

<학술논문>

## 등색프린지 데이터를 이용한 인장하중 판재 중앙 균열선단 주위의 하이브리드 광탄성 응력장 해석

백 태 현<sup>†</sup>, 첸 레 이\*  
(2007년 8월 23일 접수, 2007년 10월 26일 심사완료)

### Hybrid Photoelastic Stress Analysis Around a Central Crack Tip in a Tensile Loaded Plate Using Isochromatic Data

Tae Hyun Baek and Lei Chen

**Key Words :** Stress Analysis(응력 해석), Hybrid Stress Analysis(하이브리드 응력해석), Photoelasticity(광탄성), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Complex Stress Function(복소수 응력 함수), Least Squares Method(최소자승법), Digital Image Processing(디지털 영상처리), Fringe Multiplication(프린지 증식), Fringe Sharpening(프린지 세션처리)

#### Abstract

An experimental test is presented for photoelastic stress analysis around a crack tip in tensile loaded plate. The hybrid method coupling photoelastic fringe inputs calculated by finite element method and complex variable formulations involving conformal mappings and analytical continuity is used to calculate full-field stress around the crack tip in uniaxially loaded, finite width tensile plate. In order to accurately compare calculated fringes with experimental ones, both actual and regenerated photoelastic fringe patterns are two times multiplied and sharpened by digital image processing. Regenerated fringes by hybrid method are quite comparable to actual fringes. The experimental results indicate that Mode I stress intensity factor analyzed by the hybrid method are accurate within three percent compared with ones obtained by empirical equation and finite element analysis.

#### 1. 서론

각종 구조물, 산업기계, 항공기 및 선박과 같은 운송기관 등이 과도한 운전이나 비정상적인 환경 조건에서 재료강도보다 현저히 낮은 상태에서 파괴되는 경우, 재료내부의 결함이나 균열에 기인하는 원인이 대부분이며, 특히 고강도 재료에서는

취성파괴(brittle fracture)를 일으키게 된다. 근래에 파괴역학에 대한 개념의 정립으로 응력확대계수( $K_I$  또는  $K_{II}$ )가 재료의 파괴인성치( $K_{IC}$ )보다 높은 경우 재료의 갑작스런 파괴가 일어난다는 사실이 널리 알려지기 시작하면서 이론, 수치해석 및 광탄성법을 포함한 다양한 실험 기법등의 개발을 통하여 응력집중을 포함한 응력확대계수에 대한 연구가 활발히 진행되어 왔으며, 많은 자료가 확보되어 있다.<sup>(1-3)</sup>

그러나 균열선단에 근접한 주위에서는 비선형 탄소성 변형등으로 실험적으로 응력확대계수를 측정하기가 곤란하다. 이 경우, 단면이 급격히 변화

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 군산대학교 기계공학부

E-mail : thbaek@kunsan.ac.kr

TEL : (063)469-4714 FAX : (063)469-4727

\* 군산대학교 대학원 기계공학과

되는 불연속부위나 균열선단으로부터 멀리 떨어진 위치에서 응력이나 변형률 등을 측정하여 응력함수를 이용, 하이브리드법으로 응력집중부위의 응력을 해석할 수 있다.<sup>(4-10)</sup>

광탄성법은 물리적인 현상에 의해 나타난 전응력장을 관찰할 수 있는 장점이 있으므로 널리 사용되고 있다.<sup>(1,3,8)</sup> 본연구에서는 인장하중을 받는 판재의 균열선단 주위의 응력분포를 해석하기 위하여 등각사상 맵핑(conformal mapping)을 이용한 급수형 복소수 응력함수에서 계수를 균열선단으로부터 멀리 떨어진 일직선상의 위치에서 유한요소법으로 계산한 광탄성 등색프린지(isochromatic fringe) 데이터로부터 비선형 최소사승법으로 구한 후, 응력·광법칙(stress-optic law)을 이용하여 광탄성프린지를 다시 계산하고 이들을 실제로 측정된 프린지와 정량적으로 비교·분석하였다. 광탄성 데이터를 정밀하게 비교하기 위하여 광탄성 실험으로부터 얻은 등색선 영상을 2 배로 증식(fringe multiplication)시키고 세선처리(fringe sharpening)하였다. 또한, 하이브리드법으로 계산한 응력확대계수를 유한요소 해석 및 경험식에 의한 값과 비교하여 타당성을 입증하였다. 본 연구에 사용된 재료는 등방성 재료이나 등각사상 맵핑을 이용한 응력함수는 이방성 재료에도 동일한 방법으로 적용할 수 있다.<sup>(10,11)</sup>

## 2. 이론

### 2.1 기본방정식

평면응력 상태의 직교 이방성 판재에서 주탄성축(principal directions of elasticity)에 대한 특성방정식(characteristic equation)과 평형방정식(equilibrium equations)으로부터 기하학적인 적합성(geometric compatibility)관계를 이용하여 다음과 같이 응력성분에 관한 식<sup>(4,5,11,12)</sup>으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re} \left[ \mu_1^2 \frac{\phi'(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} + \mu_2^2 \frac{\psi'(\zeta_2)}{\omega_2'(\zeta_2)} \right] \\ \sigma_y &= 2\text{Re} \left[ \frac{\phi'(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} + \frac{\psi'(\zeta_2)}{\omega_2'(\zeta_2)} \right] \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re} \left[ \mu_1 \frac{\phi'(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} + \mu_2 \frac{\psi'(\zeta_2)}{\omega_2'(\zeta_2)} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

위의 식 (1)에서  $\phi'(\zeta_1) = d\phi/d\zeta_1$ ,  $\psi'(\zeta_2) = d\psi/d\zeta_2$  이고, 그리고  $\omega_1'(\zeta_1) = d\omega/d\zeta_1$  와  $\omega_2'(\zeta_2) = d\omega/d\zeta_2$  을 의미한다. 또한 복소수 매개변수  $\mu_j (j=1,2)$  는

부록(appendix)의 식 (A1)의 직교이방성재료의 특성방정식에 관한 두 개의 근을 의미한다.

Fig. 1 과 같은 임의의 부영역(subregion)  $\Omega$  에서 응력함수  $\phi(\zeta_1)$  를 절단된 로랑급수(Laurent expansion)<sup>(3,9)</sup>로 나타내면 식 (2)와 같다.

$$\phi(\zeta_1) = \sum_{k=-m}^m \beta_k \zeta_1^k \quad (k \neq 0) \quad (2)$$

구멍의 경계  $\Gamma$  에서 표면력이 없을 경우(traction free) 하이브리드 부영역(hybrid subregion)  $\Omega$  에서  $\psi(\zeta_2)$  는 다음 식과 같다.

$$\psi(\zeta_2) = \sum_{k=-m}^m (\bar{\beta}_k B \zeta_2^k + \beta_k C \zeta_2^k) \quad (3)$$

식 (3)에서 상수  $\beta_k = b_k + ic_k$  이고,  $b_k$  와  $c_k$  는 실수(real number)이며  $m$  은 양의 정수(positive integer)이다. 또한,  $B$  와  $C$  는 특성방정식의 근에 관계되는 상수로서 부록의 식 (A2)와 같다.

한편으로, 위의 식 (1)에서  $\omega$  의 역함수(inverse), 즉  $\omega^{-1}$  는 물리적인  $z$ -평면에서  $\zeta$ -평면( $\zeta_j = \xi + i\mu_j \eta$ ,  $j=1,2$ )으로 등각사상 맵핑(conformal mapping)시킬 수 있는 함수를 뜻한다. 직교 이방성 재료에서 Fig. 1 과 같이  $\zeta$ -평면의 단위원(unit circle)이  $z$ -평면에서 균열길이가  $2a$ 이고, 경사각이  $\alpha$  (Fig. 1의 경우  $\alpha = \pi$ )인 균열선으로 맵핑되는 변환식<sup>(11)</sup>은 식 (4)와 같다.

$$\omega_j = \frac{a}{2} (\cos \alpha + \mu_j \sin \alpha) (e^{-i\alpha} \zeta_j + e^{i\alpha} \zeta_j^{-1}) \quad (4)$$

식 (4)에서  $i = \sqrt{-1}$  이다. 또한, 역함수는 다음 식과 같다.

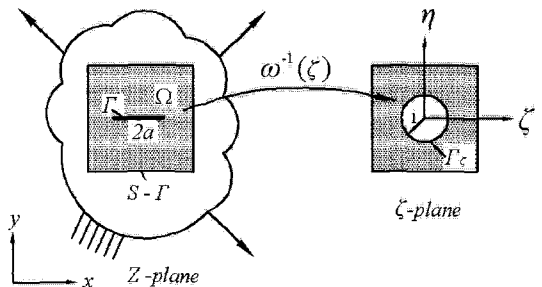


Fig. 1 Conformal mapping of a crack in the physical  $z$ -plane into a unit circle in the  $\zeta$ -plane

$$\zeta_j = \frac{e^{i\alpha} \left\{ z_j \pm \sqrt{z_j^2 - a^2 (\cos \alpha + \mu, \sin \alpha)^2} \right\}}{a(\cos \alpha + \mu, \sin \alpha)} \quad (5)$$

식 (5)에서 근호 값(square root)의 부호는  $|\zeta_j| \geq 1$  ( $j=1, 2$ )이 되도록 선택한다.

식 (2), (3) 및 식 (5)를 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음의 식 (6)과 같이 하이브리드 부영역  $\Omega$  에서 응력에 관한 식<sup>(4,5,12)</sup>을 얻을 수 있다.

$$\{\sigma\} = [V]\{\beta\} \quad (6)$$

위의 식 (6)에서  $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$  이고, 행렬  $[V]$ 는 부록의 식 (A3) 및 (A4)와 같이 정의하며,  $\{\beta\}^T = \{b_m, c_m, \dots, b_n, c_n\}$  으로서 상수행렬을 의미한다. 일단, 상수  $\{\beta\}$ 가 계산되면 하이브리드 부영역  $\Omega$  (구멍의 경계  $\Gamma$  포함)의 응력은 식 (6)을 이용하여 계산할 수 있다. 단, 식 (2), (3)에서  $k=0$  은 강제운동에 관계되는 항이므로 계산시 사용되지 않았다. 또한, 등방성 재료를 포함한 직교이방성 재료는 주탄성축에 대칭이므로 상수  $\{\beta\}$ 에서 홀수항( $m=3, 5, 7, \dots$ )만을 고려하여야 한다.<sup>(13)</sup>

2.2 응력 · 광법칙

주응력 성분중에서 한 개의 성분이 0 일 경우, 즉  $\sigma_3 = 0$  일 때는 2 차원 또는 평면응력상태가 되며 0 이 아닌 평면 주응력(in-plane principal stress) 성분은  $\sigma_1$  및  $\sigma_2$  가 된다. 광탄성의 복굴절 현상에 의한 응력 · 광법칙에 따르면 두 개의 주응력 차이 값은 광탄성의 등색선 프린지 차수(isochromatic fringe order)와 아래 식의 관계를 갖는다.<sup>(12)</sup>

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{t} \quad (7)$$

위의 식 (7)에서  $N$  은 등색프린지 차수(isochromatic fringe order),  $f_\sigma$  는 시편재료의 프린지 상수(material fringe constant),  $t$  는 시편의 두께를 의미한다. 식 (7)에 각각의 응력성분을 대입하여 다시 정리하면 다음 식과 같다.

$$\left\{ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right\}^2 + \{\tau_{xy}\}^2 = \left\{ \frac{Nf_\sigma}{2t} \right\}^2 \quad (8)$$

식 (8)의 관계로부터 각각의 좌표 위치에서 식 (1)의 응력성분은 등색프린지 차수 ( $N$ ) 로 나타나며, 반대로 광탄성 데이터로부터 등색프린지의 차수가 결정되면 식 (8)과 식 (1)을 이용하여 응력성분을 해석할 수 있다.

2.3 비선형 최소자승법

응력성분과 등색프린지 차수에 관한 식 (8)의 우변항을 좌변으로 이항하여 정리한 후,  $n$  개의 데이터로부터 다음과 같은 식을 구성할 수 있다.

$$G_n\{\beta\} = \left\{ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right\}_n^2 + \{\tau_{xy}\}_n^2 - \left\{ \frac{Nf_\sigma}{2t} \right\}_n^2 = 0 \quad (9)$$

식 (9)에서  $G_n$  은 미지의 상수  $\beta$  에 관하여 비선형이므로 테일러 급수를 이용하여 선형화시킨 후 아래의 식 (10)과 같이 반복식 (iterative systems)으로 나타낼 수 있다.<sup>(14)</sup>

$$(G_n)_{i+1} \cong (G_n)_i + \sum_{k=-m}^m \left( \frac{\partial G_n}{\partial c} \right)_i \Delta \beta_n \quad (10)$$

위의 식 (10)에서 첨자  $i$  는 반복단계를 나타내며  $(G_n)_{i+1} \cong 0$  이 될 때까지 반복계산을 하면  $n$  개의 방정식으로부터 수렴된 상수  $\beta$  를 얻을 수 있다.

3. 실험

3.1 광탄성 시편

광탄성 실험법에 의한 하이브리드 응력장 해석을 위하여 Fig. 2 와 같이 중심부에 균열이 있는 유한폭의 단일축 하중을 받는 광탄성 시편을 택하였다. 시편의 재질은 기계가공성이 우수한 폴리카보네이트 계열인 PSM-1<sup>(15)</sup>이고, 두께 ( $t$ ) 는 3.175 mm 이며, 재료의 프린지 상수( $f_\sigma$ ) 는 7005 N/m, 영탄성계수 ( $E$ ) 는 2482 MPa, 푸와송비 ( $\nu$ ) 는 0.38 이다.

균열은 머시닝센터를 이용하여 지름 0.5 mm 의 엔드밀로 잔류응력이 발생하지 않도록 충분한 양의 냉각수를 공급하면서 가공하였으며, 균열 선단은 방전가공으로 날 끝이 60° 로 제작된 공구로 자연균열 선단과 같이 예리하게 만들었다. 본 논문에서는 잔류응력이 미소하여 고려하지 않았다.

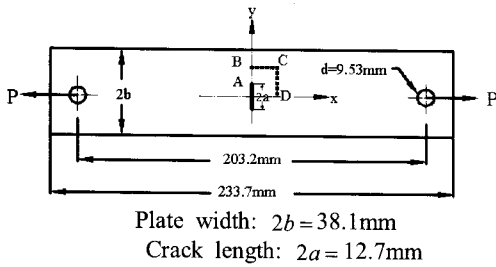
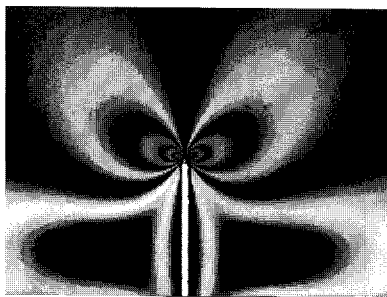


Fig. 2 Finite-width uniaxially loaded tensile plate containing a central crack



(a)



(b)

Fig. 3 (a) Original isochromatic fringes around a crack tip in the light-field setup circular polariscope. (b) Two times multiplied isochromatic fringes

### 3.2 광탄성 프린지

광탄성 실험은  $P=396\text{ N}$  (474.45 psi)의 힘을 가하였을 때 얻은 등색 프린지패턴으로부터 응력장을 해석하였다.

Fig. 3(a)는 인장하중을 받는 시험편을 명시야(light field) 배열의 원형편광기(circular polariscope) 사이에 위치시켰을 때 균열선단 주위에 나타난 등색프린지이다. Fig. 3(b)는 광탄성 등색선 프린지 증식이론에 의한 영상처리 소프트웨어<sup>(16)</sup>로 2 배로 증식시킨 프린지를 나타낸다. 프린지를 증식시키

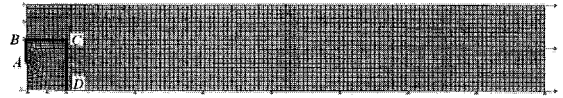


Fig. 4 ABAQUS discretization of one-quarter plate (2227 elements and 4704 nodes) of Fig. 2

기 전에 흑색과 백색프린지는  $N=0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$  등에서 반차수마다 번갈아 나타나지만, 증식시킨 후에는  $N=0, 1/4, 2/4, 3/4, 1, 5/4, 6/4, \dots$  등에서 4 분차수 간격으로 교대되어 나타난다. 즉, 2 배로 증식시킨 프린지 패턴은 육안으로 1/4 차수의 프린지를 식별할 수 있다.

### 3.3 유한요소법에 의한 등색프린지 계산

유한요소 해석은 중심부에 균열이 있는 유한폭의 단일 축하중을 받는 Fig. 2 와 동일한 형상의 모델을 취하였다. 영탄성계수와 푸아송비는 광탄성 실험에 사용된 폴리카보네이트(PSM-1)의 물성치( $E=2482\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.38$ )를 그대로 사용하였다. Fig. 2 의 시험편은 수평 및 수직축에 대하여 대칭이므로, Fig. 4 와 같이 시험편의 1/4 에 대한 부분을 유한요소 상용프로그램인 ABAQUS<sup>(17)</sup>로 해석하였다. 해석에 사용된 요소는 균열선단 주위에서 3 절점 선형 평면응력 삼각형(3-node linear plane stress triangle)요소, 그리고 다른 부분은 쌍일차 평면응력 사변형(4-node bilinear plane stress quadrilateral)요소이다. 정밀한 결과를 얻을 수 있도록 응력이 집중되는 균열선단 주위의 근방에서는 조밀한 요소로 분할하였다.

ABAQUS 에 의해 Fig. 4 에 표시된 B-C 와 C-D 선상에서 응력성분  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  및  $\tau_{xy}$  를 계산한 후, 이들 응력성분을 식 (8)에 대입하여 광탄성 등색프린지 차수  $N$  을 구하였다. 균일한 간격으로 B-C 선상에서 11 개, C-D 선상에서 12 개의 프린지 데이터가 하이브리드 해석에 이용되었다.

### 3.4 해석결과

응력성분은 Fig. 4 에 표시된 위치에서 유한요소법으로 계산한 광탄성 데이터(프린지차수 및 좌표)로부터 식 (9)의 비선형 최소자승법을 이용하여 응력함수에 관한 식 (2), (3)의 항의 수( $m$ )에 따른 계수( $\beta$ )를 계산한 후, 이들을 다시 식 (1)에 대입하여 구하였다.

해석결과와 타당성을 보일 수 있도록, 식 (1)의

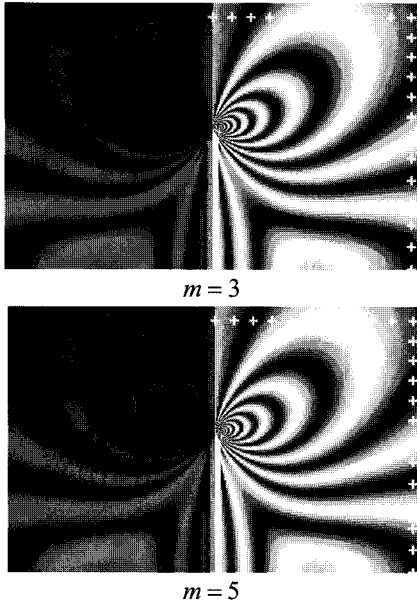


Fig. 5 Two times multiplied actual fringe pattern (left half) and reconstructed (right half) fringes for different number of terms ( $m$ ) of series type stress function

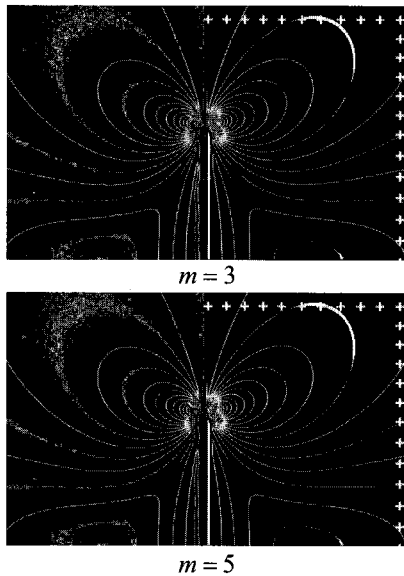


Fig. 6 Fringe-sharpened lines extracted from two times multiplied actual fringe pattern (left half) and reconstructed (right half) fringes for different number of terms ( $m$ ) of series type stress function

응력성분을 다시 식 (8)에 대입하여 계산한 광탄성프린지를 실제의 프린지와 비교하였다.

Fig. 5 의 좌측은 2 배로 증식된 실제의 프린지

Table 1 Data locations ( $x$  and  $y$ ), input and calculated fringes ( $N_{inp}$  and  $N_{cal}$ ) and percentage error

No	x(mm)	y(mm)	$N_{inp}$	$N_{cal}$	Error (100%)
1	0.000	11.405	1.655	1.645	0.617
2	0.864	11.405	1.679	1.688	-0.489
3	1.727	11.405	1.787	1.792	-0.279
4	2.591	11.405	1.912	1.908	0.169
5	3.480	11.405	1.998	2.001	-0.116
6	4.394	11.405	2.057	2.053	0.195
7	5.334	11.405	2.065	2.064	0.019
8	6.274	11.405	2.038	2.041	-0.148
9	7.214	11.405	1.993	1.994	-0.053
10	8.128	11.405	1.938	1.935	0.148
11	9.068	11.405	1.879	1.880	-0.056
12	9.068	10.516	1.879	1.879	0.011
13	9.068	9.627	1.862	1.862	-0.003
14	9.068	8.712	1.824	1.824	-0.007
15	9.068	7.823	1.761	1.761	-0.006
16	9.068	6.909	1.670	1.670	0.028
17	9.068	5.994	1.548	1.549	-0.047
18	9.068	5.004	1.398	1.397	0.025
19	9.068	4.013	1.224	1.224	0.068
20	9.068	3.023	1.042	1.042	-0.004
21	9.068	2.007	0.872	0.873	-0.105
22	9.068	1.016	0.743	0.745	-0.397
23	9.068	0.000	0.699	0.697	0.401

패턴이고, 우측은 식 (2)와 (3)의 급수형 응력함수에서 항의 수를  $m=3, 5$ 로 변화시켰을 때 구한 응력성분으로부터 계산한 프린지를 2 배로 증식시켜 나타낸 프린지 패턴이다. 또한 Fig. 6 은 Fig. 5 를 세선처리<sup>(18,19)</sup>한 프린지 패턴이다.

Fig. 5 와 Fig. 6 의 우측 가장자리에 표시된 ‘+’ 표시는 균열 선단 주위의 응력장을 계산할 수 있도록 하기 위해 FEM 에 의해 프린지 차수를 계산하여 입력된 데이터 위치를 나타낸다. Fig. 5 및 Fig. 6 에서 보인 바와 같이  $m=3, 5$ 로 변화시켰을 때, 좌측에 나타난 실제의 프린지와 응력성분으로부터 계산하여 재생성한 우측의 프린지는 서로 잘 일치하였다.

이로써, 실제의 프린지와 계산된 프린지의 정성적인 비교를 하였으나 정량적인 비교가 가능하도록 위하여 Fig. 4 의 B-C 와 C-D 선상의 입력된

**Table 2** Comparison of stress intensity factor obtained from hybrid photoelasticity, finite element analysis and empirical equation

m	SD	Stress Intensity Factor ( $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ )		
		Hybrid Photoelasticity	FEM	Equation <sup>(19)</sup>
3	0.363	1.090	1.060	1.065
5	0.317	1.091		

데이터(Fig. 5, 6 에서 ‘+’ 표시) 위치에서 아래의 식 (11)과 같이 입력된 프린지 차수( $N_{inp}$ )와 계산된 프린지 차수( $N_{cal}$ )의 퍼센트 오차( $E$ )를 계산하였다.

$$E = \frac{N_{cal} - N_{inp}}{N_{inp}} \times 100(\%) \quad (11)$$

Table 1 에서는 응력함수의 항의 수( $m$ )가 3 일 때, 데이터의 순서( $N_o$ ), 좌표( $x, y$ ), 그리고 식 (11)에 의해 입력된 프린지( $N_{mp}$ )와 계산된 프린지( $N_{cal}$ )의 퍼센트 오차를 나타내었다. Table 1 에서 보인 바와 같이 입력된 프린지차수와 계산된 프린지의 퍼센트 오차는 23 개의 데이터는 0.62 퍼센트 미만으로 서로 일치하였다.

또한, 응력함수의 항의 수( $m$ )에 따라 계산된 프린지가 실제의 프린지에 일치되는 정도의 변화를 비교하기 위하여 아래의 식 (12)와 같이 퍼센트 오차에 대한 표준편차( $SD$ : standard deviation)를 계산하였다. 식 (12)에서  $n$ 은 입력된 데이터 수를 표시한다.

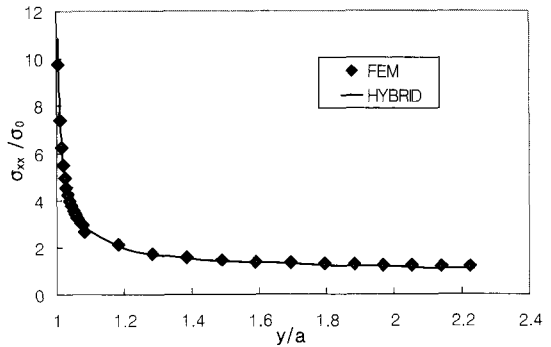
$$SD = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n E_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n E_i \right)^2 \right]} \quad (12)$$

급수형 응력함수에서 항의 수를  $m=3, 5$  로 변화시켰을 때, 표준편차( $SD$ ), 하이브리드 광탄성법(hybrid photoelasticity), FEM, 그리고 경험식<sup>(19)</sup>에 의해 계산된 응력확대계수  $K_I$ 을 Table 2 에 나타냈다.

경험식은 아래와 같은 식을 이용하였다.

$$K_I = F \sigma \sqrt{\pi a} \quad (13)$$

위의 식 (13)에서  $F$ 는 무차원의 수정계수로서 시편의 폭  $2b$ 와 균열길이  $2a$ 의 비율( $a/b$ )로



**Fig. 7** Normalized axial stress distribution from the point ‘A’ to ‘B’ of Fig. 2 ( $y$ =distance from the center of the crack tip,  $a$ =a half of the crack length)

나타낸다.<sup>(20)</sup>

$$F = \frac{1 - 0.5(a/b) + 0.326(a/b)^2}{\sqrt{1 - (a/b)}}$$

Table 2 에서 보인 바와 같이  $m=3, 5$  로 변화시켰을 때 표준편차( $SD$ )는 약간 감소되었으나  $K_I$ 은 거의 변화되지 않았으며 유한요소법과 경험식으로 계산한 값과 3% 이내로 근접하였다.

한편으로 균열선단 방향으로 연장된 선(Fig. 2 의 A-B)에서 하이브리드 광탄성법과 유한요소법으로 하중방향의 응력성분을 계산하여, 이들을 Fig. 7 에 나타냈다. 하이브리드 광탄성법과 유한요소법에 의해 계산된 수직응력은 Fig. 7 에서 보인 바와 같이 서로 잘 일치하였다.

#### 4. 결론 및 토의

본 연구에서는 균열선단 주위의 응력장을 균열 선단으로부터 떨어진 거리에서 유한요소법에 의해 계산된 등색프린지 차수와 급수형 등각사상 맵핑 함수를 이용하여 해석하였다. 해석된 광탄성 응력장을 실제의 광탄성프린지와 비교하였다. 정성적인 비교가 용이하도록 디지털 영상처리에 의해 등색프린지 패턴을 2 배로 증식시키고, 증식된 프린지를 다시 세선처리하여 서로 비교하였다. 정량적인 분석을 위하여 각각의 광탄성 측정 데이터와 계산된 프린지에 대한 퍼센트 오차를 계산하였으며, 급수형 응력함수의 항의 수에 따른 퍼센트 오차에 대한 표준편차를 비교하였다.

본 연구로부터 얻은 결론을 요약하면 다음과 같

다.

(1) 광탄성 실험에 의한 실제의 프린지와 하이브리드 응력장 해석에 의하여 계산된 프린지를 비교하였으며, 입력된 데이터의 위치에서 정성적이고 또한 정량적인 비교가 가능하도록 하였다. 입력된 프린지차수와 계산된 프린지의 퍼센트오차는 23 개의 데이터는 0.62 퍼센트 미만으로 서로 일치하였다.

(2) 응력함수의 항의 수를  $m=3, 5$  로 변화시켰을 때 표준편차( $SD$ )는 다소 감소되었으나  $K_I$  은 거의 변화되지 않았으며 유한요소법과 경험식으로 계산한 값과 3% 이내로 근접하였다.

본 연구에서는 균열선단으로부터 떨어진 거리의 일직선상에서 유한요소법에 의해 계산된 프린지차수를 입력데이터로 사용하여 균열선단 주위의 응력장을 계산하였다. 광탄성프린지 위상이동법을 이용하면 일직선상의 프린지분포를 용이하게 측정할 수 있으므로 실제의 실험데이터를 이용하여도 균열선단 주위의 응력장 해석이 가능할 것으로 사료된다.<sup>(21,22)</sup> 또한 본 연구에 사용된 급수형 등각 사상 응력함수는 등방성 재료를 포함한 이방성 복합재에 대해서도 적용될 수 있으며, 하중방향에 수직인 균열뿐만 아니라 경사균열과 원형, 타원형 구멍주위의 응력장 해석에서도 편리하게 사용될 수 있다.

### 참고문헌

- (1) Smith, C. W. and Kobayashi, A. S., 1993, "Experimental Fracture Mechanics" in *Handbook on Experimental Mechanic*, edited by A. S. Kobayashi, VCH Publishers, Inc.
- (2) Murakami, Y., 1987, *Stress Intensity Factors, Vol. I & II*, Pergamon Books Ltd.
- (3) Shin, K. B., Kyung, W. M., Kim, C. G., Hong, C. S. and Park, H. Y., 1996, "Stress Analysis of Fir-Tree Root in Turbine Rotor Using Photoelastic Technique," *Transactions of the Korean Society for Mechanical Engineers (A)*, Vol. 20, No. 6, pp. 1784-1797.
- (4) Gerhardt, G. D., 1984, "A Hybrid/Finite Element Approach for Stress Analysis of Notched Anisotropic Materials," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 804-810.
- (5) Rhee, J., He, S., and Rowlands, R. E., 1996, "Hybrid Moire-Numerical Stress Analysis Around Cutouts in Loaded Composites," *Experimental Mechanics*, Vol. 36, No. 4, pp. 379-387.
- (6) Baek, T. H. and Rowlands, R. E., 1999, "Experimental Determination of Stress Concentrations in Orthotropic Composites," *Journal of Strain Analysis*, Vol. 34, No. 2, pp. 69-81.
- (7) Baek, T. H. and Rowlands, R. E., 2001, "Hybrid Stress Analysis of Perforated Composites using Strain Gages," *Experimental Mechanics*, Vol. 41, No. 2, pp. 194-202.
- (8) Hawong, J. S., Lin, C. H., Lin, S. T., Rhee, J., and Rowlands, R. E., 1995, "A Hybrid Method to Determine Stresses in Orthotropic Composite using only Isochromatic Data," *Journal of Composite Materials*, Vol. 29, No. 9, pp. 2366-2387.
- (9) Baek, T. H., Kim, M. S., Rhee, J. and Rowlands, R. E., 2000, "Hybrid Stress Analysis of Perforated Tensile Plates using Multiplied and Sharpened Photoelastic Data and Complex-Variable Techniques," *JSME International Journal, Series A: Solid Mechanics and Material Engineering*, Vol. 43, No. 4, pp. 327-333.
- (10) Baek, T. H., 2006, "Photoelastic Stress Analysis by Use of Hybrid Technique and Fringe Phase Shifting Method," *Journal of Experimental Mechanics*, University of Science and Technology of China, Vol. 21, No. 1, pp. 87-95.
- (11) Savin, G. N., 1961, *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press, New York, USA.
- (12) Rhee, J., 1995, *Geometric Discontinuities in Orthotropic Composites*, Ph. D Dissertation, Department of Engineering mechanics and Astronautics, University of Wisconsin-Madison, USA.
- (13) Dally, J. W. and Riley, W. F., 1991, *Experimental Stress Analysis*, 3<sup>rd</sup> ed., McGraw-Hill, New York, USA.
- (14) Sanford, R. J., 1980, "Application of the Least Squares Method to the Photoelastic Analysis," *Experimental Mechanics*, Vol. 20, No. 6, pp. 192-197.
- (15) Photoelastic Division, Measurement Group, Inc., Raleigh, NC 27611, USA.
- (16) Baek, T. H. and Lee, J. C., 1994, "Development of Image Processing Technique for Photoelastic Fringe Analysis," *Transactions of the Korean Society for Mechanical Engineers*, Vol. 18, No. 10, pp. 2577-2584.
- (17) *ABAQUS Analysis User's Manual*, 2003, ABAQUS Inc., Providence, RI 02909, USA.
- (18) Baek, T. H., 1993, "Digital Image Processing Technique for Photoelastic Isochromatic Fringe Sharpening," *Journal of the Korean Society for Precision Engineering*, Vol. 10, No. 3, pp. 220-230.
- (19) Baek, T. H. and Burger, C. P., 1991, "Accuracy Improvement Technique for Measuring Stress Intensity Factor in Photoelastic Experiment," *KSME International Journal*, Vol. 5, No. 1, pp. 22-27.
- (20) Anderson, T. L. 1995, *Fracture Mechanics Fundamentals and Applications*, 2nd ed. CRC Press Inc., pp. 53-64.
- (21) Baek, T. H., Koh, S. K. and Park, T. G., 2006, "An Improved Hybrid Full-field Stress Analysis of Circularly Perforated Plate by Photoelasticity and Finite Element Analysis," *Key Engineering Materials*, Vols. 326-328, pp. 1209-1212.
- (22) Baek, T. H., Panganiban, H. and Chung, T. J., 2007,

“A Hybrid Photoelastic Stress Analysis Around Holes in Tensile-Loaded Plates Using Isochromatic Data and Finite Element Method,” *Lecture Series on Computer and Computational Sciences*, Brill Academic Publishers, Vol. 8, pp. 21~25.

부 록

$$S_{11}\mu^4 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 + S_{22} = 0 \tag{A1}$$

$$B = \frac{(\overline{\mu_2} - \overline{\mu_1})}{(\mu_2 - \mu_1)}, \quad C = \frac{(\overline{\mu_2} - \mu_1)}{(\mu_2 - \mu_1)} \tag{A2}$$

위의 식 (A1)에서  $S_{ij}(i, j=1, 2, 6)$  는 일반적인 후크의 법칙(generalized Hook's law)에 관한 식으로 부터 탄성 컴플라이언스(elastic compliance)를 의미한다. 또한, 식 (A1)과 (A2)에서  $\mu_{ij}(i, j=1, 2)$  는 재료특성에 관계되는 복소수 매개변수(complex

material parameter)로서 식 (A1)의 근을 의미하며, 다른 2 개의 근과  $\mu_3 = \overline{\mu_1}$  및  $\mu_4 = \overline{\mu_2}$  의 관계를 갖고, 여기서 ‘—’표시는 공액복소수를 의미한다.

$$V(n, j) = (-1)^{n-1}(2k) \left[ \operatorname{Re} \left\{ (\mu_1^{n-1}) \frac{\zeta_1^{k-1}}{\omega_1(\zeta_1)} + (\mu_2^{n-1}) \frac{-B\zeta_2^{-k-1} + C\zeta_2^{k-1}}{\omega_2(\zeta_2)} \right\} \right] \tag{A3}$$

$$V(n, j+1) = (-1)^{n-1}(2k) \left[ \operatorname{Im} \left\{ (-\mu_1^{n-1}) \frac{\zeta_1^{k-1}}{\omega_1(\zeta_1)} + (\mu_2^{n-1}) \frac{-B\zeta_2^{-k-1} - C\zeta_2^{k-1}}{\omega_2(\zeta_2)} \right\} \right] \tag{A4}$$

식 (A3) 및 (A4) 에서  $n=1(\sigma_y), 2(\tau_{xy}), 2(\sigma_x)$  이고,  $k > 0$  인 경우  $j=2(k+m)+1, k \neq 0$  이며,  $k < 0$  일 경우는  $j=2(k+m)-1$  이다.