한국수학사학회지 제20권 제4호(2007년 11월), 85 - 92

현대 기하학의 역사

강남대학교 응용수학 전공 **박기성**
parkks@kns.kangnam.ac.kr

2000년 이상 기하학의 주류를 이루었던 유클리드기하학은 19세기중반 위상수학의 탄생으로 기하학의 연구가 국소적이론에서 대역적 이론으로 이행하는 과정에서 현대기하학이 획기적인 발전을 하였다. 본 논문에서는 고전적인 불변량인 오일러수에서 시작하여 최근까지 발전하여온 불변량 및 20세기 중반 이후에 발전을 한 저차원다양체의 이론을 간단히 소개한다.

주제어 : 호몰로지, 코호몰로지, 가우스본네정리, 얽힘수, 특성류

1. 서론

기하학이란 도형을 연구하는 학문이다. 도형의 여러 가지 성질을 연구하여 그것을 원래 주어진 도형을 분류하는 것이다. 분류하는데 가장 유용한 방법은 불변량이다.

간단히 말하면 불변량이란 기하학적 구조를 수로 나타내는 것이다. 예를 들면 3각형의 합동조건은 변의 길이나 정점의 각도 등이 불변량에 의해서 나타낸다.

그러나 기하학은 언제나 주어진 도형만을 연구하는 것은 아니다. 어떤 도형이 처음부터 존재하는가 그 조건을 열거하기도 하고 우리가 살고 있는 우주가 어떤 모양을 하고 있는가를 상상하고 그 조건을 연구하는 것은 물리학과 기하학에 걸쳐 있는 인류의 영원한 문제이다. 또 기하학은 경우에 따라서는 현재까지 미지의 도형을 구체적으로 구성하여 연구하기도 한다.

저 유명한 평행선 공리가 일반적으로 성립하지 않는다는 것을 보인 비유클리드 기하학의 등장이 전형적인 예이다.

기하구조에 관해서는 인간의 공간인식에 관계되는 긴 역사가 있다. 기원전 3,4세기경 그리스에서 발행한 유클리드원론에 평행선에 관한 제5공준이라 부르는 것이 있다.

이것 이외에 4개의 공준이 있어서 이들 5개의 공준이 원론의 이론전개의 기초가 되었다. 그 후 오랜 세월 제5공준이 다른 4개의 공준으로 증명할 수 있지 않을까 많은 수학자가 반복하여 연구하였다. 그러나 1820년~1830년대에 걸쳐서 로바체프스키(Lobachevskii), 블리아이(Bolyai)에 의해서 각각 제5공준이 성립하지 않은 기하학이

가능함을 보였다.

따라서 제5공준은 다른 4개의 공준으로 증명이 불가능함이 명백하여 졌다. 어떤 의미로 가상적이라 생각한 비유클리드기하학을 음의 상수곡률을 갖는 곡면의 기하학으로 인식되는 시점은 19세기 중순 국소적으로 쌍곡 평면과 합동인 기하구조를 갖는 곡면이라는 것을 알게 되었다. 그 후 비유클리드기하학은 클라인(Klein), 푸앵카레(Poincare)등의 연구로 많은 발전을 하였다.

한편 1820~30년대 일반 공간에 적당한 구조를 주면 극한이나 연속의 개념을 정의할 수 있어서 해석학에서 사용되는 이론이 전개된다. 이와 같은 구조를 위상이라 한다. 위상 또는 위상수학(위상기하학)은 토폴로지(Topology)의 번역어이다. 이것은 기하학에서 도형의 위상적 성질의 연구를 의미한다. 즉 위상수학의 발달로 기하학은 국소적 연구에서 대역적 연구로 발전하였다. 예를 들면 오일러(Euler)수 등이 좋은 예이다.

1833년 가우스(Gauss)는 공간곡선의 얽힘(Linking number)을 선적분으로 정의하였고 1847년 J. B. Listing 의 Vonstudien zur Topologie가 출간되어 Toplogy가 문헌에 나타난 최초였다.

19세기 후반에 와서 위상수학은 해석학과 기하학에 큰 영향을 주었다. 베티(Betti)가 호모로지군을 연구하였는데 그 방법이 해석학에서도 중요성이 인정되었다. 또 푸앵카레는 다면체를 단체분할하여 얻어지는 복체를 이용하여 복체의 호모로지군 및 쌍대정리도 증명하였다. 1940년경 아렉산더(Alexander)등에 의해서 코호모로지군이 정의되어 다면체의 위상연구에 큰 진전이 있었다.

1944년 아이렌버그(Eilenberg)등에 의한 특이 코호모로지군을 비롯하여 후레빅크츠(Hurewicz)등에 의한 특이호모로지군등 1940년경까지 대수적 위상수학의 전성기를 이루었다. 이와 같이 위상수학을 이용하여 현대기하학이 급진적으로 발전하였다.

본 논문에서는 19세기에서 20세기초까지 발전하여온 현대기하학을 바탕으로 발전과정을 알아보고 20세기 중반이후에 활발히 연구하고 있는 저차원다양체상의 기하학을 간단히 소개하고자 한다.

2. 본론

기하학은 공간의 구조를 해명하는 것을 목표로 하는 수학이다. 공간의 어떤 성질에 착안하느냐에 따라 연구수단, 방법이 여러 가지로 나누어진다. 공간은 점의 집합으로서 인식되는데 각 점 주위의 무한소근방의 성질을 국소적 성질이라고 하고, 공간전체의 형상등을 대역적 성질이라 한다. 위상수학은 공간의 대역적구조에 흥미를 갖는 기하학이다. 따라서 현대기하학이 취급하는 도형은 다양체이다. 다양체의 개념은 1854년 리-만이 독일 궤팅겐(Göttingen)대학 취직 강연에서 도입되었다고 알려져 있다. 이 강

연에서 리-만계량(Riemann metric)이 주어진 다양체 즉 미분기하학이 창시되었다고 한다.

현재 사용하고 있는 다양체는 1930년대 와이트니(Whiteney)의 일련의 연구에 의한 형태라고 한다. 다양체도 유클리드공간과 동상인 위상다양체가 있고, 부드러운 곡선, 곡면과 같은 미분가능다양체, 복소다양체, 대수다양체등 여러 가지가 있으며 연구방법도 각각 고유한 것이 많다. 그 전에도 가우스, 리-만, 푸앵카레등이 생각한 다양체도 있다. 방향이 주어지고 경계가 없는 부드러운 곡면의 분류는 20세기 초에 완성되었다. 불변량으로 종수(genus)라 부르는 구멍의 수 g가 있다. 두개의 폐곡면이 같기(위상동형, 미분동형) 위한 필요충분조건은 그의 종수가 같아야 한다. 따라서 종수g의 폐곡면을 $\sum_g$라고 쓰면$\sum_0$, $\sum_1$, $\sum_2$,…와 같이 $\sum_0$은 구면, $\sum_1$은 토러스(Torus)라는 곡면이다. 따라서 위의 폐곡면의 분류나 다음에 논하는 가우스-본네(Gauss-Bonnet)의 정리에는 기하학의 모든 신비가 포함되어 있으며 실제 이것을 일반차원다양체에 어떻게 확장해야 하는가가 20세기 기하학의 하나의 지침이었다. 그러나 곡면의 경우에 한정하여도 문제는 간단하지 않다 종수g의 기하학적 의미는 그림을 보면 바로 알 수가 있다. 그러나 다양체가 항상 유클리드공간에 존재한다고 할 수 없다. 이것이 현대기하학의 하나의 특징으로 유클리드공간의 틀 속에서 자립하여 존재할 수 있으므로 그것을 연구하는 경우 어려움이 있으며 고차원다양체인 경우 어느 정도 상상력을 발휘해도 직접 눈으로 보고 관찰할 수 없다. 이것을 해결하기 위해서 나온 것이 단체(simplex)나 포체(cell)을 이용한 조합적 방법에 의한 기하학적 불변량인 오일러 수이다. 도형을 3각형으로 분할하여 정점의수, 변의 수, 면의 수의 교대합을 잡으면 분할하는 방법에 관계없이 도형의 고유양이 된다. 종수 g의 폐곡면$\sum_g$인 경우는 그것은 $2-2g$와 같다. 이것은 역으로 종수가 조합적 방법으로 정리되어 있음을 나타내고 있다.

1752년에 발견된 오일러수는 푸앵카레가 일반다면체에 오일러공식을 일반화하여 호모로지론을 창시하였다. 따라서 도형에 존재하는 구멍의 수(Betti수)를 셀 수 있었다. 좀 더 자세히 논하면 호모로지 이론은 대수적 위상수학에서도 가장 오래 되었으며 광범위하게 발달한 부분이다. 역사적으로는 공간의 고차원 연결도(連結度)를 재는 것으로 도입되었다([8])

여기서 0차원 연결도는 공간의 연결성분의 개수를 의미하며 1차원 연결도는 대체로 다음과 같은 것이다. 토러스T^2는 폐집합의 경계가 아닌 단순폐곡선이 존재하지만 2차원구면S^2에는 존재하지 않는다. 즉 S^2에서는 0, T^2에서는 2이다.

위의 고찰을 일반화하여 베티(E. Betti)는 다양체의 q차원 폐부분 다양체와 그의 경계성을 이용하여 다양체의 q차원 연결도를 정의하였다. 이 연결도의 개념에서 호모로지 이론이 발생하였다. 이것이 100여 년 전에 푸앵카레가 창시한 호모로지론이다. 여기서 도형에 존재하는 각 차원의 구멍수(Betti수)를 셀 수 있었다. 20세기에 와서 호모

로지군의 쌍대로서 코호모로지군이 정의되어 이 양자가 서로 어울려서 대수적 위상수학이라 부르는 분야가 융성하였다.

또 하나의 방법은 가우스의 곡면론과 가우스-본네의 정리를 원류(源流)로 하는 것으로 도형의 연구에 미적분을 이용하는 것이다. 종수g인 폐곡면S의 곡률K를 곡면 전체에서 적분하면 굽은 상태에 관계없이 오일러수$\chi(S)$의 2π배가 된다.

즉 $\int_S K\, d\sigma = 2\pi\chi(S)$이다. 그러나 현대기하학의 목표는 폐곡면의 분류나 가우스-본네의 정리를 임의차원 미분다양체에 일반화하는 것이다. 이것에 기본적 역할을 하는 것이 미분형식이다. 미분형식이 다양체위의 각점에서 순서가 주어진 몇 개의 방향에 대하여 정의되는 함수이므로 다양체의 여러 가지 기하학적 구조를 기술할 수 있다.

미분형식에는 크게 두 가지 역할이 있다. 하나는 다양체위의 여러 가지 편미분방정식을 기술하는 것으로 18, 19세기의 파프(Pfaff)의 선구적 연구를 시작으로 현재에 이르기까지 해석학에서 중요한 역할을 하였고 다른 하나는 다양체위의 여러 가지 기하학적 구조를 표현하기 위해서 사용되었다. 즉 미분형식에 적당한 연산을 주어 여러 가지 미분형식을 유도하여 이들을 다양체 위에서 적분함으로서 기하학적인 불변량을 얻는다. 이들 불변량은 다양체의 대역적 구조를 반영하는 양이다.

다음에 화이바속 (Fiber Bundle)은 20세기 전반에 카르탄(E.Cartan)에 의해서 알려졌다. 즉 화이바속은 임의의 다양체위에 또 다른 다양체 즉 화이바를 전체로 묶어서 된 다양체이다. 화이바속의 각 화이바의 연결상태를 통제하는 군(구조군)은 무한차원군이며 특히 중요한 것이 리-군(Lie group)이며 리-군을 구조군으로 하는 화이바속이 얼마만큼 존재하느냐에 해답을 주는 것이 특성류(Characteristic Classes)이론이다. 이것은 다양체위의 화이바속의 굽은 상태를 그 다양체의 코호모로지로 나타내며 천류(Chern class)와 폰트리아긴유(Pontrjagin)가 대표적이다. 이 이론은 여러 가지 접근방법이 있으나 그중에서도 중요한 것이 천-바일(Chern-weil)이론이다. 이 이론이 처음에는 직접 기여하지는 못했으나 1970년경 보트(Bott)의 소멸정리와 겔환트-훅스(Gel'fand-Fuks) 코호모로지이론이 등장하면서 상황이 바뀌었다. 보트는 다양체 위의 분포가 완전적분 가능한 새로운 위상적 장애(obstruction)의 존재를 벡터속의 접속이론을 사용하여 증명하였다. 한편 겔환트와 훅스는 다양체위의 벡터장 전체로 이루어지는 리대수(Lie algebra)의 코호모로지 이론을 건설하였다. 이 양자는 엽층구조(Foliation)라 부르는 다양체위의 어떤종류의 모양에 관한 기하학에 응용되었다. 구체적으로는 고전적 천-바일 이론을 정밀화하여 엽층구조에 관한 2차특성류의 이론이 탄생하였다. 다양체의 분류에 있어서 또 하나의 결정적 역할을 한것이 폰트리아긴과 로-린(Rohlin)등이 시작하여 톰(Thom)이 완성한 동경이론(Cobordism theory)이다.

톰의 이 연구는 1960년대에 미분위상수학의 선구적 역할을 하였다. 우선 밀-너(Milnor)가 구면위에 새로운 미분구조를 구성하고 스메일(Smale)이 h-동경정리와 일반 푸앵카레 예상을 해결하였다. 같은 시기에 밀-너와 케르바이(Kervaire)와 함께 호

모토피구면의 분류 이론을 완성하였다. 이들 연구를 일반화하여 수술이론을 완성하였다.

노비코프(Novikov)와 부라으더(Browder)가 시작하여 설리반(Sullivan)과 월(Wall)이 완성하였는데 폰트리아긴류가 큰 역할을 하였다.

고차원 다양체의 구조의 연구 및 분류에서 결정적 역할을 한 특성류의 이론도 3, 4 차원 다양체에서는 그와 같은 형태로는 역할을 못한다. 예를 들어 방향이 주어진 3차원다양체에서는 접벡터속이 항상 자명(trivial)하여 특성류는 모두 없어진다. 이 경우 2차특성류라 부르는 쌍곡다양체의 체적이나 위상적장(Topological field)의 이론에서 나오는 천-사이몬스(Chern-Simons)불변량으로 해결이 가능하다. 이 이론에는 매듭이나 3차원다양체의 불변량등 위상수학에 응용되고 있다.

고차원 다양체론에서의 분류공간과 그의 코호모로지류인 특성류의 역할을 3차원 다양체론에서는 기하구조의 모쥬라이공간과 2차 특성류가 역할을 한다. 단지 고차원과 다른점은 대상이 섬세한 구조 때문에 계산이 어렵다는 것이다.

기하학에서 5차원 이상을 고차원, 4차원이하를 저차원이라 부르는데 이것이 언제부터인지 몰라도 현제는 상식처럼 되어있다. n차원다양체의 중요한 정리로 푸앵카레의 쌍대정리가 있다. n차원다양체 중에 k=0, 1, …,n의 각 정수에 대하여 k차원 싸이클과 $(n-k)$차원 싸이클이 있으면 이것은 일반적으로 유한개의 점에서 교점을 갖는다. 이들 교점에 부호를 붙여서 덧셈한 것이 교점수이다. 이 교점수를 매개로 k차원 싸이클의 집단과 $(n-k)$차원 싸이클의 집단이 서로 경상(鏡像)관계가 있다고 주장한 것이 푸앵카레 쌍대정리의 일부이다. 이 정리에서 고차원과 저차원의 분수령을 찾을 수 있다([1], [2])

1970년대 이후에 특히 저차원의 다양체가 주목하게 되었다. 저차원다양체에 관해서는 실질적으로 손잡이체(Handle body)의 이론과 같은 이론이 히가드(Heegaard)와 덴(Dehn)등에 의해서 이미 20세기 초에 논의되었으나 이들의 연구가 많은 사람들의 주목을 받은 것은 1970년대 이후이다. 특히 리코리쉬(Lickorish)와 왈 레이스(Wallace)의 1960년대의 결과와 세프(Cerf)의 연구를 결합한 고리의 카비(Kirby)계산이 저차원다양체를 구체적으로 보게된 공적이 크다. 더욱 카비 계산에 의해서 저차원다양체론과 매듭이론의 연결이 전에도 있었으나 최근에는 매듭이론의 결과가 카비계산으로 3차원다양체론의 결과에 확장되기도 하고 그의 역방향의 확장도 있어서 양자는 같은 이론이 된 감이 있다.

최근에는 히가드 분해와 키비다이아그램을 직접 취급하는 방법과는 별도로 이것을 이용하여 3차원 다양체의 불변량을 구성하는 연구가 활발하여 캣슨(Casson)불변량 고노불변량, 양자불변량 등 그 외에도 많은 불변량을 만들었다. 이들 불변량을 생각하는 최초의 출발점에 접속전체의 공간위의 범함수(Chern-Simons functional)에 관해서 무한차원 모-스이론이 이용되었다. 3차원뿐이 아니고 4차원 다양체론에서도 도날드손(Donaldson)에 의한 게이지(Gauge)이론의 응용(1980년대 초)을 발단으로 대단히 깊은

이론이 조립되기도 했다. 후리드만(Freedman)의 4차원 위상다양체론과 도날드손 이론을 합하여 증명한 4차원 이종(異種)공간의 존재는 대단한 업적이었다. 최근에는 싸이버크-위틴(Seiberg-Witten)이론이 도날드손이론을 대폭 간소화하였다.

도날드손 이론[9]에 의해서 4차원 다양체론에 수리물리학의 방법을 사용하여 소립자물리학에 개발된 비가환 게이지이론을 4차원위상수학의 고전적 문제에 적용하여 획기적인 성공을 하였고 현재도 계속 연구가 진행되고 있다. 4차원에 한정하지 않고 2차원, 3차원 등 저차원전반에 결쳐서 광범위하게 이후에도 후로위(Floer), 존스(Jones), 위턴(Witten)등의 획기적 연구가 있었고 21세기 현재도 연구가 계속되고 있다. 이들 연구의 공통점은 무한차원을 대상으로 연구한 것과 다양체의 구체적인 편미분방정식의 대역적해석을 한 점이다.

3. 결론

19세기 초에 시작된 현대기하학의 발전내용이 방대하여 다양체 상의 위상적 측면으로 제한하고 기술하였다.

기하학은 현재도 발전 속도가 빨라 앞으로의 방향을 예측하기 어렵다. 무한차원의 대상에서 유한의 양을 도출하는 것인데 현재 가장 유용한 방법은 위턴(Witten) 등이 연구하고 있는 물리적인 사고이다. 그리하여 3차원다양체의 위상불변량이 많이 정의되었으나 그들이 갖는 기하학적 의미는 아직도 미해결이다.

리-만기하학이 20세기 상대성이론이 전개되는 장소를 제공한 것과 같이 현대물리학의 여러 가지 곤란을 해소할 수 있는 공간개념의 큰 변화에 기하학이 크게 공헌하지 않을까 기대해도 괜찮은가?

감사의 글 이 논문을 심사하여 주신 심사위원님께 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Thurston W., *Geometry and Topology of 3-manifolods.* Princeton Univ. lecture note 1978-1979.
2. Atiya, M. F., *The Geometry and Physics of Knots*, Cambridge Univ. Press. 1990.
3. Benedetti R., Petronio C., *Lectures on Hyperbolic Geometry.* Springer, 1992.
4. Hain R., *The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties I,* (1987) 271-323.
5. Goette S., *Morse theory and higher torsion invariants I.* preprint, 2001.
6. Saeki O., *Topology of singular fiber of differential maps*, Lecture notes in Math. vol 1854. Springer-Verlag 2004.
7. Milnor J. W., Stasheff J. D., *Characteristic classes*, Princeton Univ. press 1974.
8. 일본수학회, 수학사전 제3판, 岩波서점, 1986.
9. Donaldson S., *An application of gauge theory to the topology of 4- manifolds.* J. Differential Geometry 18(1983)269-316.
10. Donaldson S., *Polynomial invariant for smooth 4-manifold*, topology 29(1990) 141-168.
11. Jones V., *Hecke algebra representations braid group and link polynomial*, Ann. of math. 126(1987)335-388.
12. Witten E., *Quantom field theory and Jones polynomial*, Commun. Math. physics 121(1989)353-386.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 20 No. 4 (Nov. 2007), 85 - 92

History of morden geometry

Department of Mathematics, Kangnam University **Ki sung Park**

In this paper We study Some history and development of Geometry from the early 19th century to the late 20th century.

Key words: Homology, Cohomology, Linking number, Gauss Bonnet theorem

characteristic class

2000 Mathematics Subject Classification: 55-03

논문 접수: 2007년 4월 2일 심사 완료: 2007년 8월 30일