

논문 2007-44IE-4-4

Lyapunov 방정식을 이용한 불확실한 선형 시스템의 안정한 섭동 유계 해석

(The Interpretation Stability Uncertain Bound for the Uncertain Linear Systems via Lyapunov Equations)

조도현*, 이상훈**, 이종용**

(Do-Hyeoun Cho, Sang-Hun Lee, and Jong-Yong Lee)

요약

본 논문에서는 섭동 시스템 행렬을 가지는 선형 시스템에 대하여 Lyapunov 방정식과 함수를 고려하여 섭동 유계를 유도한다. 그리고 Lyapunov 함수의 도함수가 음의 정의로 보장되는 가장 큰 섭동 구간을 허락하는 Lyapunov 함수의 선택에 대하여 고려한다. 행렬 계수를 가지는 행렬 리카티 방정식의 해 존재에 대하여 살펴보고, 예를 통하여 검증한다.

Abstract

In this paper, we use Lyapunov equations and functions to consider the linear systems with perturbed system matrices. And we consider that what choice of Lyapunov function V would allow the largest perturbation and still guarantee that V is negative definite. We find that this is determined by testing for the existence of solutions to a related quadratic equation with matrix coefficients and unknowns the matrix Riccati equation.

Keywords : Matrix uncertainty, Perturbations, Lyapunov Equations, Riccati Equations

I. 서론

선형 시스템에 대한 안정도 이론은 실제 시스템에서의 섭동이나 구조와 관련된 물리적 현상을 고려한 해석으로 발전되어가고 있다. 선형 안정도 이론에 비정상적인(non-normality)을 포함한 일반화된 안정도 이론이 제안되어 왔다.^[4~5] 또한 시간 지연을 갖는 시스템에 대한 연구가 진행되고 있다. 본 논문에서는 섭동 시스템 행렬을 가지는 선형 시스템에 대하여 Lyapunov 방정식

과 함수를 고려하여 섭동 유계는 아직 고려되지 않고 있다.

즉, 선형 시스템 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ 에 대한 행렬 A 의 모든 고유치가 음의 영역에 있다면, $x = 0$ 는 지수적으로 안정한 평형점이며^[1], 또한 임의의 양으로 정의된 대칭 행렬 Q 에 대하여, Lyapunov 행렬 방정식 $A^T P + PA = -Q$ 를 만족하는 양으로 정의된 행렬 대칭 P 를 얻을 수 있다는 것과 등가이다^[2~3].

일반적인 선형 공칭 시스템 $\dot{x} = Ax$ 에 대하여, 시스템에 섭동항이 포함된 식(1)과 같은 선형 섭동 모델을 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + \Delta x \quad (1)$$

여기서, $x \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$ Δ 는 상태, 시스템 행렬 및 섭동항을 나타낸다.

* 정회원, 인하공업대학 디지털전자정보과
(Dept. of Digital Electronics & Information, Inha Tech. Col.)

** 정회원, 광운대학교 교양학부
(Division of General Education, Kwang-woon University)

※ 이 논문은 2003년도 광운대학교 교내 학술연구비 지원에 의해 연구되었음.

접수일자 : 2007년6월8일, 수정완료일: 2007년11월30일

예를 들어, 질량-스프링 시스템의 모델링의 경우, 스프링 탄성의 불확실성은 시스템 행렬의 섭동항으로 나타난다^[6].

만약 선형 공칭 시스템 행렬 A 의 고유치가 s -평면의 좌반면에 존재할 경우, 본 논문에서는 섭동 시스템 행렬 $A + \Delta$ 의 고유치가 s -평면의 좌반면에 존재할 수 있는 섭동 Δ 의 범위를 결정하고자 한다. 즉 선형 섭동 시스템 식(1)이 안정하도록 하기 위한 섭동의 크기 $\|\Delta\|$ 를 결정하고자 한다^[7].

II. 섭동과 섭동 고유치

본 논문에서는 선형 섭동 시스템 식(1)이 안정하도록 하기 위한 섭동의 크기 $\|\Delta\|$ 를 결정하고자 한다. 즉, 섭동의 크기 $\|\Delta\| < \rho$ 을 만족 하는 섭동에 대하여, $A + \Delta$ 의 모든 고유치가 s -평면의 좌반면에 존재하도록, ρ 의 크기를 결정하는 것이다^[8].

만약 A 의 고유치가 s -평면의 좌반면에 존재한다면, $A^T P + PA = -I$ 는 양으로 정의된 해를 갖는다.

여기서 $P \in n \times n$ 는 양으로 정의된 대칭행렬이며, $I \in R^{n \times n}$ 는 단위 행렬이다.

먼저 Lyapunov 함수를 식(2)와 같이 고려하자

$$V(x) = x^T P x \tag{2}$$

식(2)에 시간에 대하여 1차 미분하고, 식(2)를 대입하고, 섭동의 크기가 $\|\Delta\| < \frac{1}{4\|P\|}$ 이면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (A + \Delta)^T P x + x^T P (A + \Delta) x \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x + x^T \Delta^T P x + x^T P \Delta x \\ &= -|x|^2 + 2\|\Delta\| \|P\| |x|^2 \\ &\leq -|x|^2 + 2 \frac{1}{4\|P\|} \|P\| |x|^2 \end{aligned}$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{1}{2}|x|^2 \tag{3}$$

즉, $\rho = \frac{1}{4\|P\|}$ 로 선택함으로써, $\|\Delta\| < \rho$ 인 경우, Lyapunov 함수 V 의 도함수는 $\dot{V} \leq -\frac{1}{2}|x|^2$ 이고, $(A + \Delta)$ 의 모든 고유치는 s -평면의 좌반면에 존재하며, $x(t)$ 는 지수적으로 영에 접근한다.

제안된 내용을 예를 통하여 살펴보자

공칭 시스템 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ 에 대하여,

Lyapunov 방정식 $A^T P + PA = -I$ 의 해는 $P = \begin{pmatrix} 1.1167 & 0.0833 \\ 0.0833 & 0.1167 \end{pmatrix}$ 이다.

이 경우에, $\|P\| = 1.1236$ 이고,

$$\rho = \frac{1}{4\|P\|} = 0.2225 \text{ 이 된다.}$$

좀 더 일반적인 방법으로, Lyapunov equation $A^T P + PA = -Q$ 을 만족하는 P 를 선택할 수 있으며, $Q \in R^{n \times n}$ 의 양으로 정의된 대칭 행렬이다. 역시 같은 방법으로 Lyapunov 방정식의 도함수에 섭동 선형 시스템에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -x^T Q x + 2x^T P \Delta x \\ &\leq -q_1 |x|^2 + 2\|\Delta\| \|P\| |x|^2 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서, $0 \leq q_1 \leq q_2 \dots \leq q_n$ 는 양으로 정의된 행렬 Q 의 고유치라 하자.

따라서 주어진 Q 에 대하여, 만약 $\rho = \frac{q_1}{2\|P\|}$ 로 선택하면, \dot{V} 는 음으로 정의된다.

그리고 $\rho = \frac{q_1}{2\|P\|}$ 로 선택하고, 만약 $\|\Delta\| < \rho$ 이면 이때 $A + \Delta$ 의 모든 고유치는 s -평면의 좌반면에 존재한다.

위의 예제 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ 에 대하여.

$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 를 선택하고, Lyapunov 방정식을 풀면, $P = \begin{pmatrix} 1.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$ 를 얻는다. 이 경우에 $q_1 = 1.3820$ 이고, $\|P\| = 1.7906$ 이므로, ρ 는 0.3859로 선택된다.

ρ 의 크기를 증가시키기 위한 방법은 $\frac{q_1}{2\|P\|}$ 을 최대화하는 Q 를 선택하여야 한다.

그러나 이 방법은 준최적(suboptimal) 방법이다.

Lyapunov 방정식으로부터, $A + \Delta$ 의 고유치를 확인할 수 있다.

실제로, 주어진 값 $\rho > 0$ 에 대하여 $\|\Delta\| < \rho$ 을 만족하는 모든 섭동항 Δ 에 대한 $A + \Delta$ 의 고유치에 대하여 조사 할 수 있다.

매우 적은 ρ 에 대하여, $A + \Delta$ 의 고유치는 공칭 행렬 A 의 고유치 근방에 집중되는 집합으로 표현될

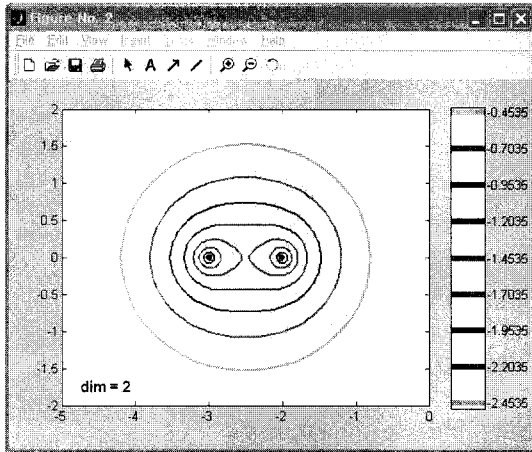


그림 1. $\rho = 0.3859$ 를 갖는 예제 1의 의 고유치 $A + \Delta$
 Fig. 1. Eigenvalue of $A + \Delta$ for Ex. 1 with $\rho = 0.3859$.

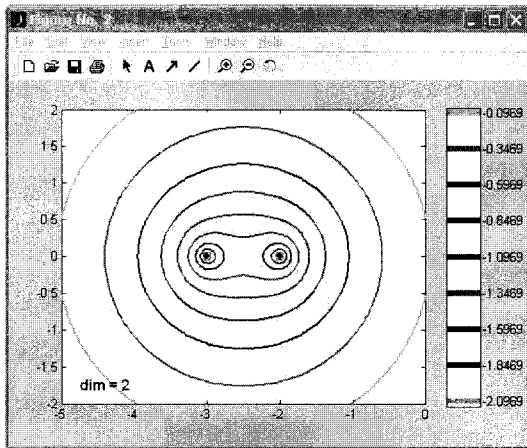


그림 2. $\rho = 0.8$ 를 갖는 예제 1의 $A + \Delta$ 의 고유치
 Fig. 2. Eigenvalue of $A + \Delta$ for Ex. 1 with $\rho = 0.8$

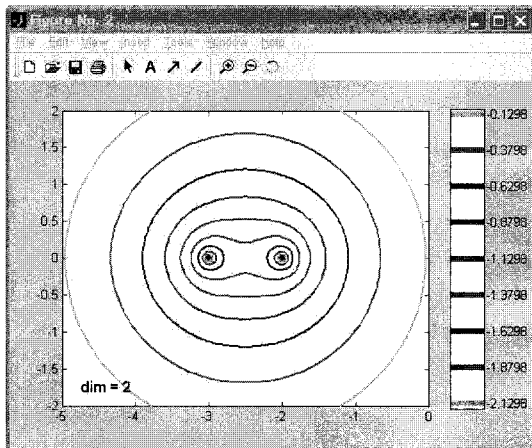


그림 3. $\rho = 0.7416$ 를 갖는 예제 1의 $A + \Delta$ 의 고유치
 Fig. 3. Eigenvalue of $A + \Delta$ for Ex. 1 with $\rho = 0.7416$

것이며, MATLAB의 EIGTOOL을 이용하여 의사스펙트럼(pseudospectra)을 그리면 그림 1과 같다^[9~10].

ρ 를 증가시킬 때에는 집합의 집중도도 넓게 분포하

게 될 것이다. 예를 통하여 살펴보자. 가장 작은 ρ 에서 다룰 수 있는 경우, 고유치의 변화량을 표시하는 등고선(contours)이 그림 2와 같이 s -평면의 우반면과 교차하는 것을 시뮬레이션 결과 확인할 수 있다.

다음으로 ρ 에 의하여 매개변수화된 리카티 방정식, $A^T P + PA + \rho^2 I + P^2 = 0$ 이 양으로 정의된 해를 갖기 위한 필요충분조건은 $\|\Delta\| < \rho$ 을 만족하는 모든 Δ 에 대하여 $A + \Delta$ 의 고유치는 실수부가 음으로 s 평면의 좌반면에 놓이게 된다.

리카티 방정식에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (A + \Delta)^T P + P(A + \Delta) &= -\rho^2 I - P^2 + \Delta^T P + P \Delta \\ &= -(P + \Delta)^T (P + \Delta) + \Delta^T \Delta - \rho^2 I \\ &= -Q \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $\|\Delta\| < \rho$ 을 만족하는 조건하에, Q 는 음으로 정의 된다.

예제의 시스템행렬이 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ 에 대하여, 일치하는 해 P 는 식(6)으로 표현되며, $\rho = 0.7416$ 을 선택할 수 있다.

$$P = \begin{pmatrix} 1.0582 & 0.1408 \\ 0.1408 & 0.0859 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$\log_{10} 0.7416 = -0.1298$ 의 등고선은 허수축의 좌반면에 놓일 것이며, MATLAB의 EIGTOOL을 이용하여 의사스펙트럼(pseudospectra)을 그리면 그림 3과 같다.

이상으로 섭동 시스템 행렬을 가지는 선형 시스템에 대하여 Lyapunov 방정식과 함수를 고려하여, 섭동항을 포함하는 시스템이 안정화되는 섭동 유계를 구하였으며, Lyapunov 함수의 도함수가 음의 정의로 보장되는 가장 큰 섭동 구간을 허락하는 Lyapunov 함수의 선택에 대하여 고려하였다.

III. 결 론

본 논문에서는 섭동 시스템 행렬을 가지는 선형 시스템에 대하여 Lyapunov 방정식과 함수를 고려하였다. 그리고 Lyapunov 함수의 도함수가 음의 정의로 보장되는 가장 큰 섭동 구간을 허락하는 Lyapunov 함수의 선택에 대하여 고려하였다.

참 고 문 헌

- [1] B. C. Kuo, *Automatic Control Systems, 7ed.*, Prentice-Hall, 1996.
- [2] T. Chen, and B. Francis, *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer, London, 1995.
- [3] Tatjana Stykle, "Numerical Solution and Perturbation Theory for Generalized Lyapunov Equations", *Linear Algebra and its Applications*, 349(1-3), 2002. pp. 155-185.
- [4] B .F. Farrel and P. J. Ioannou, *Generalized Stability. Part I: Autonomous Operators*, *J. Atmos. Sci.* 53. 1996, pp. 2025-2041.
- [5] B .F. Farrel and P. J. Ioannou, *Perturbation Growth and Structure in Time Dependent Flows, Stochastics and Dynamics*, *J. Atmos. Sci.* 56. 1996, pp. 3622-3639.
- [6] R. Byers and N.K. Nichols. *On the stability radius of a generalized state-space system.* *Linear Algebra Appl.*, 1993. 188/189:113-134
- [7] L. Ya. Adrianova, *Introduction to Linear Systems, of Differential Equations*, *Trans. of Math. Mono. Vol 164*, AMS, 1995.
- [8] L. Dieci, E. S. VAN Vleck, "Perturbation Theory for Approximation of Lyapunov Exponents by QR Methods", *Trans. of Math. Mono. Vol 173*, AMS, 2004.
- [9] L. Ljung, *System Identification Toolbox User's Guide*, The Math Works, Natick, 1998.
- [10] Oxford Univ. Computing Lab., "Pseudospectra introduction", <http://web.comlab.ox.ac.uk/projects>.

————— 저 자 소 개 —————

조 도 현(정회원)
대한전자공학회 논문지
제43권 1E편 제1호 참조

이 상 훈(정회원)
대한전자공학회 논문지
제44권 1E편 제3호 참조

이 종 용(정회원)
대한전자공학회 논문지
제44권 1E편 제3호 참조