

교량건설방식에 따른 수학적 모델링의 변천과정 기술과 현수교 방정식의 수학적 연구의 흐름*

남서울대학교 교양과정부 남혜원
hwnam@nsu.ac.kr

현수교는 기둥 설치가 용이하지 않은 환경에 적용할 수 있는 혁신적인 교량 건설 방법으로 사람들의 관심을 끌어들였다. 그러나 Tacoma Narrows Bridge의 붕괴 이후 안전상의 문제가 제기되었으며, 많은 비용이 지불되는 교량 건설에 시행착오를 줄이고자 현수교 방정식에 대한 연구가 시행되었다. 이 논문에서는 다양한 현수교 방정식의 모델을 정리하여 현수교 방정식의 차후 연구 방향을 제시하고자 한다.

주제어 : 현수교 방정식, 모델링, 위상적 방법

0. 서론

현수교에 작용하는 여러 가지 외력에 의하여 Tacoma Narrows Bridge의 붕괴와 같은 예상치 못한 결과가 얻어진다. 교량의 붕괴와 같은 사고로 발생하는 많은 인력 및 비용의 낭비를 줄이고자 안전한 설계요소를 찾는 연구가 필요하게 되었다. 많은 수학자들은 단순한 현수교의 움직임 설명하는 간단한 모델에 현실적인 요인을 추가함으로써 실제 교량의 움직임을 예상할 수 있는 실질적인 모델을 제시하여 현수교 연구에 박차를 가했다.

1987년 발표된 현수교 방정식은 현수교의 정확한 진동을 묘사하지는 못하지만, 현수교 연구의 시발점이 되었다. 이 후 흔들리는 보에 의해 표현된 노반의 운동뿐만 아니라 케이블의 진동도 고려한 새로운 모델이 제시되었다. 이 모델은 연립방정식의 형태를 취하고 있다. 1990년 Tacoma Narrows Bridge 붕괴의 직접적인 원인 중 하나인 뒤틀림 진동을 고려한 새로운 모델이 발표되었으며 2002년 현수교의 상하 병진 운동과 뒤틀림 진동 및 케이블의 움직임까지 고려한 복잡한 형태의 모델이 유도되었다. 이 논문에서는 현수교에 작용하는 여러 가지 요인을 고려한 다양한 모델을 정리하고, 각 방정식에 대한 해의 존재성 및 다중성 연구의 방향을 제시하고자 한다.

* 이 논문은 2006학년도 남서울대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음

1. 교량 건설에 대한 역사적 배경

처음 교량이 건설된 시점을 언급하는 것은 불가능하지만, 교량의 역사는 인류 역사와 밀접한 관계가 있다. 교량은 만들어지는 시대의 기술과 지식이 집약된 건축물이므로 “engineering art”라 할 수 있다. 고전적인 교량은 기둥(pilot)에 의하여 지탱되었다. 두 기둥 사이의 거리는 다리의 형태와 재료에 영향을 미치므로 건설하려는 교량의 길이가 길수록 더 많은 기둥이 필요했다. 그러나 기둥의 설치가 용이하지 않은 환경에서 교량을 건설하기 위해서는 노반(road-bed)의 양 끝 지점에 기둥을 세우고 두 지점 사이의 긴 거리를 연결하는 방법에 대한 연구가 필요하였다. 이 연구의 결과로 현수교라는 교량의 새로운 형태가 제시되었다. 현수교는 폭이 넓고 깊은 강 또는 바다의 만 위를 가로지르는 훌륭한 형태의 혁신적 교량건설법이다([8]).

(1) 현수교에 대한 역사적 배경

현수교(suspension bridge)의 최초의 기원은 산악지의 원주민족들이 덩굴을 나무에 매달아 계곡을 건너가는 수단으로 사용한 것이라 할 수 있으며, 동남아시아, 남미대륙, 인도의 오지 등에서 그와 같은 발자취를 찾아볼 수 있다. 기록에 나타난 가장 오래된 현수교는 서기 400년경에 설치된 인더스강 상류의 케이블(cable)만으로 이루어진 현수교이다. 대부분의 원시적 현수교는 케이블만으로 구성되어 있기 때문에 하중을 많이 받는 부분은 변형이 크게 발생하여 사용상 불안정성을 지니고 있다. 케이블 이외에는 달리 의지할 만한 휨강성(flexible strength)이 큰 부재가 없으며, 또한 케이블이 식물성 섬유로 만들어져 있기 때문에 내구성이 부족하다는 단점을 지니고 있다. 현수교의 주요 부재는 인장력을 받는 케이블이므로, 인장에 강한 강재의 출현은 현수교의 가설기술을 현저하게 발전시켰다.



Figure 1. Menai Suspension Bridge

스코틀랜드의 기술자인 Thomas Telford에 의하여 설계된 Menai Suspension Bridge가 기록에 의한 첫 번째 현수교로서 1826년에 완공되었다. 176미터의 긴 중앙경관(center

span)을 가진 Menai Suspension Bridge의 완공이후 main span의 길이가 현수교 건설기술을 평가하는 중요한 요소가 되었다.



Figure 2. Brooklyn Bridge



Figure 3. Golden Gate

19세기 과학과 기술의 혁명으로 Brooklyn Bridge(1883년, 488m), Golden Gate(1937년, 1280m) 등 긴 교량이 건설되었다. 세계 최초의 철도 현수교인 Niagara Railway Suspension Bridge(1855년)를 건설한 John A. Roebling의 진기한 업적 중 하나는 488m span의 Brooklyn Bridge이다. Brooklyn Bridge는 현대 현수교의 효시로 와이어로프, 평행선 케이블, 트러스보강형, 와이어의 아연 도금 처리 등 그 당시 최첨단 기술을 동원하여 건설되었고, 이 기술은 현대 현수교의 표준이 되었다. 1937년에 개통된 Golden Gate Bridge는 샌프란시스코 만과 마린 카운티를 연결한 다리로 태평양 바다 위를 가로 지른다. 미국 건축계의 7대 불가사의 중의 하나인 Golden Gate Bridge는 바다의 조류, 바람, 지진 등 여러 열악한 조건들을 극복하고 큰 배와 비행기도 다리 밑으로 지나갈 수 있도록 설계되었다.



Figure 4. Vertical and torsional oscillations in Tacoma Narrows Bridge

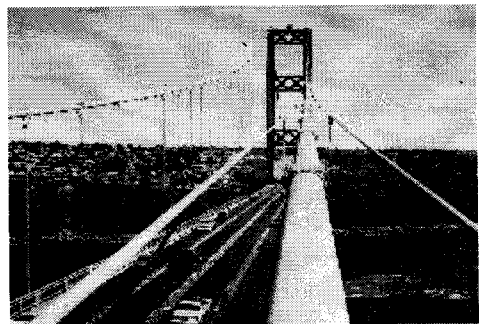


Figure 5. Second Tacoma Narrows Bridge

20세기 공학적인 관점에서 설계된 교량의 움직임을 예상하는 방법은 교량모형의 모의실험과 선형역학이론(linear mechanical theory)의 적용이었다. 현수교 건설이 절정에 달했던

1940년 11월 7일 Washington에서 시속 42마일의 강풍에 의하여 Tacoma Narrows Bridge가 붕괴되는 사건이 발생하였다. Tacoma Narrows Bridge의 붕괴로 공학적 견지에서만 고려되었던 교량건설에 이론적 관점에서의 접근이 필요함을 인식하게 되었다.

1950년 붕괴된 Tacoma Narrows Bridge보다 바람에 저항하는 힘이 큰 새로운 교량이 건설되었다. 옛 교량은 육백만 달러의 비용으로 건설되었으며 새로운 교량은 천오백만 달러의 비용이 지불되었다. 충분한 연구로 이론적 무지에서 비롯된 시행착오를 줄임으로써 많은 비용과 물질을 절감할 수 있다는 사실은 명백하다.

(2) Tacoma Narrows Bridge

Tacoma Narrows Bridge는 교량에 관심이 없는 일반인이라 할지라도 모르는 사람이 없을 정도로 공학적으로나 사회적으로 역사성이 있는 교량이다. 미국에서 현수교가 한창 붐을 이룬 1930년대 최고의 교량 설계자로 알려진 Leon Moisseiff는 가볍고 날렵한 현수교 설계에 몰두하였다. 1938년 처짐이론(Deflection theory)에 의하여 경간비(Depth Span Ratio)가 1:350이고 판(형)거더(plate girder)보강형을 사용한 Tacoma Narrows Bridge가 착공되었으며 1940년 7월에 완공되었다. 가설 때부터 심한 흔들림이 있던 Tacoma Narrows Bridge가 붕괴된 것은 개통 4개월 뒤인 1940년 11월 7일이었다([1]). 이 붕괴 장면은 Tacoma 시내에서 카메라 가게를 하고 있던 Barney Elliott에 의해 생생하게 카메라에 담겨져 기록되게 되었다.



Figure 6. Bridge midsection crashing into the waters of the Tacoma Narrows, November 7, 1940

이 붕괴 사고로 풍하중에 의한 교량의 거동에 대한 연구가 시작되게 되었고, 날렵하고 가벼운 현수교가 반드시 좋은 것은 아니라는 사실을 알게 되었다. Tacoma Narrows Bridge는 초속 53m의 풍속에 견딜 수 있도록 설계되었지만 Flutter에 의해 초속 19m의 한계풍속 이하의 바람에 무너지게 되었고, 이 사고는 기존에 알지 못했던 바람에 의한 거

동이라는 새로운 영역을 부각시키는 계기가 되었다. 참고로 현대의 현수교에서는 풍동실험을 통해 사전에 문제점을 발견해 내고, Fairing, Damper 등을 통해 Flutter나 Galloping을 방지하고 있다.

2. 현수교 방정식의 모델링

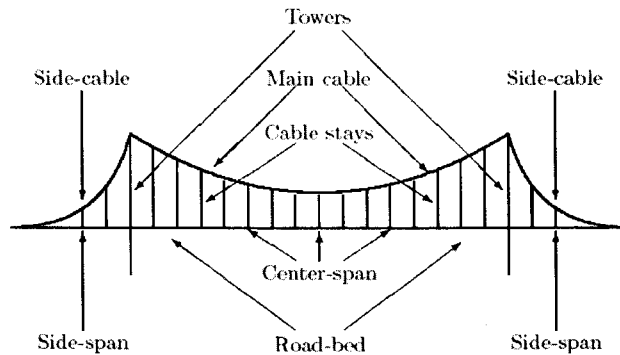


Figure 7. Sideview of the suspension bridge

현수교는 현실적인 요인을 최대한 반영하는 방법과 가능한 단순한 형태로 제안하는 방법의 두 가지 방향으로 연구되어 왔다. 단순화한 모델링은 간단한 해석적 방법을 이용하여 결과를 얻을 수 있으나 얻어진 결과와 실제 상황은 다소 차이가 있을 수 있다. 반면에 교량 구조물의 위험성을 고려한 움직임을 표현하는 모델링은 실제 움직임을 더 정확히 예상할 수 있다. 이러한 모델은 비선형 도약에 의하여 야기되는 중요한 비대칭성을 갖는다. Lazer와 McKenna에 의하여 시작된 현수교 방정식에 대한 연구가 현수교의 진동을 포함하는 새로운 모델로 발전되었다.

(1) 단순보 모형

현수교는 양단이 지지된 출렁이는 일차원 단순보의 진동에 의해 모델링한다. 현수교의 특성상 보의 폭과 두께는 중앙경간과 비교하면 무시할 수 있을 수치이므로 중앙경간만을 고려하여 일차원 단순보로 간주한다.

양단이 지지된 출렁이는 일차원 단순보는 바람으로 인한 외부의 주기적인 힘과 중력, 그리고 중력의 반대방향으로 작용하는 케이블 스테이의 복원력의 영향을 받는다. 이러한 스테이들에 의해 지지된 구조물은 강체(a solid and immovable object)로 간주할 수 있다.

길이가 L 인 보의 변위 $u(x, t)$ 는 비선형 편미분 방정식

$$(1) \quad m u_{tt} + k u_{xxxx} + \delta u_t + b u^+ = W(x) + f(x, t)$$

과 경계조건

$$(2) \quad u(0, t) = u(L, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0$$

으로 주어진다.

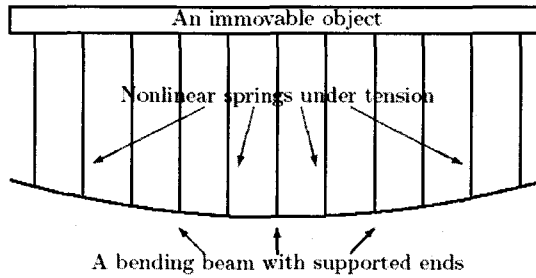


Figure 8. Center span hanged by fixed frame

방정식 (1)의 첫 번째 항은 관성력(보의 단위 길이당 질량 m 을 갖는다)을 표현하며 두 번째 항은 탄성력(상수 k 를 갖는다)이고 세 번째 항은 유체 감쇠(감쇠상수 δ 를 갖는다)를 나타낸다. Hook의 법칙을 따르는 용수철인 케이블 스테이는 척력은 작용하지 않고 인력만 작용하므로 네 번째 항 $b u^+$ 로 묘사된다. 이 때 $u^+ = \max\{0, u\}$ 이고 b 는 케이블의 강성계수이다. 우변은 중력 $W(x)$ 와 바람으로 인한 외부의 주기적인 힘 $f(x, t)$ 을 나타낸다.

위의 모델링은 Lazer & McKenna([14])에 의해 소개되었으며, 현수교 연구의 시발점으로 많은 학자들에 의하여 인용된다. 이는 현수교의 정확한 진동을 묘사하지는 못하지만, 단순화된 형태는 실제와 유사한 모습을 보여준다.

(2) 상하 병진운동 모형

두 번째 모델링은 흔들리는 보에 의해 표현된 노반(road-bed)의 운동뿐만 아니라 주케이블(main cable)의 진동도 고려한다. 유동적인 끈으로 구성된 주케이블은 편방향 용수철에 의해 보와 연결된다.

케이블의 변위 $v(x, t)$ 와 보의 변위 $u(x, t)$ 는 비선형 편미분 방정식

$$(3) \quad m_1 v_{tt} - k_1 v_{xx} + \delta_1 v_t - b(u-v)^+ = W_1(x) + f_1(x, t),$$

$$m_2 u_{tt} + k_2 u_{xxxx} + \delta_2 u_t + b(u-v)^+ = W_2(x) + f_2(x, t)$$

과 경계조건

$$(4) \quad \begin{aligned} u(0, t) = u(L, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0, \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 \end{aligned}$$

로 주어진다.

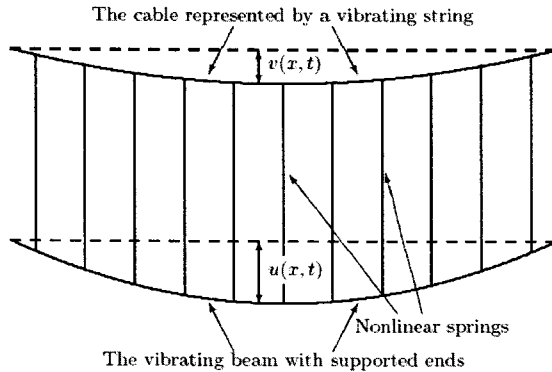


Figure 9. Center span hanged by main cable

케이블과 보를 연결하는 비선형 스테이는 케이블을 끌어내리고 노반을 끌어당긴다. 따라서 첫 번째 방정식에서 $b(u-v)^+$ 항은 마이너스 부호를 가지고 두 번째 방정식에서 같은 항의 부호는 플러스이다. 다른 항은 이전의 모델과 유사하다([15]).

(3) 뒤틀림 진동 모형

위의 두 가지 경우는 현수교의 상하 병진운동만 고려하였다. 이는 Tacoma Narrows Bridge 붕괴의 직접적인 원인 중 하나인 뒤틀림 진동을 고려하지 않은 모델이다. 세 번째 모델링은 무시할 수 없는 중요한 요인인 뒤틀림 진동을 포함하는 현실적인 모델이다.

무게중심에서 측정된 변위 $y(x, t)$ 와 수평으로부터 가로지르는 부분의 굴절을 측정된 $\phi(x, t)$ 는 비선형 편미분 방정식

$$(5) \quad \begin{aligned} m_1 y_{tt} + k_1 y_{xxxx} + \delta_1 y_t + b[(y-l\sin\phi)^+ + (y+l\sin\phi)^+] &= W_1(x) + f_1(x, t), \\ m_2 \phi_{tt} - k_2 \phi_{xx} + \delta_2 \phi_t - bl \cos\phi[(y-l\sin\phi)^+ - (y+l\sin\phi)^+] &= W_2(x) + f_2(x, t) \end{aligned}$$

과 경계조건

$$(6) \quad \begin{aligned} y(0, t) = y(L, t) = y_{xx}(0, t) = y_{xx}(L, t) = 0, \\ \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0 \end{aligned}$$

으로 주어진다. l 은 노반의 가로지르는 부분의 길이의 반이며 다른 변수는 위의 모델과

같다([6]).

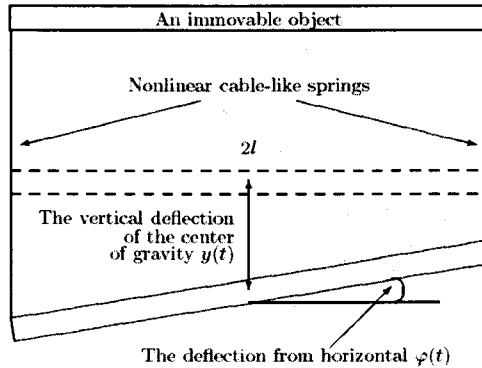


Figure 10. Cross section of the suspension bridge

(4) 복잡한 뒤틀림 진동 모형

네 번째 모델은 위의 세 가지 견해를 모두 결합한 모형이다. 노반의 상하 병진운동 $y(x, t)$ 과 뒤틀림 진동 $\phi(x, t)$ 뿐만 아니라 두 개의 케이블의 움직임도 고려한다. 함수 $u(x, t)$ 는 오른쪽 케이블의 변위를 나타내며, 왼쪽 케이블의 변위는 함수 $v(x, t)$ 에 의하여 묘사된다. 또한 케이블과 노반 사이의 상호작용을 나타내는 항을 $b(\cdot)^+$ 대신에 일반화된 비선형 함수 $E_1(\cdot)$ 와 $E_2(\cdot)$ 에 의하여 주어진다고 가정하면, 복잡한 뒤틀림 진동의 모형은 다음과 같은 형태이다([18]).

$$(7) \quad m_1 y_{tt} + k_1 y_{xxxx} + \delta_1 y_t + E_1(y - u - l \sin \phi) + E_2(y - v + l \sin \phi) = W_1(x) + f_1(x, t),$$

$$m_2 \phi_{tt} - k_2 \phi_{xx} + \delta_2 \phi_t - l \cos \phi [E_1(y - u - l \sin \phi) - E_2(y - v + l \sin \phi)] = W_2(x) + f_2(x, t)$$

$$m_3 u_{tt} - k_3 u_{xx} + \delta_3 u_t - E_1(y - u - l \sin \phi) = W_3 + f_3(x, t),$$

$$m_4 v_{tt} - k_4 v_{xx} + \delta_4 v_t - E_2(y - v + l \sin \phi) = W_4 + f_4(x, t)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = y_{xx}(0, t) = y_{xx}(L, t) = 0,$$

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0$$

$$u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = 0.$$

3. 현수교 방정식의 수학적 연구의 흐름 및 과제

McKenna와 Walter([19])는 구조물에 미치는 외력에 비하여 공기에 의한 감쇄는 매우 작으므로 감쇄상수 δ 는 0이라 가정하고 변수 x 와 t 에 대한 대칭 조건을 추가하여 식 (1)과 경계조건 (2)를 단순화하였다. 또한 단순화된 방정식의 비선형 부분 b 가 하나의 고유값에서 교차할 때 해의 존재성 및 다중성에 대하여 연구하였다. 이 후 변분유도방법의 적용으로 교차하는 고유치의 개수 및 범위와 해의 다중성의 관계를 정리하였다.([5], [6], [12])

식 (3)과 경계조건 (4)에 대한 연구는 [7]에서 위수정리(Degree theory)에 기초하여 증명하였다. 또한 해의 존재성은 Galerkin 방법을 적용하여 [16]에서 증명되었다. 편미분 방정식에 대한 연구 방향이 변분법에 의하여 범함수의 특이점을 구하는 문제(Euler-Lagrange 방정식)로 변형되었으며 특이점을 찾는 방법은 Morse index와 Minimax를 이용하는 두 가지 위상적 방법으로 분류되었다. 특이점을 구하는 효과적인 방법인 Minimax 정리는 Ljusternik와 Shnirelman([16])가 안장점의 존재성을 증명하면서 제시한 방법이다. Minimax를 적용한 정리로서는 Mountain Pass, Saddle Point, Linking 그리고 Limit Relative Category 정리들이 있다.([2], [3], [4], [9], [10], [11], [14], [17]) Zhonghai Ding는 Leray-Schaude degree 정리([21])와 Mountain Pass 정리([22])를 적용하여 식 (3)과 경계조건 (4)의 비선형 주기해에 관하여 연구하였다. Josef Malik([13])는 Brouwer fixed 정리를 적용하여 해의 존재성을 증명하였다. Micheletti와 Saccon([20])은 Linking 정리와 Category 정리를 이용하여 해의 다중성을 입증하였다.

편미분 방정식의 해의 존재성 및 다중성 연구에 필요한 다양한 위상적 방법들이 제시되고 있다. 이렇게 제시된 방법들은 다소 간단한 형태의 편미분 방정식인 타원형 편미분 방정식에 응용되고 있으며 복잡한 현수교 방정식에 적용되는 사례가 적다. 현재 현수교 방정식은 연립방정식의 형태로 진화하였으나, 해의 존재성과 다중성을 보이는 위상적 방법은 다소 초보적인 방법에 제한된다. 향후 연구 방향은 연립 현수교 방정식에 Minimax를 적용한 정리인 Mountain Pass, Saddle Point, Linking 그리고 Limit Relative Category 정리들을 적용하여 해의 존재성 및 다중성과 source term과의 관계를 연구하는 것이다. 또한 다양한 편미분 방정식에 적용되는 새로운 위상적 방법을 찾고 이를 연립 현수교 방정식에 적용하는 것이다.

참고 문헌

1. Amann O.H., T. Von Karman and Woodruff G.B., The failure of the Tacoma Narrows Bridge, Federal Works Agency, Washington DC, 1941.
2. Ambrosetti A. and Rabinowitz P.H., "Dual variational methods in critical point theory and applications," J. Funct. Anal. 14(1973), 349-381.
3. Ahmad S., Lazer A.C. and Paul J.L., "Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance," Indiana Univ. Math. J. 25(1976), 933-944.
4. Castro A. and Lazer A.C., "Applications of a maximin principle," Rev. Colombiana Mat. 10(1976), 141-149.
5. Choi Q.H., Jung T. and McKenna P.J., "The study of a nonlinear suspension bridge equation by a variational reduction method," Appl. Anal. 50(1993), 71-90.
6. Choi Q.H. and Jung T., "A nonlinear suspension bridge equation with nonconstant load," Nonlinear Analysis, 35(1999), 649-668.
7. Drabek P., Leinfelder H., Tajcova G. "Coupled string-beam equations as a model of suspension bridges," Appl. Math. 44(1999), 97-142.
8. Dupre J., Bridges. Black Dog & Levenathal Publishers, New York, 1997.
9. Felmer P., "Periodic solutions of superquadratic Hamiltonian systems," J. Differential Equations 102(1993), 188-207.
10. Fournier G., Lupo D., Ramos M. and Willem M., "Limit relative category and critical point theory," Dynam. Report. 3(1993), 1-23.
11. D.G. de Figuereido, "On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem," Nonlinear Anal. T.M.A. 8(4) (1984) 655-665.
12. Humphreys L., McKenna P.J., "Multiple periodic solutions for a nonlinear suspension bridge equation," IMA Journal of Applied Math.
13. Josef M., "Nonlinear models of suspension bridges," J. Math. Anal. Appl. 321 (2006), no. 2, 828-850.
14. Lazer A.C. and McKenna P.J., "Large scale oscillatory behaviour in loaded asymmetric systems," Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 4(1987) no3, 243-274.
15. Litcanu G. "A mathematical model of suspension bridges," Appl. Math. 49(2004), 39-55.

16. Ljusternik L. and Schirelmann L., *Methodes topologique dans les problèmes variationnels*, Jermann and Cie, Paris, 1934.
17. Marino A., Micheletti A.M. and Pistoia A., "Some variational results on semilinear problems with asymptotically nonsymmetric behaviour," *Nonlinear Analysis "A tribute in honour of G.Prodi"*, S.N.S. Pisa, 1991, pp.243-256.
18. A. Matas and J. Ocenask, "Modeling of suspension bridge," *Prodeedings of Computational Mechanics 2*, 2002, 275-278.
19. McKenna P.J., Walter W., "Nonlinear Oscillations in a Suspension Bridge," *Arch. Rational Mech. Anal.* 98(1987), 167-177.
20. Micheletti A.M. and Saccon C., "Multiple nontrivial solutions for a floating beam via critical point theory," *J. Differential Equations* 170(2001), 157-179.
21. Zhonghai D., "On nonlinear oscillations in a suspension bridge system," *Trans. Amer. Math. Soc.* 354 (2002), no. 1, 265-274 (electronic).
22. Zhonghai D., "Nonlinear periodic oscillations in a suspension bridge system under periodic external aerodynamic forces," *Nonlinear Anal.* 49 (2002), no. 8, 1079-1097.

The Main Stream of Mathematical Modeling of a Suspension Bridge

Department of General Education, Namseoul University **Hye won Nam**

It is well known that a suspension bridge may display certain oscillations under external aerodynamic forces. Under the action of a strong wind, in particular, a narrow and very flexible suspension bridge can undergo dangerous oscillations. The collapse of the Tacoma Narrows suspension bridge caused by a wind blowing at a speed of 42 miles per hour, is one of the most striking examples. In this paper, we study models describing oscillations in suspension bridges and known results.

Key words: Suspension Bridge, Modeling, Topological Method

2000 Mathematics Subject Classification: 35Q72, 74H45, 74K10

논문 접수: 2007년 7월 9일

심사 완료: 2007년 9월 5일