韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2007. 11. 제 46권, 제 4호, 357-369

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2007, Vol. 46, No. 4, 357-369

중학교 영재학생과 예비교사의 영(0)에 관한 인식과 오류

박 지 현 (서울대학교 대학원)

I. 서 론

일상생활에서 우리는 0을 어떤 어려움이나 두려움 없이 흔히 사용하고 있다. 아파트 동 호수, 전화번호, 자동차 번호, 기온 등에서 사용이 그것이다. 또한 눈에 보이지 않고 실생활 맥락에서 잘 사용하지 않으나 수를 배우기 시작하는 어린아이도 0은 어느 정도 알고 있다. 그러나 이 경우 '수'보다는 '기호'나 '상태'를 의미하는 경우가 많다.

학생들은 초등학교 때 여러 자리 수의 사칙연산을 다루며 0을 포함하는 계산을 처음 다루게 된다. 이때 처음으로 0을 다루는데 어려움을 겪게 되고, 중학교 때 음수와 함께 실수의 연산을 다루며 또 한 번 자연수와 달리 연산의 의미를 부여하기 힘들어 어려워한다. 고등학교 1학년 <수학 10-가>를 마치면 학생들은 복소수까지 확장된 수 체계를 모두 다루게 된다. 그럼에도 불구하고 0의 의미나 0을 포함한 계산에 대해 진지하게 생각해볼 기회가 없는 것이 사실이다.

학생들의 0에 대한 이해와 0을 다루는데 있어 어려움은 초등수준에서 꾸준히 연구되어 왔다. Suydam과 Dessart(1976), Brown과 Burton(1978) 등은 초등학생들의 범자연수의 연산에서 0이 포함된 연산에서의 나타내는 오류 유형을 분석하였고, Rey와 Grouws(1975)는 특히 0을 포함한 나눗셈에서 학생들이 어려워함을 밝힌바 있다. 또한 이러한 학생들이 0을 수로서 인식하고 0을 다루는데 있어 어려움을 극복할 수 있도록 하는 방법으로 교사의 형식적 교육을 제안하며, 예비교사를 대상으로 한 연구와 0의 지도에 대한 새로운 아이디어를 제시하는 연구들이 진행되어 왔다(김수미, 2004; Rey & Grouws, 1975; Wheeler, 2002; Wheerler & Feghali, 1983; Wilson 2001).

0이 처음 도입되고 0을 다루기 시작하는 시기가 초등수준이기는 하나 자연수를 넘어 유리수, 실수, 복소수에 이르기까지 수 체계가 완성되고 수 개념이 분명해지는 시기가 중등 수준임을 고려 할 때, 0에 대한 이해와 그와 관련한 연산에 관한 연구에서 중·고등학생들을 대상으로 한 연구는 그 필요성에도 불구하고 거의 찾아 볼 수 없었다. Borasi(1996)는 고등학생과 대학생의 0^0에 대한 사례연구에서 이들 학생들이 0을 다루는데 있어 겪는 어려움을 보고하였고, 나귀수(2001)는 중학교 학생들이 수 개념을 이해 할 때 0을 자연수로 포함하는 오류를 많이 범한다는 사실을 보고한 바 있다. 그러나 이러한 결과는 그들의 오류나 수개념에 대한 연구 결과의 일부에 지나지 않아, 보다 구체적이고 실제적인 실태조사와 연구가 필요한 것으로 보인다.

이러한 배경에서 이미 실수까지의 수 체계를 모두 학습하고 0에 관한 기본 연산을 다룰 수 있으며, 이를 확장한 지수까지를 다룰 수 있는 영재학생들로 선발된 중학교 3학년생들을 대상으로 어떻게 0을 이해하고 다루는지를 조사하였고, 아울러 이들을 가르치고 교육할 중등 예비교사를 대상으로 그들의 0에 대한 인식과 0을 처리하는데 있어 오류를 조사하였다. 이 대상들로부터 나온 결과가 중학교 영재 학생들과 중등 예비교사 전체로 일반화하기에는 어려움이 있으나, 중등수준에서 0의 개념 및 지도에 관한 기초연구로 여기에서 발생된 오류를 분석하여 이러한 문제를 어떻게 해결할 수 있도록 할지에 대한 시사점을 찾고자 하였다.

이를 위해 우선 수학사적으로 0에 대한 이해와 오류에 관한 정리가 필요하며, 형식불역의 원리에 입각한 형식적 증명에 대하여 학생들의 이해와 지도에 관한 논의가 필요할 것으로 보인다. 아울러 현재 교육과정에서 0

* 2007년 8월 투고, 2007년 8월 심사 완료
* ZDM 분류 : F43
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 영, 인식, 오류, 중학교 영재, 중등예비교사

의 도입과 취급 방법을 고찰하는 것이 학생반응을 심도 있게 이해하는데 필요한 요소로 여겨진다. 학생 반응은 "수로서의 0"에 대한 이해와 "0을 포함한 나눗셈", "0^0"에 관한 문항을 중심으로 반응 빈도와 정당화 유형을 분석하였다. 분석의 결과를 바탕으로 0에 대한 현재 교육의 문제점과 시사점, 앞으로의 교육방법에 대하여 논의하고자 한다.

Ⅱ. 0의 발달과정과 지도

1. 수학사에서 0

현재 사용되고 있는 숫자 0의 기원은 정확히 알려지지 않고 있다. 어떤 수학자가 0의 개념을 정의하여 그때부터 0을 쓰게 된 것이 아니기에, 누가 0의 역사에 대해 질문한다하여도 한마디로 대답하기는 어려운 질문이다. 다만 인도의 수학자들에 의해서 기원 후 500년과 800년 사이에 만들어 진 것으로 추측할 뿐이다(김수미, 2004; 김주영, 김성숙, 2001; Wilson, 2001).

여기서는 0의 역사를 수의 기원부터 시작하여 자세하게 다루기보다는 숫자의 발달과정과 더불어 0이 '기호'에서 '수'로서 어떻게 발전하였는지를 간단히 언급하고자 한다.

가. 숫자의 발생과 기호로서의 0

0의 발생과 도입은 숫자의 발달과정과 많은 연관이 있다. 수 개념을 구성하는 데는 수를 나타내는 수단이 매우 중요한 역할을 한다. 지금의 아라비아 숫자와 십진법이 공용화 된 것도 이러한 맥락에서 일 것이다. 잘 알려져 있듯이 아라비아 숫자가 최초의 형태는 아니며 지금의 위치적 기수법인 십진법이 처음부터 잘 쓰였던 것은 아니다. 기수법은 크게 가법적 기수법, 승법적 기수법, 위치적 기수법으로 발달해 왔다. 이는 문명별로 차이를 보였다. 가법적 기수법은 수를 나타내는 기호의 합으로 표현하는 것으로 몇 가지의 기호를 반복적으로 사용하여 그 합으로 나타낸 것이다. 대표적인 예는 이집트, 수메르, 그리스를 들 수 있다. 승법적 기수법은 수를 개개의 숫자가 나타내는 수의 곱으로 전체 숫자의 크기를 나타내는 것으로 대표적인 예로 중국의 경우를 들 수 있다. 한편 위치적 기수법은 몇 개의 숫자를 사용하여 수를 표현하되 어떤 자리에 오느냐에 따라 그 숫자를 사용하여 표현하는 것으로 바빌로니아, 마야, 인도의 경우가 대표적인 예라 할 수 있고 오늘날의 아라비아 숫자가 이것이다.

오늘날의 0에 해당되는 기호가 처음 만들어져 사용된 지역은 고대 바빌로니아 지역으로 보고 있다(김수미, 2004; 김주영, 김선숙, 2001; Boyer, 1944; Kaplan, 2003). 특정한 자리에 해당하는 수가 없음을 표현하는 기호를 사용할 필요성에 의해 누가 만들어 냈는지도 모르게 사용되기 시작하였던 것이다. 즉 최초의 0은 하나의 수로 인식되지 못했으며, 위치적 기수법 체계에서의 자리지기로서의 일종의 기호로 사용되었던 것이다(Ouaknin, 2006).

한편 인도보다 수세기 이전 마야 문명에서도 영에 해당하는 기호가 사용되었다고 최근에 밝혀지고 있다(장희, 2004; Kaplan, 2003). 영에 해당하는 여러 가지 복잡한 기호들을 가지고 있었는데 이것이 오늘날 전래되어 사용되지 못한 것은 기수법의 영향으로 보인다.

오늘날 사용되는 영의 기호 0은 인도 지역에서 대략 6~9세기에 만들어진 것으로 추측 되지만 그 유래가 어디인지는 명확하지 않다(김주영, 김선숙, 2001; Boyer, 1944). 인도에서는 0은 '자리'나 '없음'을 나타내는 것뿐만 아니라 '빈 원', '무한', '물위의 여행' 등 다양한 의미로 쓰였다(Ouaknin, 2006).

나. 수로서의 0과 그와 관련한 오류

인도에서는 일찍이 0을 하나의 수로 받아들이고 이것이 포함된 계산을 시도하였다. 이것은 다른 문화권에서 찾아보기 힘든 일이다. 7세기 인도 수학자 Bramagupta는 수의 연산을 0과 음수까지 확장하려고 시도한 최초의 수학자이다. 그는 0을 "어떤 수에서 같은 수를 뺄 때 나오는 수"라고 정의하고 0의 성질을 다음과 같이 소개하였다(김주영, 김성숙, 2001).

> 0을 어떤 수에 더하거나 빼도 그 수는 변하지 않는다. 그리고 0곱하기 임의의 수는 0이 된다. 0과 음수의 합은 음수이다. 0과 0의 합은 0이다.

이러한 성질은 오늘날에도 유효한 것이다. 그러나 나눗셈에 있어서는 다음과 같이 주장하여 오류를 범하였다.

0 나누기 0은 0이다.

한편 인도의 다른 지역의 수학자인 Mahavira는 자신의 저서에서 "어떤 수를 0으로 나누면 그 수는 바뀌지 않는다."라고 기록하였으며, 11세기 Spapita는 그의 저서에서 " 어떤 수 나누기 영은 영이다."라고 주장하였다. 12세기 인도의 최고 수학자였던 Bhaskara 역시 0에 의하여 나눈 것에 대하여 고투하였는데 결국 어떤 수 나누기 0은 무한대라고 정의하였다. 이처럼 0을 수로 받아들이고 이를 계산하려고 시도한 인도의 많은 수학자들 사이에서도 이에 관해 주장이 분분하였고 오류가 많았음을 알 수 있다(Boyer, 1944).

한편 이후 18세기에서 19세기의 Euler나 Abel, Ramanujan과 같은 유명한 수학자들도 무한급수의 합이나 나눗셈에 관하여 0을 취급하는데 오류가 있었음을 찾아볼 수 있었다(김주영, 김선숙, 2001).

이상의 내용을 정리해 보면 0이 하나의 기호에서 수로 인식되면서 과거 수학자들은 엄청난 혼란을 겪었음에 틀림없다. 자연수와 달리 연산의 의미를 적용하기 어려운 경우, 특히 0이 포함된 나눗셈은 많은 논란을 불러일으켰으면 수학은 그러한 논란을 해결하는 과정에서 성장과 발전을 거듭해왔다고 할 수 있다.

다. 형식 불역의 원리

역사를 돌이켜 볼 때 여러 문명에서 0에 해당하는 기호를 발명하고 수로 발달했으나 처음 인도를 제외하고는 유럽을 비롯하여 다른 문명의 고대인들에게는 쉽게 받아들여지지 않았던 것으로 보인다. 그들에게 수라는 것은 추상적 개념이기보다는 실재하는 대상을 표현하는 구체적인 개념이었을 것이며 이러한 점에서 '아무것도 없음'을 뜻하는 0은 이러한 요구를 충족시키지 못했던 것이다.

그러나 19세기에 이르러 Hakel은 음수를 받아들이기 위해서 물리적 세계에 구체적 모델을 더 이상 찾지 않았다. 그에게 음수는 실제적인 것을 나타내는 개념이 아니라 형식적인 구조를 이루는 것이었다. 여기서 비로소 음수 개념을 양의 개념과 관련짓지 않고 순전히 형식적 개념으로 유지하면서 음수 체계를 연구하였으면 이렇게 얻어진 음수구조는 대수적으로 모순이 없었다. 이것이 바로 Freudenthal이 언급한 대수의 원리 또는 '형식불역의 원리'이다(우정호, 1999).

이 원리는 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 그대로 유지 되도록 새로운 수 체계의 연산과 관계를 규정하는 방식으로 대수적인 구조를 확장한다는 것이다. 이를 0이라는 관점에서 해석해보면 결국 0이 수가 되려면 기존의 수인 자연수를 확장해갈 때 0과 자연수 혹은 0과 0의 연산 결과가 연산 자체의 의미보다는 자연수 집합의 대수적 구조를 보존하는 방향으로 확장되어야 한다는 것이다. 가령 3^2이 '3이 두 번 곱해진 것'을 의미했다 하더라도 3^0에서는 '3이 0번 곱해져있다'는 의미가 명확하지 않은 것이기에, 이제는 의미에서 분리하여 자연수에서 만족하는 성질을 유지하는 조작을 통해 필수적인 결과에 이르러야 하는 것이다. 이러한 원리로 0을 포함한 나눗셈 문제를 해결하면 다음과 같다.

① 어떤 수 ÷ 0 : 불능(undefined)

증명) $a \neq 0 \ \ a \in N$ 에 대하여 $a \div 0 = x$ 라 하면

$a = x \times 0$ (형식불역의 원리에 의해)

x에 관계없이 항상 $x \times 0 = 0$ 인데

$a \neq 0$ 이므로 x는 만족하는 해가 없음 ■

② 0 ÷ 어떤 수 = 0

증명) $a \neq 0 \ \ a \in N$ 에 대하여 $0 \div a = x$ 라 하면

$0 = x \times a$ (형식불역의 원리에 의해)

$a \neq 0$ 이므로 $x = 0$ ■

③ 0 ÷ 0 : 부정(indeterminate)

증명) $0 \div 0 = x$ 라 하면

$0 = x \times 0$ (형식불역의 원리에 의해)

어떤 수라도 그 수에 0을 곱하면 0이 되므로 이때는 해가 정해지지 않음 ■

이상의 증명은 0이 포함된 나눗셈의 결과에 더 이상 의문의 여지를 남기지 않는다. 같은 맥락으로 자연수의 거듭제곱을 고려할 때 0^0을 고려해보면 자연수의 0제곱인 $1^0, 2^0, 3^0$, …은 모두 그 값이 1이고, 0의 거듭제곱인 $0^1, 0^2, 0^3$, …은 모두 그 값이 1이 되어 형식불역의 원리상 정의될 수 없는 불능(undefined)이 된다고 할 수 있다.

지금까지 살펴본 바와 같이 기호에서 수로의 0의 발달과 그 의미로 인해 현재에서도 그 의미가 혼재되어 있

는 것이 사실이다. 또한 형식적 증명이 명백히 제시되었음에도 불구하고 오늘날의 학생들은 여전히 0이 포함된 계산에 어려움을 겪는다. 현대 수학에서도 아직도 0으로 인한 문제는 존재한다. 앞서 고찰한 0의 탄생과 발달과정 그리고 과거 수학자들이 지금의 수 체계가 이루어지기까지 범했던 오류들은 학생들이 0의 의미와 성질을 확실히 할 수 있는 기회를 제공해줄 수 있는 좋은 소재가 될 수 있다. 또한 형식불역의 원리의 소개와 이에 대한 이해 활동을 통하여 수 체계의 구성과 수의 의미에 대해 이해하는 데 도움이 될 수 있을 것이다.

2. 교육과정에서 0

자연수와 무의 개념으로서의 0은 정규 교육과정 이전에 아동들이 수세기를 할 때부터 이미 다뤄진다. 이를 보다 체계적으로 교육하는 초·중등의 교육과정을 살펴보는 것은 교육과정과 관련하여 학생들이 가지는 0에 대한 개념을 이해하는데 도움이 된다. 따라서 다양한 수를 학습하면서 처음 0을 다루게 되는 초등학교와 정수로 확장하면서 0을 다루게 되는 중학교의 교육과정을 수 영역의 지도를 중심으로 간단히 살펴본다.

가. 초등학교

제 7차 교육과정은 단계형 수준별 교육과정을 기본으로 하여 학생들 역시 수에 관하여 '수와 연산' 단원에서 각 단계별(실질적으로는 학년별)로 배우게 된다.

<1 단계>의 50까지의 두 자리 자연수에서 시작하여 <4 단계>까지는 다섯 자리수를 다루며 자연수의 개념과 그 연산을 다루고, <5 단계>에서는 자연수에서의 약수와 배수의 개념을 다룬다. 또 <3 단계>에서 분수의 개념을 도입하고 <4 단계>에서 <6 단계>까지는 분수의 계산을 다루어 양의 유리수에서의 사칙계산을 취급하고 있다.

수 영역 지도 내용을 0의 도입과 양의 정수를 중심으로 살펴보면, 초등학교 1학년 <1-가 단계>에서 '0에서 9까지의 수'를 다룰 때 0은 처음 등장한다. 1에서 5까지의 수를 세는 활동을 반복하여 수 개념을 익히게 하고, 단위 없이 단지 사물의 수만 세도록 지도한다. 이후 수 개념이 형성되면 이를 수사와 숫자를 정의하여 사용하게 된다는 것을 인식하도록 하여 물건을 셀 때는 수사를 또 그 수를 나타낼 때는 숫자를 사용함을 알게 한다. 마지막으로 실제 활동을 통해 연속하는 두 수의 특징이 하나 차이 임을 하나 많은 것과 하나 적은 것의 개수 세기를 통해 지도한다(교육부, 1997).

이 때 0의 지도는 활동을 통하여 1~5 사이의 연속하는 수가 서로 하나 적고 많음을 인식한 후에 1보다 하나 작은 수가 0임을 알게 하여 0의 개념을 이해하게 한다. 즉 하나 적은 것을 나타낼 필요성을 느끼게 하여 0을 지도하고 있다.

6~9까지의 수 지도는 구체물의 직접 대응 조작을 통하여 하나 더 많은 수로 차례대로 지도한다.

이를 도식화 하면 다음 <그림 1>과 같다

1~5 까지 수 지도
1) 사물의 수 세기
2) 수사와 숫자 구분
3) 하나 많거나 하나 작은 수

⇓

0의 지도
1) '없다' 를 표현하는 약속
2) 1보다 하나 작은 수

⇓

6~9 까지 수 지도
1) 구체물의 직접 대응
2) 하나 많은 수

<그림 1> 초등학교에서 수와 0의 지도 내용과 방법

나. 중학교

중학교에서는 초등학교 과정에서 배운 내용을 바탕으로 내용을 심화 발전시키게 되는데 <7-가 단계>에서는 자연수의 성질, 기수법, 정수와 유리수의 뜻과 사칙연산을, <8-가 단계>에서는 유리수와 소수, 유리수와 순환소수를, <9-가 단계>에서는 제곱근과 무리수, 실수의 대소 관계, 근호를 포함한 식의 계산 등을 학습하게 된다.

학생들이 정수를 처음 배우게 되는 것은 <7-가 단계>에서 이다. 이때 0은 양수와 음수를 나누는 기준이 되는 값으로, 0보다 큰 수는 물론이고 0보다 작은 수도 있음을 알게 하여 양수와 음수의 개념을 이해하도록 한

다. 또한 수직선상에서 0은 '없다'의 뜻이 아니고 기준이 되는 원점임을 유의하여 지도한다(교육부, 1997).

제7차 교육과정에서 명시적으로 0을 지도하는 단계는 <1-가 단계>와 <7-가 단계>이다. <1-가 단계>에서는 순서수의 의미에서 하나 더 적은 것을 가르치면서 하나에서 하나 적은 것을 나타낼 필요성에 의해 0의 개념을 이해하게 한다. 즉 다양한 구체물들을 통하여 하나씩 덜어내면서 아무것도 없는 것을 나타내는 수로 0의 개념을 이해하게 한다. 그런가 하면 <7-가 단계>에서 0은 단순히 없음을 나타내는 것이 아니라 음수와 양수를 나누는 기준이 됨을 지도한다.

따라서 학생들은 처음에 직관적으로 없음을 나타내는 수로서의 0의 개념을 이해하고, 실생활에서 없는 것은 세지 않으므로 학생들은 세지 않는 것을 셀 수 없는 것과 혼동하게 된다. 또 중학교에 들어가면서 0은 단순히 없음을 나타내는 수가 아니고 음수와 양수를 나누는 기준이 되는 수임을 배우지만, 없다는 무의 개념이 커서 0의 또 다른 의미를 받아들이지 못하거나 0을 포함한 연산에서 0을 구체적 모델로 해석하려하는 경향을 보이기도 한다. 한편 기준의 의미가 부각되어 0을 하나의 기호로만 받아들이는 오류를 범하기도 한다. 따라서 학생들의 0에 대한 오류를 보다 면밀히 파악하고 분석하여 이를 수정, 극복할 수 있는 방안을 모색하는 일이 필요하다.

Ⅲ. 중학교 영재학생과 예비교사들의 0에 관한 인식과 오류

1. 연구 내용 및 방법

0의 발생과 역사를 고찰한 결과 0이 포함된 나눗셈의 문제가 많은 혼란과 분쟁을 불러일으킨 점과 Borasi(1996)가 제기한 0^0에 관한 학생들의 오류 분석에 주목하여, 이러한 현상이 지금의 중학생과 교사가 될 대학생들에게는 어떠한 양상으로 나타나는지를 조사하였다. 이미 0을 학습하고 학교수학에서 오랜 기간 0을 다루어 왔으며 또한 지수법칙을 이미 학습한 중학교 영재학생들을 대상으로 하였으며, 직접적으로 0을 도입하여 지도하지 않지만 중학교, 고등학교 학생들을 지도할 예비교사들의 이해의 정도를 알아보기 위하여 이들의 0에 대한 인식과 계산에 있어서의 오류를 탐구하였다.

구체적 연구 대상은 중학교 3학년 영재학생 20명과 사범대 4학년 예비 교사 16명을 대상으로 하였다. 분석 자료는 2007년 6월 각각의 수업시간을 이용하여 과제 설문조사를 통하여 수집하였다. 과제 설문은 0의 의미를 묻는 질문과 0을 포함한 나눗셈과 지수를 묻는 질문으로 구성되었다.

Wheeler와 Feghali(1983) 그리고 김수미(2004)는 초등학교 예비교사를 대상으로 0에 관한 이해를 연구를 하였고, Ball(199)은 초・중등 예비교사를 대상으로 하였으나 Rey와 Grouws(1975)의 연구에서와 마찬가지로 0을 포함한 나눗셈만을 중심으로 연구하였다. 따라서 이들 연구는 실질적으로 0을 가르치는 대상으로 하고 있는 초등 예비교사나 초등학생을 대상으로 한다는 점과 0을 포함한 나눗셈만을 그 내용으로 하고 있다는 점이 본 연구와 다른 점이라 하겠다. 구체적 과제 내용은 선행연구(김수미, 2004; Ball, 1999; Reid, 1997; Rey & Grouws, 1972; Wheeler & Feghali, 1983)를 바탕으로 나눗셈에 관한 질문과 함께 Borasi(1996)의 지수에 관한 질문을 첨가하였다(<표 1>).

<표 1> 과제 설문 내용

문항	내용
1	0은 하나의 수라고 할 수 있을까? 그렇게 생각한 이유를 쓰시오.
2	$6 \div 0$ 은 얼마 인가? 그렇게 생각한 이유를 쓰시오.
3	$0 \div 3$ 은 얼마 인가? 그렇게 생각한 이유를 쓰시오.
4	$0 \div 0$ 은 얼마 인가? 그렇게 생각한 이유를 쓰시오.
5	0^0 은 얼마 인가? 그렇게 생각한 이유를 쓰시오.

2. 중학교 영재학생과 중등 예비교사들의 0 처리 오류

가. 0에 대한 인식

"0을 수로서 인식 하는가"에 대한 질문에 중학생 20명 중 13명(65%)이 하나의 수로 볼 수 있다고 응답한 반면 나머지 7명(35%)은 0은 수가 아니라고 주장하였다 <표 2>. 예비교사의 경우는 16명 중 14명(87.5%)이 0이 수라고 답하였고, 2명(12.5%)만이 수가 아니라고 주장하

였다. 또한 문항 2, 3, 4, 5번에서 제시된 나눗셈 문제와 지수에 대한 문제의 정답률을 조사하였는데, 0을 수로 이해하는 중학생들의 경우 정답률(55.7%)이 0을 수로 보지 않는 학생들의 정답률(50%) 보다 다소 높기는 하나 큰 차이가 없는 것으로 나타났다. 예비교사의 경우는 0을 수로 받아들이고 있는 경우의 정답률(48.21%)이 수로 이해하지 않는 경우의 정답률(37.5%)보다 10% 이상 높게 나타났다.

<표 2> 중학생과 예비교사들의 0에 대한 인식

대상	중학생(20)	예비교사(16)
0도 하나의 수다	13(65%)	14(87.5%)
0은 수가 아니다	7(35%)	2(12.5%)

이 결과에 의하면 중학교 영재학생의 경우에 0을 수로 인식하지 못하고 있는 학생그룹이 어느 정도 있고, 예비교사의 경우에도 높은 비율은 아니지만 여전히 0을 수로 인식하지 못하는 그룹이 있음을 알 수 있다.

앞서 살펴보았듯 0이 수학사적으로 오랜 기간 동안 기호에 불과한 것으로 여겨졌던 것이 사실지만 중학교 3학년 영재학생과 대학 4학년의 학생이라면 이미 0보다도 더 어려운 개념인 음수, 무리수, 심지어 허수까지 학습하였다. 그럼에도 불구하고 학생들이 여전히 0을 수로서 인식하지 못하고 있다는 것은 0을 지도하는데 있어 0을 기계적으로 다루게 하는데 그쳐 학생들의 사고를 구조적으로 정립시켜주지 못하고 있음을 시사하는 것이라 하겠다. 특히 중학생의 경우 수가 아니라고 생각한 학생의 비율이 상대적으로 높게 나타난 것을 교육과정과 연결하여 생각해보면, 중학교 <7-가 단계>에서 0의 의미를 음수와 양수를 구분에 초점을 두어 지도하다보니 수보다는 기호의 의미로 이해하는 오류를 범하는 것으로도 해석할 수 있다.

<표 3> 중학생과 예비교사의
나눗셈과 지수 문제에서의 평균 정답률

대상	0도 하나의 수다	0은 수가 아니다
중학생(20)	55.8%	50.0%
예비교사(16)	48.2%	37.5%

한편 연구의 대상자 수나 조사 문항의 수가 작아 두 변인간의 관계를 단정하기는 어렵지만, 0을 수가 아니라고 주장한 학생들 역시 이후 계산에서는 0을 수로서 다루어 문제를 해결하고 있고, 중학생의 경우 0이 수가 아니라고 답한 학생의 나머지 문제에서의 정답률(50%)이 수라고 주장한 학생들의 정답률(55.77%)과 크게 차이가 나지 않는 것을 알 수 있다<표 3>. 즉 '0은 수가 아니다'라는 주장이 '0을 수로서 취급하지 않는다'는 의미는 아닌 것임을 알 수 있다.

위와 같은 결과는 김수미(2004)의 초등예비교사를 대상으로 한 설문과 크게 다르지 않으나, 이 연구에서 보고되었던 0을 수로 생각하지 않는 응답자의 평균 정답률이 75%였던 것에 비해서는 본 연구에서 이들의 정답률이 상대적으로 높게 나타나지는 않았다. 또한 조사 대상자 수가 작긴 하지만 0을 수로 인식하지 않는 비율은 중등예비교사의 경우(12.5%) 초등 예비교사(22.9%)보다 높지 않게 나타나고 있으나 여전히 수로 인식하지 못하는 그룹이 있다는 것은 시사하는 바가 크다 하겠다. 한편 이러한 결과는 중등교육과정에서의 수체계의 취급과 대수적 확장이 초등수준에서의 그것과는 다른 것에 기인한 것으로 보인다.

나. 0이 수인 이유와 0이 수가 아닌 이유

먼저 중학생 13명과 예비교사 14명에 해당하는 "0을 수로 인식하는 이유"는 다양하게 나타났다. 특히 중학교 영재학생의 경우 연산에서 닫힘의 개념이나 수 집합의 원소, 수직선상의 표시 여부, 수 패턴 등 여러 가지 관점에서 0의 수로서의 의미를 부여하고 있었다<표 4>.

<표 4> 0이 수인 이유

반응유형	중학생 (13)	예비교사 (14)
"없다"라는 의미를 수치화한 것	2	4
자연수처럼 수로 정의/약속	0	6
사칙연산에 닫혀있음	4	1
수 체계 성립에 필요	0	3
복소수집합의 원소	2	0
기타(수직선, 자연수 패턴)	3	0
이유 없음	2	0

0이 수가 되려면 범자연수로 수 체계를 확장해 나갈 때 기존의 자연수 집합에서 대수적 구조가 그대로 유지

되도록 연산이 규정되어야 함은 앞에서 살펴본 바 있다. 중학교 영재학생의 경우 사칙연산을 통해 형식적인 확장에서의 0의 의미를 찾으려는 빈도가 상대적으로 높았는데, 이후 그들의 나눗셈의 과정과 결과를 보면 다시 "아무것도 없음"을 의미하는 관념적이고 실생활 맥락적 해석을 바탕으로 한 문제를 해결하는 경향이 높아 아직 초기 단계의 형식화로 보인다. 이에 비해 예비교사의 경우는 '자연수가 정의 됐듯이 0도 정의한 것'이라는 표현과 '수 체계 성립에는 필요하다'는 등 구체적 설명 없는 애매한 표현을 통해 역시 자연수에서 대수 구조적 확장에 대해 논의를 피하고 있으나 0에 대한 인식이 분명하지 않음을 알 수 있다.

0을 수로 인식하더라고, 중학생들이나 예비교사 공통으로 단순히 "아무것도 없다"라는 의미를 양화하는 개념으로 인식하였는데 이는 자연수 속성에 비추어 사고하려는 경향으로 보인다. 즉 0이 '아무것도 없음'의 의미 이상임을 인식하지 못하는 것이다. 이는 0이 수가 아닌 이유에서 드러나는 "없다"라는 의미에서의 관념적인 해석과도 동일하다고 할 수 있다. 즉 두 경우 모두 수에 대해서 초보적인 개념을 가지고 있음을 알 수 있다. 이들에게 수는 자연수의 속성과 동일하다 할 수 있다. 이 들에게는 수가 어떤 구체적 모델을 찾을 수 있는 것이지 추상적 개념이 아닐 수 있다. 단지 이를 수로 여기느냐 기호로 여기느냐의 차이로 나탄 난 것이다. 특히 자연수의 속성을 가지지 않음으로서 0을 수로 생각하지 않는다는 주장은 이러한 학생들의 "수" 자체의 인식의 수준을 더욱더 드러내는 근거라 할 수 있겠다.

0이 수가 아닌 이유를 자연수의 속성이나 구체적 모델에 비추어 생각한다거나 하는 결과는 0에 대한 인식 이전에 수에 대한 인식의 재고가 필요함을 알 수 있게 하였다.

<표 5> 0이 수가 아닌 이유

반응유형	중학생(7)	예비교사(2)
"없음"을 나타내는 기호나 문자	3	1
자연수의 속성을 가지지 않음	2	0
기타(0은 특별, 기준이고 도구)	1	1
이유 없음	1	0

다. 나눗셈에 대한 이해

앞서 수로서의 0이 인식되기 시작하면서 과거 수학자들이 역사적으로 0을 포함한 연산에서 어떠한 어려움을 가지고 있었는지는 고찰한 바 있다. 실제 중학생들과 예비교사들의 반응 결과는 <표 6>과 같다.

<표 6> 0이 포함된 나눗셈에 대한 문제 반응 유형 및 빈도

제시된 문제	응답유형	중학생 빈도(%)	예비교사 빈도(%)
6÷0	불능*(해가없다)	13(65.0)	12(75.0)
	∞	6(30.0)	3(18.8)
	6	1(5.0)	1(6.3)
0÷3	0*	20(100.0)	16(100.0)
0÷0	부정*(임의의 수)	8(40.0)	1(6.3)
	불능(해가없다)	7(35.0)	9(56.3)
	∞	0(0.0)	1(6.3)
	0	2(10.0)	4(25.0)
	1	3(15.0)	0(0.0)
	무응답	0(0.0)	1(6.3)

(*: 각 문항 정답)

문항 2~4의 0을 포함한 나눗셈 문제는 오늘날의 중학생이나 중등 예비교사에게 있어서도 여전히 난제임에 틀림없다. 대상자의 전체 평균 정답률은 중학생의 경우 66.7%, 58.49% 이고, 특히 0÷0 문제는 각각 40%, 6.3%로 낮은 정답률을 기록하였다<표 6>.

그런가 하면 세 문항 모두 0을 포함한 나눗셈이지만 그 난이도는 다르게 나타났다. 학생들에게 '0÷0'은 가장 어려웠던 반면 '0÷수'의 문제는 두 대상자 그룹 모두 100%로 정답률이 가장 높았으며, 그 다음 '수÷0'의 순이었다. 이렇게 볼 때 학생들은 0이 피젯수, 제수로 모두 올 때 가장 어려워하였으며 그 다음에 제수로 이용될 때를 어려워함을 알 수 있다. '0÷수'의 문제가 100%의 정답률을 기록한 것은 그들의 반응에 비추어 보면 자연수에서 사용되는 연산의 구체적 모델의 맥락적 의미가 그대로 적용되기 때문인 것으로 보인다. 다시 말해 0을 어떤 수로 똑같이 나누면 몫이 얼마인가로 해석하여 자

연스럽게 0에 이른 것이다. 이는 이 문제의 학생의 정당화 유형 중 이러한 주장의 빈도가 가장 높음에서도 알 수 있다<표 7>. 이와 달리 '0÷0', '수÷0'은 같은 맥락으로 의미를 부여하기가 어렵다. 그럼에도 불구하고 '수÷0'의 문제가 정답률이 높게 나타난 이유는 "중학교 때 학교에서 그렇게 배웠던 기억이 난다"라는 어느 예비교사의 반응처럼 '0으로 나눌 수 없다'거나 '분모는 0이 안 된다'는 등의 말을 학교에서 줄곧 들어왔기 때문으로 여겨진다.

한편, 학생들과 예비교사의 오류 유형은 고대 수학자들의 오류와 매우 유사 하다. <표 6>에서 6÷0이나 0÷0의 경우 이들의 반응을 보면 6, 0, ∞ 등 다양한 반응을 보였다. 이러한 오답 유형은 단지 그들의 오류유형을 파악하는데 만 사용하는 것이 아니라 수학자들 역시 자신과 마찬가지 생각을 했던 역사를 소개하여 이를 탐구의 발판으로 삼을 수 있도록 교육에 이용함으로서 0에 대한 인식을 전환시켜줄 수 있는 계기로서 사용할 수 있는 좋은 재료가 될 수 있을 것으로 보인다.

대상자들은 0이 포함된 나눗셈의 결과뿐만 아니라 왜 그렇게 생각하는지에 대한 정당화를 요구받았다. 각 문항에서 정답을 제시한 학생들의 응답만을 따로 분리하여 정당화 유형및 유형별 빈도를 정리하면 <표 7>과 같다.

<표 7> 0을 포함한 나눗셈 문제에서
정답자의 정당화 유형 및 빈도

문항	응답유형	중학생 빈도(%)	예비교사 빈도(%)
6÷0	형식불역 원리	6(46.2%)	1(8.3%)
	나눌 수 없음	1(7.7%)	4(33.3%)
	분모 0 안 됨	4(30.8%)	4(33.3%)
	기타	1(7.7%)	2(16.7%)
	이유 없음	1(7.7%)	1(8.3%)
	소계	13	12
0÷3	형식불역 원리	5(25.0%)	2(12.5%)
	역수의 곱은 0	6(30.0%)	4(25.0%)
	0=0+0+0	1(5.0%)	1(6.3%)
	0을 삼등분해도 0	8(40.0%)	6(37.5%)
	0으로 정의	0(0.0%)	1(6.3%)
	이유 없음	0(0.0%)	2(12.5%)
	소계	20	16
0÷0	형식불역 원리	8(100.0%)	1(100.0%)
	소계	8	1

<표 7>의 결과를 보면 중학생이나 예비교사 모두 형식적인 사고가 요구되는 상황에서도 지속적으로 연산의 맥락적 의미를 모색하거나 단순 암기 또는 기계적 계산에 의존하여 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 반면 수체계의 확장시 적용되는 형식불역의 원리에 대해서는 잘 알지 못하는 것으로 드러났다. 이러한 결과는 초등 예비교사를 연구한 김수미(2004)의 연구 결과와 다르지 않다. 특히 예비교사의 경우 모든 문항에서 형식적 사고를 한 응답자는 단 1명으로 그 심각성을 드러 내주고 있다.

이들 반응의 구체적 특징을 보면, 우선은 자연수 범위를 넘는 0을 포함한 수의 연산에 대해서도 자연수에서 적용된 연산의 의미를 이용하여 이를 통해 결과를 구하려한다는 것이다. 즉 0÷3의 경우는 중학생 40%, 예비교사 37.5%가 "0은 3등분해도 0이다"라고 반응을 하였고 "0과 0의 역수의 곱이 0"이라고 말한 응답자 중에서도 추가적으로 이러한 의미적 해석을 더 하여 자신의 주장을 뒷받침하는 경우가 있었다. 6÷0의 경우에서 "0으로 나눌 수 없다" 등의 반응도 0의 의미적 해석을 모색하려 한 예라하겠다. 반면 형식적 증명을 통해 자신의 답을 정당화하는 응답자는 극히 적었고, 중학생 영재학생들의 경우 예비교사에 비해 형식적인 증명을 시도한 경우가 많았으나 모든 문항에 일관성 있게 사용하지는 않고 있었다. 이러한 반응들은 자연수의 범위를 넘는 수 집합에 대한 연산에서도 여전히 자연수와 마찬가지로 구체적 모델에서 연산의 의미를 찾으려 하고 있다는 것을 보여주는 예라 하겠다.

구체적 모델을 찾아 연산의 의미를 해석하는데 실패한 경우는 과거의 암기한 내용을 상기함으로써 문제를 해결하려하였다. 이는 예비교사의 경우에서 더 잘 드러났다. 6÷0의 문제에서 예비교사들은 "$\frac{6}{0}$은 분모가 0이 되어 안 된다"거나 "$\frac{0}{3}$은 0이다"와 같이 다른 설명 없이 "학교에서 그렇게 배웠다"는 응답이 높게 나타났다. 이것은 학생들이 0을 다루는 데 있어 의문의 제기나 고민 없이 이들 연산을 기계적으로 다루거나 단순 암기를 통해 학습하였음을 드러내는 것이라 하겠다.

무엇보다 놀라운 것은 예비교사의 형식적 증명 능력이 매우 낮은 데 있다. 형식불역의 원리에 대해 오직 한 명만 일관성 있게 답하고 있어 대상자들은 이에 대해 거의 모르거나 의식하지 못하고 있다고 할 수 있다. 중학

생의 경우에서도 그 반응 빈도는 다른 것에 비해 낮은 수치를 기록하고 있다. 또한 6÷0 문항에서는 형식적인 접근을 하였지만 0÷3에서는 다시 맥락적 의미 해석을 하고 있는 학생들이 많다는 것도 주목할 만하다. 이는 수체계의 확장시 적용되는 형식불역의 원리에 대한 충분한 이해가 부족함을 시사하고 학생들이 수의 연산을 형식적으로 다루는 것에 익숙하지 못함을 나타내는 것이라 할 수 있겠다. 그럼에도 불구하고 0÷0에 정답으로 반응한 학생의 정당화 유형을 볼 때 다른 반응 유형은 없이 형식적 방법만이 유일한 방법이었던 것은 해결이 곤란한 문제에서 형식적 방법이 실제로 얼마나 유용한 도구임을 보여주는 것이라 하겠다.

라. 0^0 에 관한 이해

선행연구와 다르게 과제 설문으로 더 첨가한 것이 0^0에 관한 질문이었다. 이 문항의 정답이 맞은 중학생은 3명(15%), 예비교사는 2명(12.5%)으로 낮은 정답률을 보였다<표 8>. 그러나 이마저도 형식적인 증명이나 형식불역의 원리에 의한 정당화는 없이 단순히 주장하는데 지나지 않았다. 가령 예비교사의 경우 "정의가 안 된다"거나 "0을 지수의 밑으로 할 수 없다"를 근거로 제시하였고 3명의 중학생의 경우도 "0을 0번 곱하는 것은 수가 아니다", "계산 불가능이다", "사람들의 약속이다"라고 대답하였다. 이러한 응답은 0^0 에 관하여 불능의 이유에 대한 이해를 대상자 모두 못하고 있는 것으로 해석될 수 있다. 가장 높은 반응율을 보인 답은 1로서 중학생 55%, 예비교사 43.8%를 나타내었다.

<표 8> 0^0에 대한 문제 반응유형 및 빈도

제시된 문제	응답유형	중학생 빈도(%)	예비교사 빈도(%)
0^0	불능*	3(15.0)	2(12.5)
	1	11(55.0)	7(43.8)
	0	1(5.0)	2(12.5)
	0 또는 1	2(10.0)	2(12.5)
	모든 수	1(5.0)	1(6.3)
	무응답	0(0.0)	2(12.5)
	계	20	16

(*: 문항 정답)

<표 9>에서 그 이유를 보면 "모든 수의 0의 제곱은 1"이라는 그동안 배워온 내용을 상기하거나 약속이라고 생각하는 등 의미적 해석을 하고 있는 것을 알 수 있다. 이는 앞서 살펴본 0을 포함한 나눗셈에서도 드러났듯이 학생들이 형식불역의 원리나 형식적 접근에서 불능이라는 것이 어떻게 정의되는 지에 대한 이해가 부족함을 드러내는 것이다. 또 수학이 사람에 의해 발전해온 것은 사실이나 그 이유를 수학적이고 논리적인 근거 없이 약속으로 규정하는 것은 학생들의 수 개념뿐만 아니라 수학관에도 문제가 있음을 드러내는 것이라 하겠다.

<표 9> 0^0에 대한 문제 반응유형 별 정당화 유형

제시된 문제	응답 유형	중학생 (20)	예비교사 (16)
0^0	불능	• 0을 0번 곱하는 것은 수 아님(1) • 계산 불가능(1) • 사람들의 약속 (1)	• "밑"에 0이 들어갈 수 없음 (1) • 정의 안 됨 (1)
	1	• $1^0=2^0=3^0=\cdots=1$ 모든 수의 0제곱은 1 (7) •1에 0을 0번(또는 아무것도 안)곱한 것 (2) •수학자들의 정의, 약속 (2)	• $1^0=2^0=3^0=\cdots=1$ 같이 모든 수의 0제곱은 1이라고 기억 (2) • $a^0=1$로 수학자들이 정의, 약속 (4) • 이유 없음(1)
	0	• $0^0=\frac{0^1}{0^1}=\frac{0}{0}=0$ (2) •0의 거듭제곱(1)	• 없는 것에 없는 것만큼 곱한 것은 0(1) • 0의 거듭제곱 (1)
	0 또는 1	• $0^0=x$, $x^n=0=x$, $x(x-1)(x^{n-2}+\cdots+x+1)=0$ (2)	• 그 때 그 때 다름 (2)
	모든 수	• $0^1 \div 0^1 = 0^0$ 4번처럼 모든 수 (1)	•0을 한 번도 곱하지 않았으므로 임의의 수(1)
	무응답	(0)	(2)

(괄호 안의 수: 반응 명수)

또한 0을 포함한 나눗셈 문제에서 비교적 일관되게 형식적 접근을 하려하였던 학생들조차도 0^0에 관한 문제에서 혼란을 느끼며, 형식적 접근에서도 논리적 오류를 범한 것은 교육과정에서 다루어보지 못했던 내용이고, 의문시 하지 않았던 내용에 대한 어려움에 기인한 것으로 보이며, 동시에 수 체계에서 연산의 결과가 갖는 의미에 대해 이해가 부족한 결과인 것으로 보인다.

Ⅳ. 0에 관한 오류의 교수학적 의미

지금까지 역사적으로 0의 발달과 그에 따른 수학자들의 혼란, 그리고 현대 중학교 영재학생들과 중등 예비교사들의 0에 관련한 오류에 대해 살펴보았다. 0이 계산의 대상으로 인식되면서 고대 수학자들에게 혼란을 가져오는 근원이 되었고 오늘날 교실에서도 크게 다르지 않은 것으로 나타났다. 수의 체계가 확장되고 그 대수적 구조가 정립되어 왔음에도 불구하고 우리는 여전히 0을 포함하는 많은 계산에서 오류를 범하거나 형식적으로 접근하지 못하고 암기에 의존하여 문제를 해결하는 경향을 보인다. 더욱이 이미 복소수 체계는 물론 추상 수학의 구조까지 다루어온 예비교사들의 0을 포함한 계산에 있어 미숙한 모습은 이후 이들이 학생들을 다시 교육하는 주체라는 점에서 간과해서는 안 될 것으로 보인다.

여기에서는 이러한 학생들이 스스로 오류를 극복하고 수와 수 체계를 구성해갈 수 있도록 하기 위한 몇 가지 교수학적 시사점을 제시하고 한다.

우선, 학생들은 다양한 0의 의미를 경험할 기회를 풍부하게 가져야 할 것으로 보인다. 0이 여러 가지 면을 가지고 있고 궁극적으로는 수 체계를 구성하는 주요한 요소이므로 "없다"라는 의미나 "자리 차지하기" 수준의 의미로서만 이해 되서는 안 될 것이다. 특히 저학년 때 '없다'는 의미에서 직관적으로 출발하는 것은 무리가 없어 보이나 실생활 맥락에서도 온도의 0˚C 등은 그 의미 이상임을 이해시킬 필요가 있다 하겠다. 중학교 과정에서는 음수의 도입과 더불어 0이 양수와 음수의 경계에서 기준이 되기는 하나 기준이 되는 기호로서가 아니라 수 체계의 일관성 있는 구성을 위한 "수" 임을 강조하여 지도되어야 할 것으로 보인다. 고대 수학사와 학생들의 반응에서도 보았듯이 0을 하나의 수로 인식하는 것은 쉬운 일은 아니었으나 수학교육의 궁극적 목표를 고려할 때 학생들이 수의 의미, 그리고 그 수를 대상으로 하는 연산의 의미와 결과에 대한 의문을 가지고 탐구할 기회를 충분히 제공해야 할 것으로 보인다.

둘째, 대학 이전에 수체계의 확장 학습을 계기로 수학의 구조성, 추상성, 형식성에 대한 이해를 충분히 할 수 있도록 하여야 하겠다. 이는 형식불역의 원리를 좀더 명시적으로 강조할 필요가 있음을 의미하는 것이다. 연구결과 학생들은 자연수를 넘는 대상에 대하여도 여전히 구체적이고 맥락적인 모델을 모색하는 반면 논리적이고 형식적인 대상으로 인식하지 못하고 있음을 알 수 있었다. 교실에서는 자연수에서 정수의 확장과 그 연산에서 학생들이 이해하지 못하는 부분을 직관적으로 이해시키기 위해 구체적 모델을 굳이 찾아가며 의미적으로 접근하여 이해 시켜보려는 교사들의 노력이 있는 것이 사실이다. 그러나 이러한 접근이 수 체계를 이해하고 수를 이해하는데 위험할 수 도 있음을 간과해서는 안 될 것으로 보인다. 비록 맥락적 접근을 하더라도 궁극적으로는 형식적인 원리를 도입하여 학생들이 이후 수 체계의 확장에서도 오류를 범하지 않고 이해할 수 있도록 해야 하는 것이다. 이러한 0과 관련한 형식불역의 원리의 명시적 도입은 정수나 유리수의 연산, 복소수 체계까지 확장해서 학습하는 중등교육과정에서 다루어져야 할 것으로 보인다.

셋째, 0에 관한 학생들의 오류는 학생들이 수학의 발달과 수학의 특성을 이해할 수 있는 기회를 제공하는데 사용될 수 있다. 학생들은 자신들의 오류에서 출발하여 수학의 역사를 고찰해보고 의문을 제기하는 활동을 통해 수학이라는 학문이 처음부터 완성된 형태로 존재하는 것이 아니라 끊임없이 오류와 수정을 반복하는 과정을 통해 개선되어 가는 인간 활동의 산물이라는 점을 인식할 수 있게 될 것이다. 이는 Borasi(1996)의 관점에서 볼 때 학생들의 오류가 다시 그들의 탐구의 발판이 될 수 있음을 시사하는 것이다. 학생들은 설문과제가 끝나고 이에 관한 답을 구하고 공동으로 논의하는 자리에서 자신이 그동안 가졌던 0에 대한 인식뿐만 아니라 수와 수학에 대한 자신의 이해와 생각을 반성하며 수학의 특성에 대하여 고찰할 기회였음을 언급하였다. 이것은 0처리의 오류는 수의 개념 정립의 중요한 소재 일 뿐 아니라 여러 가지 0과 관련하여 제기될 수 있는 문제에 대한 탐구의

기초가 될 수 있음을 시사하는 것이다. 그러나 한편으로는 수학이 인간 활동의 산물임을 확대 해석하여 수학이 단순한 약속이나 임의로 만들어진 것이라는 오해가 없도록 수학 발달과정과 더불어 오늘날의 형식적 접근까지 가능하도록 지도하는 것에 주의해야 하겠다.

V. 제 언

본 연구는 여러 선행연구에서 나타난 초등수준의 0에 관한 문제에서 착안하여 실제 현재 중학생들과 예비교사들의 상태를 파악하고 이에 대한 분석 및 교수학적 시사점을 찾고자 하였다. 일반 대학생에 비해 소위 영재학생들이라 불리는 학생들의 형식적인 증명의 노력을 보면서 상대적으로 안도하면서도 예비교사들의 의외에 반응에 놀라지 않을 수 없었으며 두 그룹 모두 수에 대한 개념에 대해 분명치 않음을 확인하며 교사로서 교육연구자로서 반성을 하지 않을 수 없었다. 마지막으로 본 연구의 제한 점 및 앞으로의 연구를 위한 제언을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 본 연구의 분석은 두 그룹의 반응의 서술적 결과를 중심으로 분석한 것으로, 연구의 깊이를 더하기 위해서는 보다 여러 가지 측면에서 0의 의미를 고려하여 이에 관한 과제를 구성하고 이를 심층적으로 분석하기 위한 토론이나 면담 및 다양한 분석이 필요할 것으로 생각된다. 또한 이 연구의 대상만으로 이를 일반화하여 결론을 내기는 어렵고, 보다 적극적인 논의를 위한 조사와 연구가 필요하다 하겠다. 그러나 그동안 중등 이상에서는 간과되어 왔으나 오히려 중등 수준에서 수 체계와 방정식을 확장해 가는데 있어 중요한 개념의 하나인 0의 개념 이해와 연산에 관한 연구 주제는 의미가 있을 것으로 보이고 이 연구가 그러한 필요성을 제기하기를 바란다.

둘째, 0에 관한 인식과 이것의 처리에 있어서의 학생들의 오류를 파악하는 일뿐만 아니라 이러한 오류를 기초로 하여 학생스스로 탐구할 수 있는 교재와 프로그램 개발 연구가 필요하다. 여기에 보고하여 분석하지는 못했지만 중학생 영재학생들을 대상으로 설문 후에 그들의 답을 바탕으로 한 전체토론을 전개하였다. 일종의 평가 후에 자신들의 주장에 대한 확인과 반박을 위한 학생들의 요구에 의해서였다. 0이 수인지 수가 아닌 지에서부터 시작하여 학생들의 주장과 그 근거를 서로의 의견을 들어보고 이에 대해 반례나 의문을 제기하여 반박함으로서 0뿐만 아니라 수와 수 체계, 수학이라는 것에 대한 생각을 정리할 수 있도록 의견을 공유하는 자리를 마련하였다. 물론 학생들이 어떻게 그러한 생각을 갖게 됐는지는 확인하지는 못하였지만 그들의 오류를 수정하고 생각을 나름대로 정립해갈 출발점을 열어준 것이라 생각한다. 이를 계기로 연구자로서 교육자로서 수학관을 확립할 필요성뿐만 아니라 학생들과 끊임없이 상호작용을 통해 학생 스스로 수학관을 정립해 갈 수 있는 수업방법 모색과 이를 위한 교육 자료를 마련할 필요성을 확인하였다.

끝으로 여기서는 적은 수와 중학교 영재학생 및 대학생이라는 특정 수준의 대상자만을 대상으로 하였고 그 문제 역시 아주 국소적인 부분만 다루었다. 또한 초등수준을 대상으로 한 선행연구와 그 내용과 결과에서는 크게 다르지 않았다. 그러나 그 대상을 고등학교 학생이나 다른 여러 학년으로 확대하고 그 수준에 적합한 0에 관련한 다양한 문제를 중심으로 연구를 설계하여 Rey와 Grouws(1975)의 연구에서와 같이 면담을 실시한다거나 다면적으로 자료 수집 및 분석을 하는 것도 학생들의 실태를 좀더 면밀히 파악하고 이를 개선하고자하는 교수학적 노력을 계획하는 데 의미 있을 것으로 보인다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 제 7차 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

김수미 (2004). 고대 수학자와 현대 예비교사들의 연 처리 오류 및 교수학적 시사점. 경인교육대학교 과학교육논총, **16**, pp.87-106.

김주영 · 김성숙 (2001). 영의 역사와 영에 얽힌 오류들. 한국수학사학회지, **14(1)**, pp.101-108.

나귀수 (2001). 중학교학생들의 수 개념 조사. 대한수학교육학회지 학교수학, **3(2)**, pp.267-279.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부.

장희 (2004). 영의 발달과정과 사고실험을 통한 영의 효과적인 지도방안, 울산대학교 석사학위논문.

Ball, D. L. (1999). Prospective Elementary and Secondary Teachers' Understanding of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21(2)**, pp. 132-144.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on error.* Ablex Publishing Corporation.

Boyer, C. B. (1944). Zero: The symbol, the concept, the number. *National Mathematics Magazine*, **18(8)**, pp.323-330.

Brown, J. S. & Burton, R. P. (1978). Diagnostic model for procedural bug in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, **2**. pp.155-192.

Kaplan, R. (심재관 역) (2003). 존재하는 무 0의 세계. 서울: 이끌리오.

Ouaknin, M. A. (변광배 역) (2006). 수의 신비, 서울: 살림.

Reid, C. (허민 역) (1997). 영부터 무한대까지. 서울: 경문사.

Rey, R. E. & Grouws, D. A. (1975). Division involving zero: Some revealing thoughts from interviewing children. *School Science and Mathematics*, **75**, pp. 593-605.

Suydam, M. N. & Dessart, D. J. (1976). *Classroom ideas from research on conceptional skill.* Reston, Va.: NCTM.

Wheeler, M. M. (2002). Children understanding of zero and infinity. In Chambers, D. L.(Ed.). *Putting research into practice in the elementary grades.* Reston, Va.: NCTM. pp.29-32.

Wheeler, M. M. & Feghali, I. (1983). Much ado about nothing: Preservice elementary school teachers' concept of zero. *Journal for Research in Mathematics Education* **14(3)**, pp.147-155.

Wilson, P. S. (2001). Zero: A special case. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **6(5)**, pp.300-303.

Conceptual errors related to zero by secondary school gifted students and preservice teachers

Jee Hyun Park
Seoul National University
E-mail: jeannei@chol.com

Teachers and students' knowledge of zero was investigated through data collected from 16 preservice secondary mathematics teachers and 20 gifted secondary school students. Results showed that these teachers and students had an inadequate knowledge about zero. They exhibited a reluctance to accept zero as an attribute for classification, confusion as to whether or not zero is a number, and stable patterns of computational error.

Although teachers and researchers have long recognized the value of analyzing student errors for diagnosis and remediation, students have not been encouraged to take advantage of errors as learning opportunities in mathematics instruction. The article suggests using errors as springboards for inquiry in action, discusses its potential contributions to mathematics instruction by analyzing students and preservice teachers errors related to zero.

* ZDM Classification : F43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : zero, recognition. error, gifted secondary students, preservice teachers