, t \rangle \mid t \geq \bar{t}, A^T t \geq T\bar{e}\} \quad \square
 \end{aligned}
 \tag{2-3}$$

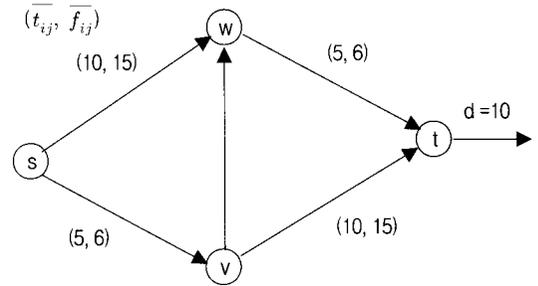
### 2.3 브라이스 역설

[그림 1], [그림 2] 및 [그림 3]은 브라이스 역설의 3가지 종류를 보여준다. [그림 1]은 브라이스 링크(Braess link)가 존재하는 경우이고, [그림 2]와 [그림 3]은 브라이스 횡단(Braess cross)이 존재하는 경우이다. 먼저, [그림 1]에서 [그림 1(a)] 네트워크에 브라이스 링크( $v, w$ )가 추가된 것이 [그림 1(b)] 네트워크이다. [그림 1(a)] 네트워크 및 [그림 1(b)] 네트워크에 문제 (2)를 적용하여 최적의 경로 통행량을 할당할 수 있다. 그러면 [그림 1(a)] 네트워크의 경우는 균형 값이 경로1( $s-v-t$ )에  $d_1=5$ , 경로2( $s-w-t$ )에  $d_2=5$ 를 할당할 때이며, 이때  $f_{sv} = 5 < \bar{f}_{sv}$ ,  $f_{sw} = 5 = \bar{t}_{sw}$ ;  $f_{vt} = 5 < \bar{f}_{vt}$ ,  $t_{vt} = 10 = \bar{t}_{vt}$ ;  $f_{sw} = 5 < \bar{f}_{sw}$ ,  $t_{sw} = 10 = \bar{t}_{sw}$ ;  $f_{wt} = 5 < \bar{f}_{wt}$ ,  $t_{wt} = 5 = \bar{t}_{wt}$  이 되고, 최단경로 시간은  $T=15$ 가 된다.

또한 [그림 1(b)] 네트워크의 경우는 균형 값이 경로 1( $s-v-t$ )에  $d_1=4$ , 경로 2( $s-w-t$ )에  $d_2=4$ , 경로 3( $s-v-w-t$ )에  $d_3=2$ 를 할당할 때이며, 이때  $f_{sv} = 6 = \bar{f}_{sv}$ ,  $t_{sv} = 9 = \bar{t}_{sv}$ ;  $f_{vt} = 4 < \bar{f}_{vt}$ ,  $t_{vt} = 10 = \bar{t}_{vt}$ ;  $f_{vw} = 2 < \bar{f}_{vw}$ ,  $t_{vw} = 1 = \bar{t}_{vw}$ ;  $f_{sw} = 4 < \bar{f}_{sw}$ ,  $t_{sw} = 10 = \bar{t}_{sw}$ ;  $f_{wt} = 6 = \bar{f}_{wt}$ ,  $t_{wt} = 9 > \bar{t}_{wt}$  이 되고, 최단경로 시간은  $T=19$ 가 된다. 따라서 링크( $v, w$ )가 추가됨으로써 최단경로 시간이 15에서 19로 증가됨을 알 수 있다. 즉, ( $v, w$ )는 브라이스 링크이고,



(a) 링크 ( $v, w$ )가 추가되기 전: 경로 1( $s-v-t$ )에  $d_1=5$ , 경로 2( $s-w-t$ )에  $d_2=5$ 를 할당할 때 균형 값을 가지며 최단경로 시간은 15가 됨



(b) 링크 ( $v, w$ )가 추가된 후: 경로 1( $s-v-t$ )에  $d_1=4$ , 경로 2( $s-w-t$ )에  $d_2=4$ , 경로 3( $s-v-w-t$ )에  $d_3=2$ 를 할당할 때 균형 값을 가지며 최단경로 시간은 19가 됨

[그림 1] 브라이스 링크( $v, w$ )의 영향: 최단경로 시간이 15에서 19로 증가됨

브라이스 링크가 포함된 경로 3( $s-v-w-t$ )는 브라이스 경로가 된다.

[그림 2]는 브라이스 노드 횡단(Braess cross at a node)이 존재하는 경우이다. 사실 [그림 2]는 [그림 1(b)]의 극한에 해당되는 경우이다. 즉, [그림 1(b)]에서 링크( $v, w$ )의 최소 통행시간  $\bar{t}_{vw}$ 가 점점 줄어 0이 된 경우, 다시 말해서 링크( $v, w$ )가 점점 짧아져 노드  $v$ 와 노드  $w$ 가 노드  $x$ 로 통합된 극한의 경우이다.

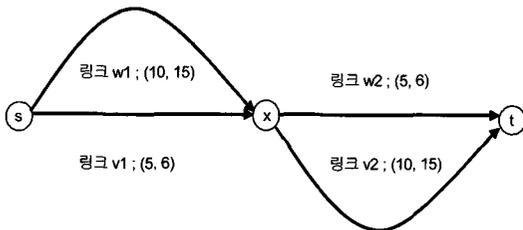
교통망에서 노드는 교차로에 해당되므로, 운전자

가 하나의 경로를 선택해 출발지에서 목적지까지 가기 위해서는 교차로에서 횡단이 이루어진다. 예를 들어 [그림 2]의 노드  $x$ 에서는 아래와 같은 4가지 노드 횡단이 있을 수 있다. 여기서 노드 횡단을 링크-(노드)-링크로 표현하였다.

- 노드 횡단 1 :  $v1-(x)-v2$
- 노드 횡단 2 :  $w1-(x)-w2$
- 노드 횡단 3 :  $v1-(x)-w2$
- 노드 횡단 4 :  $w1-(x)-v2$

따라서 [그림 2] 네트워크를 [그림 1] 네트워크와 연관지어 생각한다. [그림 2] 네트워크에서는 출발지  $s$ 에서 목적지  $t$ 까지의 경로를 링크로 표현한다. 먼저, 노드  $x$ 에서 노드 횡단 1과 노드 횡단 2만이 가능한 경우([그림 1(a)]에 해당)를 고려한다. 이 경우는 경로1 ( $v1-v2$ , [그림 1]에서 경로1  $s-v-t$ 에 해당됨) 및 경로2 ( $w1-w2$ , [그림 1]에서 경로1  $s-w-t$ 에 해당됨)만이 가능하며, 여기에 문제 (2-2)를 적용하여 균형 값을 계산하면 각 경로에 통행량이 각각 5, 5씩 할당되고, 목적지까지의 통행시간은 동일하게 15가 된다.

다음으로 노드  $x$ 에서 교차로 횡단1 및 교차로 횡단2에 교차로 횡단 3이 추가된 경우([그림 1(b)]에 해당)를 고려한다. 새로이 경로 3 ( $v1-w2$ , [그림 1]에서 경로 3  $s-v-w-t$ 에 해당됨)이 추가되고, 여기에 문제 (2-2)를 적용하여 균형 값을 계산하면 각 경로에 통행량이 각각 4, 4, 2씩 할당되고, 링크  $v1$  및 링크  $w2$ 의 통행시간이 각각 10씩이 되어 목적



[그림 2] 브라이스 노드 횡단( $v1-(x)-w2$ )의 영향 : 최단경로 시간이 15에서 20으로 증가됨

지까지의 통행시간은 동일하게 20이 된다. 즉, 노드  $x$ 에서 추가된 노드 횡단  $v1-(x)-w2$ 는 브라이스 노드 횡단이며, 이러한 노드 횡단을 포함한 경로3 ( $v1-w2$ )은 브라이스 경로이다.

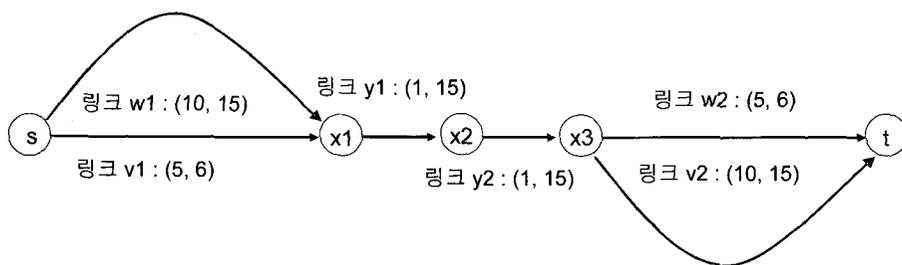
[그림 3]은 브라이스 경로 횡단(Braess cross at a path)이 존재하는 경우이다. 사실 [그림 3]의 부분경로  $y1-y2$ 를 하나의 슈퍼노드  $X$ 로 간주하면, 브라이스 경로 횡단은 브라이스 노드 횡단의 특별한 변형임을 알 수 있다. 노드 횡단에서처럼 경로 횡단을 링크-(부분경로)-링크로 표현한다. 그러면 아래와 같이 부분경로  $y1-y2$ 에 대해 다음의 4가지 경로 횡단이 있을 수 있다.

- 경로 횡단 1 :  $v1-(y1-y2)-v2$
- 경로 횡단 2 :  $w1-(y1-y2)-w2$
- 경로 횡단 3 :  $v1-(y1-y2)-w2$
- 경로 횡단 4 :  $w1-(y1-y2)-v2$

먼저 [그림 3]에서 부분경로  $y1-y2$ 에 대해 경로 횡단1과 경로 횡단 2만이 가능한 경우를 고려한다. 이 경우는 경로1 ( $v1-(y1-y2)-v2$ ) 및 경로 2 ( $w1-(y1-y2)-w2$ )만이 가능하며, 여기에 문제 (2-2)를 적용하여 균형 값을 계산하면 각 경로에 통행량이 각각 5, 5씩 할당되고, 목적지까지의 통행시간은 동일하게 17이 된다.

다음으로 부분경로  $y1-y2$ 에 대해 경로 횡단 3이 추가된 경우를 고려한다. 그러면 경로 3( $v1-(y1-y2)-w2$ )이 새로이 추가되고, 여기에 문제 (2-2)를 적용하여 균형 값을 계산하면 각 경로에 통행량이 각각 4, 4, 2씩 할당되고, 링크  $v1$  및 링크  $w2$ 의 통행시간이 각각 10씩이 되어 목적지까지의 통행시간은 동일하게 22가 된다. 즉, 부분경로  $y1-y2$ 에 대해 추가된 경로 횡단  $v1-(y1-y2)-w2$ 는 브라이스 경로 횡단이며, 이러한 경로 횡단을 포함한 경로 3( $v1-(y1-y2)-w2$ )은 브라이스 경로이다.

이제 일반적인 네트워크에서 안정 동력학 모형에 기초한 브라이스 경로, 브라이스 링크 및 브라이스 횡단(노드 횡단, 경로 횡단)을 정의한다.



[그림 3] 브라이스 경로 횡단  $(c_1 - (y_1 - y_2) - u_2)$ 의 영향 : 최단경로 시간이 17에서 22로 증가됨

정의 2-1: (브라이스 경로) 특정 출발자-목적지 쌍에 대해 이를 연결하는 기존의 경로 집합에 새로운 경로를 추가한다. 만약 추가된 경로에 통행량이 배정되고 새로운 경로집합에 대한 최단경로 통행시간이 기존 경로집합에 대한 최단경로 통행시간보다 크게 될 때, 새로 추가된 경로를 브라이스 경로라고 한다.

정의 2-2: (브라이스 링크) 주어진 네트워크의 특정 출발자-목적지 쌍에 대해 이를 연결하는 어떠한 경로도 브라이스 경로가 아니라고 가정한다. 만약 이 네트워크에 새로운 링크를 추가할 때 이 링크를 포함하는 브라이스 경로가 존재하게 되면, 새로 추가된 링크를 브라이스 링크라고 한다.

정의 2-3: (브라이스 횡단) 주어진 네트워크와 허용된 횡단(노드 횡단 또는 경로 횡단)에 대해서 특정 출발자-목적지를 연결하는 어떠한 경로도 브라이스 경로가 아니라고 가정한다. 만약 이 네트워크에 새로운 횡단을 허용할 때 이 횡단을 포함하는 브라이스 경로가 존재하게 되면, 새로 추가된 횡단을 브라이스 횡단이라고 한다.

### 3. 브라이스 역설 발견 모형

본 장에서는 일반적인 네트워크에서 안정 동력

학에 기초하여 브라이스 링크 또는 브라이스 횡단(노드 횡단 또는 경로 횡단)이 포함된 브라이스 경로를 발견하고자 한다.

#### 3.1 이기적 경로 선택과 새로운 가정

2.3절의 브라이스 역설의 예에서 보듯이 브라이스 링크나 브라이스 횡단이 존재하는 네트워크의 경우 가정 2-1로부터 이기적 경로 선택(selfish routing)을 피할 수 없다. [그림 1(a)] 네트워크에서 선택된 경로의 통행시간이 각각 15이던 것이 브라이스 링크  $(v, w)$ 가 추가된 네트워크([그림 1(b)])에서는 선택된 경로의 통행시간이 각각 19로 증가되는 것을 보았다. [그림 2] 네트워크에서는 브라이스 노드 횡단이 추가됨으로 경로의 통행시간이 15에서 20으로 증가되는 것을 보았다. 즉, 새로운 링크의 추가나 새로운 횡단의 허용이 전체 네트워크의 효율적 운영 측면에서나 운전자 개인 모두에게 불리한 결과를 초래한 것이다.

[그림 1(b)]에서 원래대로 경로 1( $s-v-t$ )와 경로 2( $s-w-t$ )만을 선택한다면 목적지까지의 통행시간이 각각 15로 유지된다. 그러나 이때, 선택되지 않은 경로 3( $s-v-w-t$ )의 경로통행시간은 11이 되어, 더 빨리 목적지까지 가는 경로가 존재하기 때문에 개별 운전자들은 소위 이기적 경로 선택에 의해 경로 3( $s-v-w-t$ )를 선택하게 된다. 이는 가정 2-1에 의한 당연한 결과이다. 그러나 결과적으로 운전자 모두는 목적지까지의 경로통행시간이 균형시간인 19에 이르게 된다.

[그림 2]에서도 원래대로 경로1( $v_1-v_2$ )와 경로 2

$(w_1 - w_2)$ 만을 선택한다면 목적지까지의 통행시간은 15이나, 이때 선택되지 않은 경로  $3(v_1 - w_2)$ 의 경로 통행시간은 10이 되어, 이기적 경로 선택에 의해 경로  $3(v_1 - w_2)$ 를 선택하게 된다. 결과적으로 운전자 모두는 목적지까지의 경로 통행시간이 균형 시간인 20에 이르게 된다.

따라서 주어진 네트워크에서 브라이스 링크(횡단)가 존재하는 지, 존재한다면 어떤 링크(횡단)가 브라이스 링크(횡단)인지를 발견할 수 있어야 한다. 새로운 교통망을 설계하는 경우라면 브라이스 링크를 건설 계획에서 제외시켜야 할 것이며, 기존의 교통망이라면 브라이스 링크에 해당되는 도로를 폐쇄하여야 한다. 브라이스 노드 횡단에 대해서는 교차로에서의 신호 체계의 변경으로 노드 횡단을 폐쇄할 수 있다.

본 절에서는 브라이스 링크나 브라이스 횡단이 포함된 브라이스 경로를 발견하기 위해 2단계 절차를 이용한다. 첫째 단계에서는 가정 2-1을 수정하여 새로운 균형 통행량을 결정한다. 둘째 단계에서는 새로운 가정의 균형 상태에서 통행량이 할당되지 않은 경로들의 경로통행시간을 계산한다. 만일 통행량이 할당되지 않은 경로의 경로통행시간이 통행량이 할당된 경로통행시간보다 작으면 브라이스 경로가 존재하는 것이다.

이제 브라이스 경로를 발견하기 위해 가정 2-1과 가정 2-2를 각각 가정 3-1 및 가정 3-2로 수정한다. 가정 3-1에서는 더 이상 Wardrop 제 1원칙이 만족되지 않는다.

가정 3-1: 각 링크의 통행시간이  $t$ 로 주어졌을 때, 각 운전자들이 선택한 경로는 출발지에서 목적지까지의 통행시간이 모두 동일하며, 동일한 값으로는 최소이다.

가정 3-2: 경로 통행량( $F$ )은 최대 링크통행량을 넘지 않게 할당된다. 즉,  $f = AF \leq \bar{f}$ 이다. 또한 링크 통행시간( $t_i$ )은 (i)  $f_i < \bar{f}_i$ 이면,  $t_i = \bar{t}_i$  이고, (ii)  $f_i = \bar{f}_i$  이면,  $t_i \geq \bar{t}_i$  이다.

가정 3-1 하에서는 이기적 경로선택을 피할 수 있다. 브라이스 링크( $v, w$ )가 포함된 [그림 1(b)] 네트워크에서 경로  $s-v-t$ 와 경로  $s-w-t$ 만을 선택하고, 경로  $s-v-w-t$ 는 제외할 수 있다. 선택된 두 경로의 목적지까지의 통행시간이 각각 15로 동일하고 동일한 값으로는 최소이기 때문이다. 가정 3-1에서는 이러한 두 경로보다 경로통행시간이 저렴한 경로  $s-v-w-t$ 가 존재하여도 무방하다. 왜냐하면 경로  $s-v-w-t$ 에 통행량을 할당하게 되면, 세 경로에 대해서 동일한 경로통행시간이 되기 위해서 목적지까지의 통행시간이 각각 19로 증가하기 때문에 최소가 되지 않기 때문이다.

### 3.2 브라이스 경로가 존재하는 네트워크 발견 모형

새로운 가정 3-1은 브라이스 경로가 포함된 네트워크에서 브라이스 역설을 회피할 수 있는 가능성을 열어 놓고 있다. 그러나 목적지까지의 통행시간이 모두 동일한 경로들을 선택하되 통행시간이 최소가 되는 경로들을 어떻게 선택하느냐가 문제이다. 또한 각 경로에 얼마의 통행량을 할당할 것인가도 결정하여야 한다. [그림 1(b)]에서는 선택된 경로통행시간이 동일하며 최소가 되는 경로는  $s-v-t$ ,  $s-w-t$ 이며, 각각에 통행량 5를 할당하는 것이 최적이다(경로  $s-v-t$ 에 6, 경로  $s-w-t$ 에 4를 할당하거나, 반대로 각각 4, 6를 할당하는 것도 가능하다). 이때 목적지까지의 경로통행시간은 동일하게 15이다.

브라이스 경로가 존재하는 네트워크를 발견하는 절차를 제안하기 위해 몇 가지 표현을 정의한다. 먼저,  $\Omega$ 를 가능한 경로통행량 집합으로 정의한다. 그러면  $\Omega$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$\Omega = \{F \in R^P \mid AF \leq \bar{f}, \langle F, \epsilon \rangle = d, F \geq 0\}$$

이제 가능한 경로 통행량  $F$ 와 링크 통행시간  $t$ 가 주어졌다고 가정한다. 그리고 양의 통행량이 할

당된 경로집합을  $P_+ = \{j + F_j > 0, j \in P\}$ 로 표현한다. 그러면 양의 통행량이 할당된 경로의 목적지까지의 최단경로 통행시간은 아래와 같이 계산된다.

$$\hat{T}(t) = \min \{ \langle A_{j,t} \rangle \mid j \in P_+ \} \quad (3-1)$$

그러면  $\hat{T}(t)$ 는  $t$ 에 대해서 부분적 선형(piecewise linear)이고 오목(concave)이기 때문에 상위미분(supper differential)을 정의할 수 있다. 이를 위해  $I_+(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$I_+(t) = \{ j \in P_+ \mid \langle A_{j,t} \rangle = \hat{T}(t) \}$$

그러면 상위미분  $\partial\hat{T}(t)$ 는 다음과 같으며, conv는 볼록덮개(convex hull)를 의미한다[8].

$$\partial\hat{T}(t) = \text{conv} \{ A_j, j \in I_+(t) \} \quad (3-2)$$

기본정리 3-3: 경로 통행량  $F$ 와 링크 통행시간  $t$ 가 가정 3-1 및 가정 3-2를 만족하는 균형 해가 되기 위한 필요충분 조건은 어떤  $g \in \partial\hat{T}(t)$ 가 존재하여  $AF = dg$ 가 되는 것이다.

(증명) 양의 통행량을 갖는 링크 집합  $\hat{E} = \{i \in E \mid f_i = (AF)_i > 0\}$ 로 정의되는 부분 네트워크  $\hat{G}(\hat{N}, \hat{E})$ 를 고려한다. 여기서  $\hat{N}$ 는  $\hat{E}$ 에 속한 링크의 머리노드와 꼬리노드를 모두 포함하는 노드 집합이다. 이제 경로 통행량  $F$ 와 링크 통행시간  $t$ 가 가정 3-1 및 가정 3-2를 만족하는 균형 해가 되기 위한 필요충분조건은  $\hat{C}$ 에서 목적지까지 어떤 경로를 선택하여도 통행시간이  $\hat{T}(t)$ 가 되는 것이다. 따라서  $f = AF \in d\partial\hat{T}(t)$ 는 (3-2)로부터  $\sum_{j \in I_+(t)} \lambda_j A_j$ 이 되는  $\lambda_j \geq 0 (j \in I_+(t))$ 가 존재하여  $f = AF = d \sum_{j \in I_+(t)} \lambda_j A_j$ 임과 동치가 된다. 즉,  $f = AF = dg$ 와 동치가 된다. □

이제 가정 3-1 및 가정 3-2 하에서 총 통행시간

을  $\hat{C}(t) = d\hat{T}(t)$ 로 정의한다. 그러면 기본정리 3-3으로부터 다음의 정리가 성립한다.

정리 3-4: 링크 통행시간  $t$ 가 주어졌을 때, 가정 3-1 및 가정 3-2에 의한 링크 통행량  $f = AF$ 가 균형통행량이 되기 위한 필요충분조건은  $f = AF \in \partial\hat{C}(t)$ 가 성립되는 것이다.

(증명) 기본정리 3-3 및  $\partial\hat{C}(t) = d \partial\hat{T}(t)$ 에 의해 성립됨. □

가정 3-1 및 가정 3-2의 균형 값을 계산하기 위한 기본 제약은 아래와 같다.

$$t \geq \bar{t}, F \in \Omega \quad (3-3)$$

정리 3-5: 링크 통행시간  $t^*$ 과 경로 통행량  $F^*$ 가 (3-3)의 조건과 가정 3-1 및 가정 3-2를 만족하는 균형 값이 되기 위한 필요충분조건은  $t^*$ 가 아래의 최대화 문제 (3-4)의 최적해인 것이며 이때  $AF^* = \bar{f} - s^*$ 가 된다 여기서  $s^*$ 는 제약식 (3-4b)의 최적 쌍대승수이다.

$$\text{Maximize} \quad \hat{C}(t) - \langle \bar{f}, t \rangle \quad (3-4a)$$

$$\text{subject to} \quad t \geq \bar{t}, \quad (3-4b)$$

$$F \in \Omega. \quad (3-4c)$$

(증명) 제약식 (3-4b)에 대한 승수를  $s$ 라고 하고, 라그랑지 함수를 아래와 같이 놓는다.

$$L(t, s) = \hat{C}(t) - \langle \bar{f}, t \rangle + \langle s, t - \bar{t} \rangle$$

그러면 문제 (3-4)가 최적해를 갖기 위한 필요충분조건은  $F \in \Omega$  조건 하에서  $\min_{s \geq 0} \max_t L(t, s)$ 가 안장점을 갖는 것이며, 안장점을 갖기 위한 필요충분조건은 어떤  $AF^* \in \partial\hat{C}(t^*)$ 가 존재하여

$$f^* = AF^* = \bar{f} - s^*,$$

$$\langle s^*, t^* - \bar{t} \rangle \geq 0, t^* \geq \bar{t}, s^* \geq 0$$

이 성립되는 것이다. 따라서 정리 3-4로부터  $f^* = AF^*$ 는  $t^*$ 에 대해서 균형 통행량이 된다.  $\square$

문제 (3-4)는 일반적으로 주어진 네트워크에서 브라이스 경로의 포함여부와 관계없이 새로운 가정 3-1과 가정 3-2를 만족하는 경로 통행량 할당을 결정하는 모형으로 이를 달리 표현하면 따름정리 3-6과 같다.

**따름정리 3-6:** 링크 통행시간  $t^*$ 과 경로 통행량  $F^*$ 가정 (3-3)의 조건과 가정 3-1 및 가정 3-2를 만족하는 균형 값이 되기 위한 필요충분조건은  $t^*$ 가 아래의 최대화 문제 (3-5)의 최적해인 것이며 이때  $AF^* = \bar{f} - s$ 가 된다.  $s^*$ 는 제약식 (3-5b)의 최적 쌍대승수이며,  $T^*$ 는 동일한 경로 통행시간의 최소 값이다.

$$\text{Maximize } dT - \langle \bar{f}, t \rangle \quad (3-5a)$$

$$\text{subject to } t \geq \bar{t}, \quad (3-5b)$$

$$\langle A_j, t \rangle - TF_j \geq 0, j \in P, \quad (3-5c)$$

$$AF \leq \bar{f}, \quad (3-5d)$$

$$\langle F, e \rangle = d, \quad (3-5e)$$

$$F \geq 0. \quad (3-5f)$$

(증명) 제약식 (3-5c)은  $F_j > 0$ 인  $j$ 에 대해서  $\langle A_j, t \rangle \geq T$ 이므로, 제약식 (3-5c) 하에서 최단경로 시간  $T(t)$ 는 식 (3-1)에서 정의한  $\hat{T}(t)$ 와 같다. 따라서 문제 (3-5)와 문제 (3-4)는 동치이다.  $\square$

제약식 (3-5c)는 비볼록(non-convex) 2차함수이기 때문에 보통의 상용 최적화 solver는 국부 최적해(local optimal solution)만을 제공하나, 우리는 여기서 문제 (3-5)의 최적해는 전체 최적해(global optimal solution)라고 가정한다. 전체 최적해를 구하는 방법에 대해서는 제 5장에서 논의한다.

브라이스 링크 및 브라이스 횡단을 발견하기 위한 2번째 단계로 브라이스 경로가 네트워크에 포함

되어 있는지를 밝히려고 한다.  $t^*$ ,  $F^*$  및  $T^*$ 를 각각 문제 (3-5)의 최적해라 할 때,  $P_0^*$ 을 통행량이 할당되지 않은 경로 중 경로통행시간이  $T^*$  이하인 경로 집합으로 정의한다. 그러면,

$$P_0^* = \{j \in P_0 \mid \langle A_j, t^* \rangle < T^*\} \quad (3-6)$$

로 표현되며, 여기서  $P_0 = \{j \mid F_j^* = 0, j \in P\}$ 로서 통행량이 할당되지 않은 경로 집합이다. 이제 브라이스 경로의 포함 여부는 정리 3-7로 표현된다.

**정리 3-7:**  $t^*$  및  $T^*$ 를 각각 문제 (3-5)의 최적해라고 할 때,  $P_0^*$ 에 속한 임의의 경로는 브라이스 경로가 된다.

(증명)  $\tilde{P} = P - P_0^*$ 라고 놓는다. 경로집합  $\tilde{P}$ 하에서 문제 (2-2)를 적용하면 문제 (3-5)를 적용할 때와 동일하게 경로통행시간은  $T^*$ 이 된다. 임의의  $p_0 \in P_0^*$ 를 선택하여  $\tilde{P} = \tilde{P} \cup \{p_0\}$ 로 놓는다. 이제  $\tilde{P}$  하에서 문제 (2-2)를 적용하면 가정 2-1로 인한 이기적 경로선택에 의해  $p_0$ 에 통행량이 할당될 수밖에 없고 그럴 경우 이는 문제 (3-5)의 최적해가 아니므로 최단경로 시간은  $T^*$ 보다 증가하게 됨을 알 수 있다. 따라서 경로  $p_0$ 는 브라이스 경로가 된다.  $\square$

브라이스 경로에는 통행량이 할당되지 않은 링크 또는 횡단(노드 횡단 또는 경로 횡단)이 적어도 하나 존재한다. 그렇지 않다면 그 경로는 통행량이 할당된 경로이기 때문에  $P_0$ 에 포함될 수 없다. 만일 이러한 통행량이 할당되지 않은 링크나 횡단을 제외한다면 해당 브라이스 경로는 존재할 수 없다. 때문에 이러한 통행량이 할당되지 않은 링크나 횡단 중에 브라이스 링크나 브라이스 횡단이 존재하게 됨을 알 수 있다.

### 3.3 모든 출발지-목적지 수요를 포함하는 일반 모형

브라이스 경로, 브라이스 링크 및 브라이스 횡단

은 주어진 출발지-목적지에 대해 정의되기 때문에 단일 출발지-목적지 모형에 대한 결과를 복수의 출발지-목적지 모형에 그대로 적용할 수 있다. 이제 복수의 출발지-목적지 모형을 위해 전절에서 정의한 표현 일부를 아래와 수정한다. 아래 표현에서 위첨자는 특정 출발지-목적지 쌍을 의미한다.

- $K =$  출발지-목적지 집합,  $|K|$ 는 전체 출발지-목적지 쌍의 수,
- $d^k =$   $k$ 번째 출발지-목적지 쌍의 통행 수요,
- $P^k =$   $k$ 번째 출발지-목적지 쌍을 연결하는 경로 집합,  $|P^k|$ 는 전체 경로의 수,
- $F_j^k =$   $k$ 번째 출발지-목적지 쌍의  $j(j \in P^k)$ 번째 경로로 통행량, 의사결정변수,  $F^k \in R^{|P^k|}$ 는 벡터 형태,
- $T^k =$   $k$ 번째 출발지-목적지의 최단경로 통행시간,  $T^k \in R$ .
- $A^k = |E| \times |P^k|$ 행렬,  $i$ 링크가  $j$ 경로에 포함되면  $A_{ij}^k = 1$ , 그렇지 않으면  $A_{ij}^k = 0$ ,

그러면 가정 2-1 및 가정 2-2 하에서 균형 값을 계산하는 문제 (2-2)는 문제 (3-7)이 된다.

$$\text{Maximize } \sum_{k \in K} d^k T^k \quad - \langle \bar{f}, t \rangle \quad (3-7a)$$

$$\text{subject to } t \geq \bar{t}, \quad (3-7b)$$

$$(A^k)^T t \geq T^k e, \quad k \in K. \quad (3-7c)$$

또한 가정 3-1 및 가정 3-2 하에서 균형 값을 계산하는 문제 (3-5)는 문제 (3-8)이 된다.

$$\text{Maximize } \sum_{k \in K} d^k T^k \quad - \langle \bar{f}, t \rangle \quad (3-8a)$$

$$\text{subject to } t \geq \bar{t}, \quad (3-8b)$$

$$\langle A_j^k, t \rangle - T^k F_j^k \geq 0, \quad j \in P, k \in K, \quad (3-8c)$$

$$\sum_{k \in K} A^k F^k \leq \bar{f} \quad (3-8d)$$

$$\langle F^k, e \rangle = d^k, \quad k \in K, \quad (3-8e)$$

$$F^k \geq 0, \quad k \in K \quad (3-8f)$$

이제  $k(k \in K)$ 번째 출발지-목적지에 대해,  $t^*$  및  $T^{k*}$ 를 문제 (3-8)의 최적해라 할 때,  $P_0^{k*}$ 을 통행량이 할당되지 않은 경로 중 경로통행시간이  $T^{k*}$  이하인 경로 집합으로 정의한다. 그러면,  $P_0^{k*} = \{j \in P_0^k | \langle A_j^k, t^* \rangle < T^{k*}\}$ 이며,  $P_0^{k*} = \{j | F_j^{k*} = 0, j \in P^k\}$ 이다. 복수 출발지-목적지 모형에 대한 브라이스 경로의 포함 여부는 정리 3-8로 표현된다. 브라이스 경로는 주어진 출발지-목적지에 대해 정의되기 때문에 증명은 단일 출발지-목적지 모형의 경우와 거의 동일하며 증명과정은 생략한다.

정리 3-8:  $t^*$ ,  $F^k(k \in K)$  및  $T^{k*}(k \in K)$ 를 문제 (3-8)의 최적해일 때,  $P_0^{k*}$ 에 속한 임의의 경로는  $k$ 번째 출발지-목적지에 대해 브라이스 경로가 된다.

단일 출발지-목적지 모형에서와 같이  $k$ 번째 출발지-목적지에 대해 브라이스 경로에는  $k$ 번째 출발지-목적지에 대한 통행량이 할당되지 않는 브라이스 링크 또는 브라이스 횡단(노드 횡단 또는 경로 횡단)이 적어도 하나 존재한다. 따라서 따름 정리 3-9가 성립된다.

따름정리 3-9:  $i \in \cap \{B_k | k \in K \subseteq K\}$ 이면 링크  $i$ 는  $K$ 에 속한 모든 출발지-목적지에 대해 브라이스 링크가 된다. 여기서  $B_k$ 는  $k$ 번째 출발지-목적지에 대한 브라이스 링크 집합으로 다음과 같이 정의된다.

$$B_k = \{i \in E | A_i^k F^{k*} = 0, A_{ij}^k = 1 \text{ for } j \in P_0^{k*}\} \quad (3-9)$$

(증명) 정리 3-8과  $B_k$ 의 정의로부터 도출된다.  $\square$

#### 4. 네트워크 적용 예

[그림 4-1]은 노드가 6개, 링크가 9개인 네트워크로서 Roughgarden이 소개한  $B^2$  네트워크의 토

플로지이다[21, [Figure 4(a)]. 이제 단일 출발지 (s)-목적지(t)에 대해서 통행수요 15를 가정한다. 9개의 링크와 5개의 경로 후보를 [그림 4-2]와 같이 순서를 정하면, 네트워크 토폴로지에 의해 결정되는 링크-경로 범위행렬 A, 링크 관련 정보인 최대 통행량  $\bar{f}$  및 최소 통행시간  $\bar{t}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$A = \begin{pmatrix} 11000 \\ 00110 \\ 00001 \\ 01000 \\ 00100 \\ 00010 \\ 10000 \\ 01100 \\ 00011 \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 15 \\ 15 \\ 6 \\ 15 \\ 15 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{t} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

이에 대해 문제 (3-5)를 적용한 결과가 [그림 4-2]이다. 엑셀 해찾기를 적용하였다. 문제 (3-5)

가 블록 문제가 아니기 때문에 초기조건에 따라 다양한 국부 최적해를 제공하나 전체 최적해( $t^*$ ,  $F^*$ ,  $T^*$ ) 중 하나는 경로 1(s-v1-t)에 5, 경로 3(s-v2-w1-t)에 6, 경로 5(s-w2-t)에 4의 통행량을 할당하는 것이다.

$$t^{*T} = (5, 5, 10, 1, 5, 1, 10, 5, 5),$$

$$F^{*T} = (5, 0, 6, 0, 4), \quad T^* = 15$$

이들 값으로부터 각 링크별 통행량과 각 경로별 목적지까지의 경로시간을 계산하면 아래와 같다.

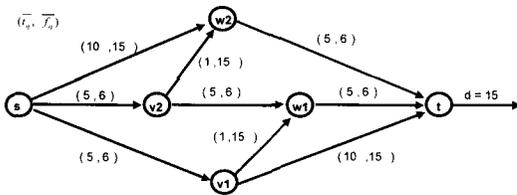
$$f^* = AF^* = \begin{pmatrix} 11000 \\ 00110 \\ 00001 \\ 01000 \\ 00100 \\ 00010 \\ 10000 \\ 01100 \\ 00011 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

| Model(3-5) applied to Figure 3-1 Network |         |                  |           |           |          |      |       |    |      |    |
|--|---------|------------------|-----------|-----------|----------|------|-------|----|------|----|
|  | s-v1-t  | s-v1-w1-t        | s-v2-w1-t | s-v2-w2-t | s-w2-4   |      |       |    |      |    |
| arc                                      | route 1 | route 2          | route 3   | route 4   | route 50 | AF=f | bar f | t  | bart |    |
| s-v1                                     | 1       | 1                | 0         | 0         | 0        | 5    | 6     | 5  | >=   | 5  |
| s-v2                                     | 0       | 0                | 1         | 1         | 0        | 6    | 6     | 5  | >=   | 5  |
| s-w2                                     | 0       | 0                | 0         | 0         | 1        | 4    | 15    | 10 | >=   | 10 |
| v1-w1                                    | 0       | 1                | 0         | 0         | 0        | 0    | 15    | 1  | >=   | 1  |
| v2-w1                                    | 0       | 0                | 1         | 0         | 0        | 6    | 6     | 5  | >=   | 5  |
| v2-w2                                    | 0       | 0                | 0         | 1         | 0        | 0    | 15    | 1  | >=   | 1  |
| v1-t                                     | 1       | 0                | 0         | 0         | 0        | 5    | 15    | 10 | >=   | 10 |
| w1-t                                     | 0       | 1                | 1         | 0         | 0        | 6    | 6     | 5  | >=   | 5  |
| w2-t                                     | 0       | 0                | 0         | 1         | 1        | 4    | 6     | 5  | >=   | 5  |
| F  | 5       | 0                | 6         | 0         | 4        | 15   | =     | 15 |      |    |
|  |         |                  |           |           |          | sum  |       |    |      |    |
| A <sup>A</sup> Tt                        | 15      | 11               | 15        | 11        | 15       |      |       |    |      |    |
| F'(AA Tt)                                | 75      | 0                | 90        | 0         | 60       | 15   | T     |    |      |    |
|  | >=      | >=               | >=        | >=        | >=       |      |       |    |      |    |
| F' T                                     | 75      | 0                | 90        | 0         | 60       |      |       |    |      |    |
|  | 225     | d <sup>A</sup> T |           |           |          |      |       |    |      |    |
|  | 480     | <bar f, t>       |           |           |          |      |       |    |      |    |
| max                                      | -255    | diff             |           |           |          |      |       |    |      |    |

[그림 4-2] [그림 4-1]에 문제(3-5) 적용결과(엑셀 해찾기)

$$A^{T_t^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 15 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

따라서  $T_0^{*T}(t^*) = 11$ ,  $P_0^* = \{2, 4\}$ 가 된다. 즉,  $T^* = 15$  보다 적은 브라이스 경로는 경로 2와 경로 4가 된다. 이들 경로 중 통행량이 할당되지 않은 링크는 (v1, w1) 및 (v2, w2)이며, 이들 링크는 브라이스 링크이다. 참고로 여기에 문제 (2-2)를 적용하여 균형 값을 계산하면 경로 2 및 경로 4에도 통행량이 할당되어 최단경로 시간은 23으로 증가하게 된다.



[그림 4-1] 브라이스 링크가 2개 포함된 네트워크

### 5. 결론 및 추후 연구

본 논문에서는 Nesterov와 de Palma[18]가 제시한 안정 동력학 모형에 의해 일반적인 네트워크에서 브라이스 역설을 발견하는 방법을 제안하였다. 안정 동력학 모형은 인위적인 링크 통행시간 함수를 가정하지 않고, 링크 별로 아주 기본적인 2개의 물리량(최소 통행시간과 최대통행량)만을 요구하나 혼잡 상태를 직관에 부합되게 잘 표현하는 유용한 분석 도구이다. 본 연구에서는 브라이스 역설을 브라이스 링크, 브라이스 횡단(노드 횡단 및 경로 횡단)의 측면에서 파악하였다. 브라이스 노드 횡단은 브라이스 링크가 하나의 노드로 축약된 극한 형태이고, 브라이스 경로 횡단은 브라이스 노드

횡단의 특별한 변형이다. 본 연구에서 제안하는 브라이스 역설 발견 방법은 2단계 절차이다. 1단계로 수정된 안정 동력학 가정(가정 3-1 및 가정 3-2)을 만족하는 경로별 통행량 할당을 문제 (3-5)에 의해 결정한다. 2단계로 1단계에서 통행량이 할당되지 않은 경로의 경로 시간과 통행량이 할당된 경로의 경로 시간을 비교한다. 전자가 후자보다 적으면, 경로시간이 적은 경로가 브라이스 링크나 브라이스 횡단이 포함된 브라이스 경로가 된다.

본 연구의 추후 연구는 문제 (3-5)의 전체 최적해 해법 개발 연구이다. 제약식 (3-5c)는 일반적으로 볼록함수가 아닌 2차함수이기 때문에 문제 (3-5)는 상용 최적화 solver로는 전체 최적해를 보장받지 못한다. 전체 최적해 해법을 위한 방법으로 페널티 함수법(penalty function method)을 고려할 수 있다. 페널티 함수에 의해 제약식 (3-5c)를 목적함수에 포함시키면 문제는 선형제약의 비볼록 2차계획(non-convex quadratic programming) 문제가 되며, 이러한 문제는 SDP(semidefinite program) 완화(relaxation) 문제에 기초하여 분기-한계 기법을 적용할 수 있다[6].

안정 동력학 모형은 이용자 균형 모형처럼 링크 통행시간 함수를 정의하거나 함수의 파라미터를 보정할 필요 없는 매우 단순한 가정에 기초한 모형이다. 그럼에도 불구하고 많은 혼잡과 관련된 많은 교통 문제들을 기술할 수 있다는 것은 놀라운 일이라고 생각된다. 그러나 안정 동력학 연구가 주로 이론적으로 이루어지고 실증적으로 아직 확실하게 한계를 검증받지 못한 상태이므로 본 연구에서 안정 동력학 모형에 기초한 브라이스 역설을 발견하는 수리계획 모형(문제 (3-5) 및 문제 (3-8))도 이로 인한 적용상 한계가 있을 수 있다.

사실 안정 동력학 모형은 '주어진 통행수요가 계속 유지되고 동적인 통행 상태가 시간이 지나면서 안정상태로 수렴하게 된다면, 안정상태에 대한 통행 상황은 안정 동력학 모형에 의해 표현될 것이다'는 것을 전제하고 있다. 이는 아직 증명되지 않은 하나의 가설이며, 안정 동력학 연구의 최종 목

표가 될 것이다. 만일 이러한 가설이 사실이라면 안정 동력학 모형은 이론적이고 기본적인 분석모형이 될 것이다. 왜냐하면 링크 통행시간이 링크 통행량 함수의 어떠한 파라미터도 포함하고 있지 않기 때문이다. 안정 동력학의 이론적 증명과 별도로 실제 교통망에 적용하는 적용연구가 필요하다. 적용 결과는 실제 상황 및 이용자 균형 모형의 결과와 비교할 때 좋은 의미를 발견할 수 있으리라 생각하며, 이러한 적용 연구는 비교적 많은 조사와 노력이 요구되는 후추 연구가 될 것이다.

## 참 고 문 헌

- [1] Akamatsu, T., "A Dynamic Traffic Assignment Paradox," *Transportation Research B*, Vol.34B, 2000, pp.515-531.
- [2] Akamatsu, T. and B. Heydecker, "Detecting Dynamic Traffic Assignment Capacity Paradoxes in Saturated Networks," *Transportation Science*, Vol.37, 2003, pp.123-138.
- [3] Beckmann, M., C. McGuire, and C. Winsten, *Studies in Economics of Transportation*, Yale University Press, New Haven, 1956.
- [4] Bernstein, D.H. and T.E. Smith, "Equilibria for Networks with Lower Semicontinuous Costs: With an Application to Congested Pricing," *Transportation Science*, Vol.28, 1994, pp.221-235.
- [5] Braess, D., A. Nagurney and T. Wakolbinger, "On a Paradox of Traffic Planning," *Transportation Science*, Vol.39, 2005, pp.446-450. (Translated from the original German: Braess, D., "Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung," *Unternehmensforschung*, Vol.12, 1968, pp.258-268.
- [6] Burer, S. and D. Vandenbussche, "A Finite Branch-and-Bound Algorithm for Nonconvex Quadratic Programming via Semidefinite Relaxation," to appear in *Mathematical Programming* (Series A).
- [7] Catoni, S. and S. Pallottino, "Traffic Equilibrium Paradoxes," *Transportation Science*, Vol.25, 1991, pp.240-244.
- [8] Clarke, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, J. Wiley and Sons, 1983.
- [9] Dafermos, S. and A. Nagurney, "On Some Traffic Equilibrium Theory Paradoxes," *Transportation Research B*, Vol.18B, 1984, pp. 101-110.
- [10] Devarajan, S., "A Note of Network Equilibrium and Noncooperative Games," *Transportation Research B*, Vol.15B, 1981, pp. 421-426.
- [11] Fisk, C., "More Paradoxes in the Equilibrium Assignment Problem," *Transportation Research B*, Vol.13B, 1979, pp.305-309.
- [12] Frank, M., "The Braess Paradox," *Mathematical Programming*, Vol.20, 1981, pp.283-302.
- [13] Friesz, T.L., "Transportation Network Equilibrium, Design and Aggregation: Key Developments and Research Opportunities," *Transportation Research A*, Vol.19A, 1985, pp.413-427.
- [14] Harker, P.T., "Multiple Equilibrium Behaviors on Networks," *Transportation Science*, Vol.22, 1988, pp.39-46.
- [15] Murchland, J.D., "Braess's Paradox of Traffic Flow," *Transportation Research*, Vol.4, 1970, pp.391-394.
- [16] Nagurney, A., *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [17] Nesterov, Y. and A. de Palma, "Stable Traffic Equilibria: Properties and Applications," *Optimization and Engineering*, Vol.1,

- 2000, pp.29-50.
- [18] Nesterov, Y. and A. de Palma, "Stable Dynamics in Transportation Systems," CORE DP #00/27, University of Louvain, Belgium, 2000.
- [19] Nesterov, Y. and A. de Palma, "Park and Ride for the Day Period and Morning-Evening Commute," *Mathematical and Computational Models for Congestion Charging (Applied Optimization, Vol.101, Springer US)*, 2006, pp.143-157.
- [20] Pas, E.I. and S.L. Principio, "Braess' Paradox : Some New Insights," *Transportation Research B*, Vol.31B, 1997, pp.265-276.
- [21] Roughgarden, T., "On the Severity of Braess's Paradox : Designing Networks for Selfish Users is Hard," *Journal of Computer and System Sciences*, Vol.72, 2006, pp.922-953.
- [22] Steiberg, R. and W. Zangwill, "The Prevalence of Braess Paradox," *Transportation Science*, Vol.17, 1983, pp.301-318.
- [23] Wardrop, J.G., "Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research," in *Proceedings of the Institute of Civil Engineering*, Part II, 1952, pp.325-378.
- [24] Yang, H. and G.H. Bell, "A Capacity Paradox in Network Design and How to Avoid It," *Transportation Research A*, Vol.32A, 1998, pp.539-545.
- [25] U.S. Bureau of Public Roads, *Traffic Assignment Manual*, Washington, D.C., 1964.
- [26] "Updated BPR Parameters Using HCM Procedures," cited from "Traffic Engineering : Planning for Traffic Loads," <http://www.sierrafoot.org/local/gp/engineering.html>.