한국수학사학회지 제20권 제4호(2007년 11월), 49 - 60

곡면의 강성의 역사

연세대학교 수학과 **김호범**
kimhb@yonsei.ac.kr

본 논문에서는 초등기하에 나오는 도형의 합동의 개념으로부터 자연스럽게 얻어지는 3차원 유클리드 공간에 있는 매끄러운 곡면의 강성의 개념을 소개하고 컴팩트 곡면의 강성이론의 발전과정과 그 일반화를 살펴본다.

주제어 : 볼록 곡면, 컴팩트 곡면, 합동, 등거리변환, 강성, 제1기본형식, 제2기본형식, 가우스 곡률

0. 서론

한 평면이나 공간에 있는 한 도형에 유한 번의 평행이동(translation), 고정된 축에 관한 회전(rotation) 또는 고정된 평면에 관한 반사(reflection)를 행하여 다른 도형을 얻을 수 있으면 두 도형은 합동(congruent)이라 한다.

공간에 있는 두개의 C^3 곡선이 같은 곡률(curvature)을 가지고 이 두 곡선의 꼬임률(torsion)의 절대값이 같으면 이 두 곡선은 합동이며, 두개의 곡면이 같은 제1기본형식(first fundamental form)과 제2기본형식(second fundamental form)을 가지는 두 곡면은 합동임은 잘 알려진 곡선론 및 곡면론의 기본정리이다. 바꾸어 말하면 공간곡선은 곡률과 꼬임률에 의하여, 그리고 곡면은 제1기본형식과 제2기본형식에 의하여 완전히 결정이 된다는 것이다.

두 곡면 M과 N에 대하여 두 곡면의 제 1기본형식, 즉 접벡터(tangent vector)의 내적을 보존하는 미분동형사상(diffeomorphism)이 존재하면 M과 N은 등거리적(isometric)이라한다. 한 곡면 M과 등거리적인 곡면이 이 곡면과 합동인 것 밖에 없으면 곡면 M은 강성(rigid)이라 한다. 즉, M이 강성이라는 것은 M과 제1기본형식이 같은 곡면은 제2기본형식도 같아야한다는 뜻이다.

한 곡면이 강성이 되기 위한 자연스러운 조건을 찾는 문제가 곡면의 강성문제(rigidity problem)이다. 1922년 Cohn-Vossen이 볼록(convex) 컴팩트 곡면이 강성임을 보인 이후 1962년 L. Nirenberg에 의하여 상당히 일반화된 정리를 얻기까지 곡면

의 강성문제는 곡면론에서 중요한 주제의 하나로 활발하게 연구되어왔다.

Nirenberg의 강성정리는 자연스럽지 못한 조건을 전제하고 있는 중대한 결함을 갖고 있지만 아직까지 3차원 유클리드 공간에 있는 컴팩트 곡면에 대한 강성정리 중에서 가장 일반화된 내용으로 평가되고 있다.

본 논문에서는 3차원 유클리드 공간에 있는 컴팩트 곡면에 대한 강성이론의 발전과정과 그 일반화를 살펴보고 특히 Nirenberg의 강성정리의 조건과 증명과정의 줄거리를 살펴봄으로써 바람직한 형태로의 일반화에 관한 전망을 진단해 보려 한다.

본 논문에서는 수식은 가능한 한 사용하지 않고 형식적 엄밀성을 피하려 하였으며 내용을 단순하게 만들기 위하여 본래 몰입된(immersed) 곡면에 관하여 전개된 강성이론을 끼워 넣은(imbedded) 곡면의 경우로 한정하여 언급했음을 밝혀둔다.

1. 곡면이론에 관한 짧은 탐색

이 절에서는 본 논문에서 언급하거나 사용할 곡면에 관련된 여러 개념들과 기본 결과들을 간단하게 탐색해 본다.

3차원 유클리드 공간의 부분집합 M이 다음 성질을 만족하면 C^k 곡면 $(k \geq 1)$이라 한다: M의 임의의 점 p에 대하여 R^2의 열린(open) 집합 D와 일대일 C^k 정칙사상(regular mapping) $x : D \rightarrow R^3$가 존재하여 $x(D)$는 p를 품는 M의 열린 집합이고 $x : D \rightarrow x(D)$가 위상동형사상(homeomorphism)이다(여기서 x가 C^k란 k이하의 모든 계수의 연속인 편도함수가 존재하고, 정칙이란 모든 $(u, v) \in D$에 대하여 $x_u \times x_v(u, v) \neq 0$ 이라는 뜻이다). 이러한 x를 M의 좌표조각(coordinate patch)라 부른다. 모든 $k \geq 1$에 C^k인 곡면을 C^∞ 또는 매끄러운(smooth)곡면이라 하고 모든 x가 해석적(analytic)이면, 즉 수렴하는 Taylor 급수로 전개할 수 있으면 M을 해석적(analytic) 또는 C^ω곡면이라 한다. M이 해석적 곡면이면 C^∞ 곡면이지만 그 역은 성립하지 않는다.

R^3의 C^k 곡면 M이 주어지면 M의 각 점 p마다 이 점에서의 접평면(tangent plane) $T_p(M)$이 존재하게 되는데 각 점 p에 대하여 $T_p(M)$에 있는 벡터들의 내적을 할당하는 대응을 M의 제1기본형식이라 한다. 두 C^k 곡면 M과 N 사이의 C^k 미분동형사상(diffeomorphism) F가 제1기본형식을 보존하면 F를 등거리사상(isometry)이라 한다. 등거리사상은 곡면에 있는 구분적으로 매끄러운 곡선의 길이를 보존하는 미분동형사상으로 볼 수 있다. 두 곡면 M과 N 사이에 등거리사상이 있으면 M과 N은 등거리적(isometric)이라 한다.

U를 C^k 곡면 M의 한 점 p의 근방에서 미분가능한 단위 법선 벡터장이라 하자. 이를테면 $x: D \to R^3$가 $p \in x(D)$인 M의 좌표조각이면 $U = \frac{x_u \times x_v}{\| x_u \times x_v \|}$ 또는 $U = -\frac{x_u \times x_v}{\| x_u \times x_v \|}$로 택할 수 있다. $v \in T_p(M)$에 대하여 $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$를 만족하는 M에 놓여있는 곡선 $\alpha(t)$를 잡고 $W_p(v) = \frac{d}{dt} U(\alpha(t))|_{t=0}$ 이라 하면 W_p는 $T_p(M)$에서 자신으로 가는 자기수반(self-adjoint) 선형사상이 되는데 이를 M의 p에서의 Weingarten 사상이라 한다. W_p는 M의 p에서의 모든 접벡터 방향으로의 U의 순간변화율을 나타내기 때문에 M의 p근방에서의 구부러진 정도를 나타내는 것으로 볼 수 있어 M의 p에서의 모양연산자(shape operator)라 부르기도 한다. $v \in T_p(M)$에 대하여 $II(v, w) = W_p(v) \cdot w$로 정의되는 $T_p(M)$위에서의 겹선형형식(bilinear form)을 M의 p에서의 제2기본형식이라 한다. W_p는 자기수반(self-adjoint) 선형사상이므로 실수인 두 고유값 k_1, k_2를 갖는데 이들을 M의 p에서의 주곡률(principal curvature), k_1과 k_2의 곱 $k_1 k_2$를 가우스(Gauss)곡률이라 하고 $K(p)$로 나타낸다. U가 $-U$로 바뀌면 Weingarten 사상, 제2기본형식과 주곡률은 모두 원래의 음으로 바뀌지만 가우스 곡률은 바뀌지 않는다.

선형대수의 기본결과에 의하면 λ_1과 λ_2는 단위 접벡터 $v \in T_p(M)$에 대한 $II(v, v)$(이 값을 M의 v방향으로의 법곡률(normal curvature)이라 하고 $k(v)$로 나타낸다)의 최대값 또는 최소값이 되며, $K(p)$는 W_p의 행렬식(determinant)이 됨을 쉽게 알 수 있다.

곡면의 등거리사상에 의하여 불변인 성질을 내재적 성질(intrinsic property)라 하고 이러한 성질을 연구하는 기하학을 내재적 기하학(intrinsic geometry)라 한다. 예를 들어 곡면의 주곡률은 내재적 성질이 아니며, 가우스 곡률이 내재적 성질이라는 정리가 '가우스의 놀라운 정리(Gauss Theorema Egrigium)' 이다.

두 점 사이의 거리를 보존하는 R^3 위에서의 변환을 유클리드 변환이라 하고, 한 도형 T_1에서 다른 도형 T_2로 보내는 유클리드 변환이 존재하면 두 도형 T_1과 T_2는 합동(congruent)이라 한다. 유클리드 변환은 평행이동(translation), 회전(rotation) 및 반사(reflection)의 합성으로 이루어져 있음은 잘 알려진 사실이다. 합동인 두 곡면이 같은 제1기본형식과 제2기본형식을 가짐은 정의에 의하여 명백하며, 이 사실의 역이 곡면론의 기본정리이다.

2. 곡면의 강성

합동인 두 곡면이 등장적임은 명백한데 그 역은 성립하지 않음을 보여주는 예를 쉽게 찾을 수 있다. 한 곡면 M과 등장적인 곡면은 합동인(즉 M을 평행이동하거나 회전하거나 반사시켜 얻어지는) 곡면 밖에 없으면, M을 강성(rigid)이라 한다.

이 절에서는 곡면의 강성이론의 주된 대상이 되어왔던 컴팩트 곡면에 관한 강성이론의 발전과정과 그 일반화를 살펴본다.

컴팩트 곡면에 관한 강성이론은 '두 개의 볼록다면체(convex polyhedra) P_1과 P_2에 대하여 각각의 면들에 일대일 대응관계가 있고 대응되는 면들이 합동이며 같은 순서로 연결되어있으면 P_1과 P_2는 합동이다"라는 Cauchy의 유명한 정리에 그 뿌리를 두고 있다고 볼 수 있다.

Cauchy의 정리의 증명은 기하학적인 부분과 위상적인 부분으로 이루어져 있는데 두 부분 모두에 오류가 있었다. 기하학적 부분에 있는 오류는 보다 심각하였고 뒤늦게 1934년 Steinitz에 의하여 수정되었으며([17]) 위상적인 부분에 있는 오류는 1907년 Hadamard에 의하여 발견되어 1909년 Lebegue에 의하여 수정되었다.

Cauchy의 정리는 3차원 유클리드 공간에 있는 모든 볼록다면체는 적절한 의미에서 강성임을 알려주고 있다.

따라서 3차원 유클리드 공간에 있는 컴팩트 볼록 곡면 역시 강성일 것이라는 추측은 누구나 품을 수 있는 자연스러운 예상이며 Cohn-Vossen([4])은 이 예상을 확립함으로써 다음의 강성정리를 얻었다.

Cohn-Vossen의 정리: 모든 점에서 가우스 곡률이 0보다 큰 해석적 컴팩트 곡면은 강성이다.

Cohn-Vossen의 정리를 증명하기 위해서는 위 조건을 만족하는 등거리적인 두 곡면의 제2기본형식의 계수의 차가 0임을 보이면 되는데 이 과정에서 Taylor 급수 전개를 이용하기 때문에 곡면이 해석적이라는 조건을 필요로 했던 것이다.

하지만 공간에는 매끄럽지만 해석적이 아닌 흥미로운 곡면이 많기 때문에 해석적이라는 조건은 너무 강한 것으로 인식되었으며 이 조건을 완화하려는 노력 끝에 1943년 Herglotz([7])는 다음의 강성정리를 얻게 된다.

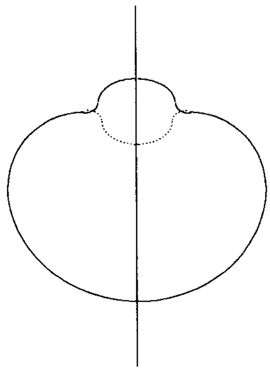
Herglotz의 정리: 모든 점에서 Gauss 곡률이 0보다 큰 C^3 컴팩트 곡면은 강성이다.

Herglotz의 정리의 증명은 흥미로운 적분방법을 이용하였으며([16, p280-288]) 이후 이런 형태의 적분방법은 여러 강성정리를 얻는데 있어서 강력한 도구가 되었다.

Herglotz와 독립적으로 1955년 Aleksadrov와 Sen'kin(2)은 그 즈음에 얻어진 편미분방정식에 관한 결과를 이용하여 해석적이라는 조건 없이 Cohn-Vossen의 정리를 간결하게 증명하게 된다.

1960년 K. Voss는 Herglotz의 증명을 약간 보충하여 모든 C^3 볼록 컴팩트 곡면이 강성임을 밝힘으로써 볼록 컴팩트 곡면의 강성문제는 매듭지어지게 되고 강성문제에 관한 관심은 자연스럽게 볼록이 아닌 컴팩트 곡면으로 옮겨지게 되었다.

아래 그림의 곡면은 비강성적인 컴팩트 곡면의 전형적인 예이다. 이 곡면은 위 꼭지부분을 점선으로 표시된 것처럼 아래로 집어넣어 얻어지는 곡면과 등거리적이지만 합동이지는 않다.



이 곡면은 매끄럽지만 해석적은 아니며, '모든 해석적인 컴팩트 곡면은 강성이다'라는 예상은 아직까지도 해결이 안 된 문제로 남아있다.

1938년 A. Alexadrov([1])는 볼록이 아닌 컴팩트 곡면에 관한 다음의 강성정리를 얻었다.

Alexandrov의 정리: $\int_{K>0} KdA = 4\pi$를 만족하는 모든 해석적 컴팩트 곡면은 강성이다.

여기서 K는 곡면의 Gauss곡률을 그리고 dA는 곡면의 면적소를 나타낸다.

Alexandrov의 정리의 조건의 의미를 파악하기 위하여 곡면의 가우스 사상에 관하여 언급하자. 곡면 M 위에 연속인 단위 법선 벡터장이 존재하면 M을 방향을 줄 수 있는(orientable)곡면이라고 하며 단위 법선 벡터장 U가 선택된 곡면 M을 방향이 주어진(oriented)곡면이라 한다. 방향이 주어진 곡면 M에 있는 각 점 p마다 $U(p)$를 시점이 원점이 되도록 평행이동 시켜 얻어지는 벡터를 $G(p)$라 하면 G는 M에서

단위구(unit sphere)로 가는 사상이 되는데, 이를 M의 가우스 사상(Gauss map)이라 한다.

M에 있는 유한한 영역 D에서 $K>0$이면 $\int_D KdA$는 $G(D)$의 면적이 되고, $K<0$이면 $\int_D KdA$는 $G(D)$의 면적의 음이 됨을 쉽게 보일 수 있다. 그러므로 Alexandrov의 정리의 조건은 $K>0$인 영역에서 단위 법선 벡터들을 시점이 원점이 되도록 평행이동 시키면 단위 구면을 단 한번 덮게 된다는 뜻이다. Alexandrov의 정리에 의하여 토러스는 볼록이 아니지만 강성이라는 사실을 얻을 수 있다. Alexandrov의 정리의 조건을 만족하는 곡면은 후에 S. S. Chern, R. K. Lashof와 N. H. Kuiper 등에 의하여 활발하게 연구된 중요한 종류의 곡면이다.

Alexandrov의 정리가 나온 이후에 이 정리를 해석적인 곡면에서 매끄러운 곡면으로 확장하려는 많은 노력이 있었으나 오랫동안 의미 있는 결실을 거두지 못하다가 1962년 L. Nirenberg([12])는 Alexandrov의 정리의 조건에 두개의 조건을 추가함으로써 중요한 결과를 얻게 된다.

Nirenberg의 정리: 다음 세 조건을 만족하는 방향을 줄 수 있는 C^4 컴팩트 곡면 M은 강성이다.

(가) $\int_{K>0} KdA = 4\pi$;

(나) $M^- = \{ p \in M \mid K(p) < 0 \}$의 모든 경계점에서 K의 그래디언트(gradient)가 0이 아니다.

(다) M^-의 모든 성분(component)은 많아야 한 개의 폐 점근곡선(closed asymptotic curve)을 갖는다.

Nirenberg 정리는 실질적으로 컴팩트 곡면에 대한 의미 있는 마지막 결과로 볼 수 있기 때문에 이 정리의 내용과 증명의 개요를 자세히 살펴볼 필요가 있다.

Nirenberg 정리의 핵심은 점근곡선에 관한 조건에 있다. 제2기본형식의 값이 0이 되는 접벡터를 점근벡터(asymptotic vector)라 하고 모든 속도벡터(velocity vector)가 점근벡터가 되는 곡면 M에 있는 곡선을 점근곡선(asymptotic curve)라 한다. 점근곡선이라는 성질이 내재적 성질이 아님은 명백하다.

Nirenberg 정리의 증명의 개요를 살펴보면 위 세 조건이 주어진 이유를 파악할 수 있다. 우선 조건 (가)는 M^+의 임의의 점 p에서의 접평면에 의하여 나누어지는 두 반공간(half-space) 중 하나는 $M-\{p\}$를 포함한다는 성질과 동치가 된다. 더욱이 M이 방향을 줄 수 있으면 $\{ p \in M \mid K(p) \geq 0 \}$의 임의에 점에 대하여 같은 사실이 성립한다.

조건(나)는 M^-의 경계가 유한개의 매끄러운 폐곡선들로 이루어져 있으며 이 곡선들을 가로지르면서 Gauss 곡률이 부호가 바뀜을 내포한다. 이 조건은 M^-의 강성을 증명과정에서 나타나는 미분방정식을 다루는데 있어서 기술적인 편의를 위한 것이다. 조건(가)와 (나)에 의하여 $M-M^-$은 연결되어있고 그 경계곡선들은 유한개의 볼록 평면 폐곡선임이 보여 진다. 따라서 M^-의 모든 성분의 경계는 유한개의 볼록폐곡선으로 이루어져있다. M^-의 한 성분의 경계에 평면뚜껑을 씌어 생기는 구분적으로 (piecewise) 매끄러운 곡면위에 점근방향을 확장시킨 방향장(direction field)을 얻을 수 있고, 이 방향장에 Poincare의 지표정리(index theorem)를 적용함으로써 M^-의 모든 성분은 두개의 평면 볼록 폐곡선을 잇는 통(tube) 모양이 됨을 보인다.

이제 M과 N을 조건 (가),(나)와 (다)를 만족하는 등거리적인 컴팩트 C^4 곡면이라 하자.

$M-M^-$와 $N-N^-$의 경계에 평면뚜껑을 씌어 생기는 구분적으로 매끄러운 곡면을 각각 M'과 N'이라 하면 매끄럽지 않은 볼록 곡면에 관한 Pogorelov의 강성정리([P2])에 의하여 M'과 N'은 합동이 되므로 $M-M^-$와 $N-N^-$은 일치한다고 가정해도 된다. 이 가정 하에 M^-과 N^-가 일치함을 보이면 된다. 이를 위해서는 M^-의 한 성분을 T라 하고 이에 대응되는 N^-의 성분을 U라 하면 T와 U는 경계가 일치하는 튜브 모양의 곡면이 되는데, 이 두 곡면의 제2기본형식이 같음을 보이면 된다. T와 U의 제2기본형식이 만족하는 Codazzi 방정식으로부터 얻어지는 쌍곡(hyperbolic) 편미분방정식의 초기값 문제를 T의 점근 곡선들을 특성곡선(characteristic)으로 하여 고찰함으로써 T와 U의 제2기본형식이 경계의 한 근방에서 같음이 증명된다. 이 사실을 바탕으로 같은 쌍곡 편미분방정식의 Goursat 문제를을 T의 점근 곡선들을 특성곡선으로 하여 고찰하고 조건(다)와 Poincare-Bendixon의 정리에 의하여 얻어지는 T의 점근 곡선들의 성질을 이용하면 T와 U의 제2기본형식이 전 영역에서 같다는 결과를 얻게 되어 Nirenberg의 정리의 증명이 완결된다.

위 증명과정에 보았듯이 조건 (가),(나)와 (다)는 아주 중요한 역할을 한다. 조건(가)는 자연스러운 조건이지만 조건(나)와 (다)는 그렇지 못하며 특히 조건(다)는 내재적 성질이 아니기 때문에 더욱 부자연스럽다. Nirenberg도 이 조건을 아주 불만스럽게 생각하여 이 조건을 만족하지 않는 경우는 없음을 증명하려 했지만 실패하였고 이 후 많은 노력에도 불구하고 Nirenberg의 정리를 개선하는 의미 있는 결과를 얻지 못한 상태에서 강성이론에서의 관심은 다른 방향으로 옮겨가게 되었다.

컴팩트 곡면 다음으로 자연스럽게 떠오르는 대상인 볼록 비 컴팩트 완비곡면에 관하여 1946년 러시아 수학자 Olowjanischnikow(13)는 다음의 강성정리를 얻었다.

Olowjanischnikow의 정리: $\int_M KdA < \pi$를 만족하는 비 컴팩트 완비 볼록 곡면은 강성이 아니다.

Olowjanischnikow의 증명은 전형적인 러시아 학파의 방법을 사용하고 있다. Olowjanischnikow의 정리는 Gauss 사상의 상이 구의 사분의 일을 채우지 못하는 완비 볼록 곡면은 강성이 아님 알려주고 있다. Gauss 사상의 상이 이 보다 커지는 경우에 대해서 1956년 Pogorelov(15)는 다음의 결과를 얻었다.

Pogorelov의 정리. $\int_M KdA = 2\pi$를 만족하는 완비 볼록 곡면은 강성이다.

즉, Gauss사상이 반구면을 거의 채우는 완비 볼록 곡면은 강성이라는 것이다.

Gauss사상의 상(image)의 면적이 π 이상이고 2π 보다 작은 완비 볼록 곡면에 대한 강성을 탐구하는 것은 흥미롭고 의미 있는 일이다.

이제 완비가 아닌 볼록 곡면의 강성에 관한 결과를 알아보자.

1900년 Liebmann([10])은 구면에 있는 열린 집합에 관하여 다음 결과를 얻었다.

Liebmann의 정리. 폐포가 열린 반구면(hemisphere)에 포함되는 구면의 열린 부분집합은 강성이 아니다.

더욱이 1919년 Liebmann([11])은 구면에서 아무리 작은 원반모양을 제거하더라도 강성이 아님을 증명하였다. 사실 그는 이러한 영역의 합동이 아닌 등거리 변형(isometric deformation)이 존재함을 보였다.

더 나아가서 M. Hilbert와 Cohn-Vossen은 구에서 한 대원의 임의의 호를 제거한 영역 역시 합동이 아닌 등거리 변형을 가짐을 주장하고 있으나 이 주장에 관한 증명을 수록하고 있는 문헌은 아직 발견이 안 된 상태이다.

구를 임의의 볼록 곡면으로 바꾸었을 때 이와 유사한 사실이 성립하는지에 대하여는 얻어진 결과가 없는 한편 1971년 Greene 과 Wu([6]) 는 임의의 볼록 곡면에 대하여 다음 결과를 얻었다.

Greene 과 Wu 의 정리. Gauss 곡률이 0 이상인 컴팩트 곡면에서 유한개의 점을 제거한 영역은 강성이다.

일반차원 유클리드 공간에 있는 초곡면에 관하여 1876년 Beez([18])는 다음 결과를 얻었다.

Beez의 정리. $R^n(n \geq 4)$ 에 있는 연결된 초곡면 M의 임의의 점에서 모양연산자(shape operator)의 계수(rank)가 3이상이면 M은 강성이다.

Beez의 정리는 M의 구부러진 차원이 충분히 크면 강성임을 알려주고 있다. 유클리드 공간에 있는 강성인 초곡면에 관한 관심이 3차원 공간에 있는 곡면으로 집중이 되어왔던 주된 이유가 여기에 있는 것으로 보인다.

해석적 컴팩트 곡면에 관한 Cohn-Vossen의 정리가 이 정리가 나오고 나서 한참 후에 얻어졌다는 사실은 그만큼 3차원 공간에서의 컴팩트 곡면의 강성이론이 어렵고 깊은 문제임을 시사하고 있는 것으로 보인다.

일반차원 유클리드 공간에 있는 여차원이 2이상인 부분다양체(submanifold)에 관하여 1939년 C. Allendoerfer([3])는 다음 결과를 얻었다.

Allendoerfer의 정리. M과 N을 같은 여차원을 갖는 R^n의 부분다양체라 하고 $\Phi : M \to N$를 등거리사상이라 하자. M의 모든 점에서 유형수가 3이상인 R^n의 부분다양체는 같은 유형수와 같은 첫 번째 법공간(first normal space)을 갖는 부분다양체의 범위 안에서 강성이다.

여기서 M의 유형수는 초곡면의 모양연산자의 계수를 일반화 한 개념이다. 따라서 Allendoerfer의 정리는 Beez의 정리의 일반화로 볼 수 있다. 즉, 구부러진 차원의 개수가 충분히 큰 n차원 유클리드 공간의 부분다양체는 강성이라는 것이다. Allendoerfer 정리의 조건은 아주 강한 조건이나 이 정리는 가장 좋은 부분적인 결과로 평가받고 있다. 다른 공간형, 즉 S^3와 H^3에 있는 곡면의 경우 강성문제는 Pogorolev가 R^3에서의 문제로 바꿈으로써 여러 강성정리들을 얻을 수 있음을 밝혔다. 예를 들면 S^3의 열린 반구에 놓여있는 컴팩트 볼록 곡면은 이러한 곡면의 범위 안에서 강성임을 이 방법으로 보일 수 있다.

S^n과 $H^n(n \geq 4)$에 있는 모든 점에서 모양연산자의 계수가 3이상인 초곡면의 강성도 R^n에서와 같은 방법으로 보일 수 있다.

그리고 1977년 Hsiung과 Liu([8])에 의하여 얻어진 다음의 정리도 Cohn-Vossen의 정리를 상수횡단곡률을 갖는 3차원 리만공간에 있는 곡면으로 확장시키는 의미 있는 결과이다.

Hsiung과 Liu의 정리: M, N을 상수횡단곡률을 갖는 3차원 리만다양체 $\overline{M}$에 있는 방향이 주어진 컴팩트 곡면이라 하고 II, II^*를 각각 M, N의 단위법선벡터 e_3, e^*_3에 관한 제2기본형식이라 하자. 그리고 II가 양의 정부호(positive definite)이고 $f: M \to N$를 위로의 국소적 등거리 변환(onto local isometry)이라 하자. M과 N을 포함하는 연결된 열린 영역 D위에서 연속인 무한소 등각 벡터장(infinitesimal conformal vector field) ξ가 존재하여 내적 $\xi \cdot e_3$와 $\xi \cdot e_3{}^*$가 각각 M과 N에

서 같은 부호를 가지면 $II = II^* \circ f$ 이다.

$\overline{M}$가 3차원 유클리드 공간 R^3인 경우에는 R^3에 있는 한 고정점 O를 잡고 M의 각 점 m에 대하여 $X(m)$을 벡터 $\overrightarrow{Om}$이라 하면 X는 M 위에서의 무한소 닮음(homothetic) 벡터장이 됨을 쉽게 보일 수 있다. 특히 M이 볼록 곡면일 때 O를 M에 의하여 둘러싸이는 영역에 있는 한 점으로 택하면 $X \cdot e_3$는 M 위에서 같은 부호를 갖는다. N에 대해서도 마찬가지 사실이 성립함으로 Hsiung과 Liu의 정리는 Cohn-Vossen 정리의 일반화라는 결론이 얻어진다.

Hsiung과 Liu의 정리의 증명은 Herglotz의 증명을 일반화하여 얻어졌다.

3. 맺음말

앞에서 살펴보았듯이 강성문제는 3차원 유클리드 공간에 있는 컴팩트 곡면의 경우 가장 흥미롭고 근본적이라 볼 수 있다. 그런데 Nirenberg의 강성정리 이 후 이 영역에서 의미 있는 결과가 아직까지 안 나오고 있는 상태이다. Nirenberg의 강성정리는 Nirenberg 자신이 밝혔듯이 내재적이 아닌 부자연스러운 조건(다)를 품고 있다는 중대한 결점을 갖고 있다. 나머지 조건을 모두 만족하면서 이 조건만 만족시키지 않는 예가 아직까지 발견되지 않았기 때문에 Nirenberg는 이 조건을 만족하지 않는 경우는 없다고 예상하고 이 예상을 증명하려고 많은 노력을 기울였으나 실패하였으며 이 예상이 틀린 것 같다고 밝히고 있다([N]). 이 예상에 대한 답을 구하는 일 자체도 흥미롭고 의미가 있는 것으로 보인다.

Nirenberg의 강성정리의 증명에 있어서 핵심은 Codazzi 방정식으로부터 얻어지는 쌍곡 편미분방정식에 관한 초기값 문제의 해의 유일성을 증명하는 일이며 조건(다)는 이를 위하여 점근곡선을 특성곡선으로 이용하는데 필요하다. 2장에서 언급되었듯이 1955년 Aleksadrov와 Sen'kin이 그 근방에 얻어진 편미분방정식에 관한 결과를 이용하여 해석적이라는 조건 없이 Cohn-Vossen의 정리를 간결하게 증명할 수 있었다는 사실은 Nirenberg의 정리가 나온 이후에 얻어진 편미분 방정식에 관한 많은 중요하고 유용한 결과들 중에서 조건(다)를 쓰지 않고 강성정리를 증명할 수 있게 하는 방법이 있을 수도 있다는 가능성을 시사하고 있다

Cauchy의 정리는 두 범주, 즉 본 논문에서 다뤘던 매끄러운 범주(smooth category)와 다면체(polyhedra), 골조(frameworks), 돌쩌귀달린 판(hinged plates)등을 포함하는 이산 범주(discrete category)에서의 강성이론으로 일반화를 되었다. 이산 범주에서의 강성이론에 관한 연구는 그 자체로써 흥미로울 뿐 아니라 구조역학 등 중요한 응용적인 측면을 갖추고 있어 현재 활발한 연구가 진행 중에 있다. 이제 강성문제의 주요

무대가 이산 범주가 되어가고 매끄러운 범주에서의 강성이론이 점점 관심을 잃어가더라도 곡면의 컴팩트 곡면의 강성정리가 우아하게 매듭지어지길 바란다.

감사의 글 부족한 점이 많았던 본 논문에 대하여 세밀하게 오류를 지적해 주시고 내용을 보완해 주셨을 뿐만 아니라 중요한 참고 문헌들을 소개해 주신 심사위원들께 깊이 감사드립니다.

참고 문헌

1. Alexandrov,A. D., *On a class of closed surfaces*, Recueil Math.(Moscou) 4(1938), 69-77.
2. Aleksadrov, A.D., Sen'kin E.P. *On the rigidity of convex surfaces,* Vestic Leningrad Univ. 10(8)(1955), 3-13(Russian).
3. Allendoerfer, C.B. *Rigidity for spaces of class great than one*, Amer. J. Math. 61(1939), 633-644.
4. Cohn-Vossen, S. *Unstarre geschlossene Flächen*, Math. Annalen 102(1929-30), 10-29.
5. Connelly, R. *Rigidity*, Handbook of Convex Geometry(1993), 223-271.
6. Greene, R. E. and Wu, H. *On the rigidity of punctured Ovaloids*, Ann. of Math. (2) 94(1971), 459-472.
7. Hergotz, G., *Über die Starrheit der Eiflächen*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hansischen Universität, Vol. 15(1943).
8. Hsiung, C-C., Liu. J.D. *A generalization of the rigidity theorem of Cohn-Vossen,* J. London Math. Soc. (2) 15(1977), 557-565.
9. Hopf, H. Lectures on differential geometry in the large, Stanford University, 1957.
10. Liebmann, H., *Ueber die Verbiegung der geschlossen Flächen positiver Krümung*, Bayer. Akad.Wiss. Math.-Physik K1. S.-B.(Munich)(1919), 267-291.
11. Liebmann, H., *Die Verbiegung der geschlossen und offen Flächen positiver Krümung*, Math. Ann. 53(1900), 81-112.
12. Nirenberg, L., *Rigidity of a class of closed surfaces*, Nonlinear Problems(Proc. Sympos., Madison, Wis.,1962), 177-193.
13. Olowjanischnikow, S.P. *On the bending of infinite convex surfaces*, Mat. Sb. 18(60)(1946), 429-440(Russian. English summary).
14. Pogorelov, A.V., *On the rigidity of general infinite convex surfaces with*

integral curvature 2π, Dokl. Akad. Nauk 19-20(Russian).

15. Pogorelov, A.V., *Die eindeutige Bestimmtheit allgemeiner konvexer Flächen* (translation from the Russian),1956.
16. Spivak, M., A., *Comprehensive Introduction to Differential Geometry* Vol. V, 1979.
17. Steinitz, Rademacher, *Vorlesungen uber die Theorie der Polyeder,* (Springer, Berlin), 1934.
18. Beez, R, *Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höhere Ordnung,* Zeischrift für Mathematik und Physik 21(1876), 373-401.

Rigidity of surfaces

Department of Mathematics, Yonsei University **Ho bum Kim**

In this article, the concept of rigidity of smooth surfaces in the three dimensional Euclidean space which naturally arises in elementary geometry is introduced, and the natural process of the development of rigidity theory for compact surfaces and its generalizations are investigated.

Key word: convex surface, compact surface, congruence, isometry, rigidity, first fundamental form, second fundamental form, Gaussian curvature

2000 Mathematics Subject Classification: 01-02, 51-03, 53-03, 53A05

논문 접수: 2007년 9월 14일 심사 완료: 2007년 10월 25일