

리프팅 기법을 이용한 리플 제거 멀티레이트 제어기 설계

Ripple Free Multirate Controller Design Using Lifting Technique

정 동 슬, 정 정 주*, 조 규 남
(Dong-Seul Jeong, Chung Choo Chung, and Kyu Nam Cho)

Abstract : This paper presents ripple-free method that can occur in multirate controller design. The conventional multirate input controller has the problem that the ripple occurs in track-following because of chattering phenomenon in control input signal. In order to resolve the problem of rippling, it was proposed to eliminate the ripple phenomenon using feedforward compensator. This paper makes explains problems in conventional ripple-free multirate controller and introduces a multirate controller design method applying lifting technique based on current estimators in condition space. Using the ripple-free multirate controller, we show that chattering does not occur in the control input signal through applying the final value theorem from the viewpoint of discrete-time transformation. Also, this study proves that the ripple of the proposed controller decreases with the increase of this sampling frequency and, when sampling frequency is fixed, it decreases with the increase of the control input period.

Keywords : multirate, ripple-free, lifting technique, design controller

1. 서론

멀티레이트 제어기는 제어 입력주기보다 빠른 측정 샘플링 주기를 갖는 멀티레이트 출력제어기와 샘플링 주기보다 빠른 제어 입력주기를 갖는 멀티레이트 입력 제어기로 양분되어 많은 연구가 진행되어 왔다[1-6,8,9].

멀티레이트 입력제어기는 상태공간에서 interpolated state matching하는 방법[6], Z-변환 전달 함수 형태로 제어기를 설계하는 방법[2] 그리고 연속시간(continuous-time) 제어기를 설계한 후 이산시간(discrete-time) 제어기로 변환하는 equivalent transformation 방법으로[3,4] 크게 세가지 설계 방식이 제안되어 왔다.

멀티레이트 입력 제어기는 HDD(Hard Disk Driver)와 같이 위치오차신호(PES: Position Error Signal) 측정에 제한이 있거나 출력 측정 샘플링 주기를 임의로 빠르게 하는데 한계가 있는 시스템에 적용되어 왔다[5,6,8,9]. 이 방법은 제어신호를 부드럽게 만들 수 있어서 고주파 영역의 플랜트 공진모드의 여기를 피할 수 있다. 또한 시스템 페루프의 극점과 영점을 재배치 하여 과도응답 개선과 안정도 여유 그리고 외란 제거 기능을 향상함으로써 제어성능을 개선시킬 수 있음을 보였다[1]. 멀티레이트 입력 제어기는 싱글레이트 제어기가 낮은 샘플레이트로 안정화시키지 못하는 경우에도 안정화시킬 수 있다는 장점이 있다[2]. 그러나 제어입력 신호에 리플이 발생하는 단점을 갖고 있다[1]. 또한 [2]에서는 연속시간 제어기를 이산시간에서 동등한 구조로 멀티레이트 입력제어기를 구현하는 방법도 있으나 이 경우 내부샘플링의 리플에 대한 분석이 되어 있지 않다. 이런 내부샘플링(intersampling) 문제점을 해결하기 위하여 제어입력 신호에 대한 최종치 정리를 적용

하여 내부샘플링에 해당하는 각각의 제어신호들이 영으로 수렴하는 조건으로부터 피드포워드 보상기와 피드백 보상기를 설계하는 방법이 제시되었다[3]. 그러나 이 방법은 플랜트에 최소한 한 개 이상의 직분기가 존재해야만 적용이 가능하다. 즉 리플을 제거하기 위해 정상상태 제어 입력이 영으로 수렴한 피드포워드 보상기와 피드백 보상기를 설계하였기 때문에 정상상태 제어 입력이 영이 아닌 일정한 상수값으로 수렴해야 하는 Type 0인 플랜트에는 이 방법을 적용할 수 없다[4]. [4]에서는 최종치 정리를 이용하여 내부 샘플링에 해당하는 각각의 제어값들이 일정한 값으로 수렴하는 조건으로부터 피드포워드 보상기와 피드백 보상기를 설계하는 방법을 제시하였다. 그러나 이 방법은 제어기의 차수가 특정조건을 만족시켜야만 시스템의 극점과 제로점을 임의로 배치시킬 수 있다. 또한 설계된 제어기의 복잡한 구조로 인해 제어 연산시간 증가를 가져온다. 한편, 제어기 구조를 간단히 구현하기 위하여 상태공간에서 현재 추정기를 사용한 멀티레이트 상태 피드백 제어기 설계방법이 제시되기도 하였다[6]. 그러나 이 논문에서는 리플의 양에 대한 분석이 되어 있지 않다.

본 논문에서는 [6]에서 제시된 상태공간에서 현재 추정기를 사용한 멀티레이트 상태 피드백 제어기 설계방법을 Transfer function을 사용한 제어기 설계방법과 비교하여 리플 제거 조건에 관점에서 분석한다. 이 방법은 극점배치 방법으로 제어기를 설계함으로써 각각의 내부샘플링(intersampling)에 대하여 state matching을 projection mapping으로 부터 주기적으로 변하는 제어이득이 결정된다. 이로부터 주기적으로 변하는 피드포워드 이득을 리프팅 방법을 사용하여 연산하는 방법을 제시하고, 이 방법을 통해 Type 0 플랜트의 경우에도 리플을 줄일 수 있음을 보인다. 또한 제안된 제어기의 리플이 샘플링 주파수의 증가에 따라 감소하고 고정된 샘플링 주파수에 대하여 제어입력 주기가 증가함에 따라 감소함을 확인한다. 또한[3,4]에서처럼 제어기설계에 제한적이 아니다.

본 논문 구성은 2장에서 기존 멀티레이트 입력 제어기 구조와 리프트된 멀티레이트(lifted multirate) 제어기 구조를 설명한다. 3장에서는 추종기를 이용한 멀티레이트 제어기를

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2005. 6. 14., 채택확정 : 2007. 9. 30.

정동슬 : (주)이노칩테크놀로지 부설연구소(dsjeong@ihanyang.ac.kr)

정정주 : 한양대학교 전기제어생체공학부(cchung@hanyang.ac.kr)

조규남 : 삼성종합기술원(dkk0424@yahoo.co.kr)

※ 본 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2004-041-D00252).

설계하여 기존 리플제어 제어기와 비교 설명한다. 4장에서는 간단한 시스템 예제를 이용하여 제안된 방법의 유용성을 보이고 마지막으로 5장에서 결론을 맺는다.

II. 멀티레이트 제어기 구조

본 절에서는 멀티레이트 입력제어기를 상태공간에서 설계하는 기존의 기법과 리프팅 기법을 이용하여 상태공간에서 설계하는 방법에 대하여 간략히 소개한다 [2,5,6].

1. 기존의 멀티레이트 입력 제어기 구조

다음과 같은 SISO 선형 연속 시불변 시스템을 고려 하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x(t) \in R^n; y(t) \in R^1; u(t) \in R^1$ 는 각각 상태변수, 출력 변수 그리고 입력이다. 이 때 (1)의 멀티레이트 입력 이산시간 플랜트 모델은 (2)와 같이 구할 수 있다. 그림 1에 기존 멀티레이트 제어기 구조가 묘사되어 있다. 여기서 각각 S_{T_s} 는 샘플러, H_{T_s} 는 zero order holder(zoh), K 는 피드백 게인 그리고 \bar{N} 는 피드포워드 게인을 나타낸다.

$$\begin{aligned} x(k, i + 1) &= \Phi_c x(k, i) + \Gamma_c u(k, i), \\ y(k, i) &= C_c x(k, i) \\ (\text{for } i &= 0, 1, \dots, R_u - 1). \end{aligned} \tag{2}$$

이때 Φ_c, Γ_c , 그리고 C_c 는 아래와 같이 정의된다.

$$\Phi_c = e^{AT_s}, \Gamma_c = \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\eta)} B d\eta, C_c = C.$$

그리고 T_s 는 출력 측정 샘플링 주기 이고, $T_c = T_s / R_u$ 는 제어 입력 갱신주기로서 제어입력 신호가 출력 측정주기 보다 빠른 주기이다. 여기서 $R_u \in N$ 는 제어입력주기와 샘플링 주기의 자연수 비율을 나타낸다. (2)로부터 (3)의 현재 추정기 모델을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{x}(k, i + 1) &= \Phi_c \hat{x}(k, i) + \Gamma_c u(k, i), \\ \hat{x}(k, i) &= \bar{x}(k, i) + L_c (y(k, 0) - \bar{y}(k, 0)), \\ y(k, 0) &= C_c \bar{x}(k, 0), \\ u(k, i) &= -K_c \hat{x}(k, i) + \bar{N} r(k, i) \\ (\text{for } i &= 0, 1, 2, \dots, R_u - 1). \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $\bar{x}(k, i)$ 는 예측 추정 상태변수(prediction estimator state), $\hat{x}(k, i)$ 는 현재추정 상태변수(current estimator state), L_c 는 현재 추정기 이득이며 제어 입력 신호는 기준 입력신호를 고려한 (3)으로 표현된다. 이때 K_c 는 제어 이득, \bar{N} 는 기준입력을

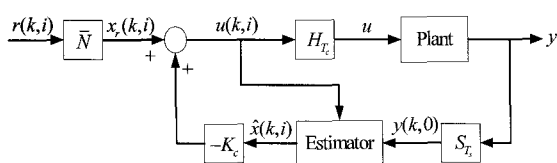


그림 1. 기존 멀티레이트제어기 구조. Fig. 1. Block diagram of conventional multirate control system.

고려할 때 정상상태 오차를 줄이는데 사용되는 피드 포워드 이득 이다. 기존 멀티레이트 제어기는 (3)에서 보이는 바와 같이 내부샘플링시 상태들을 매번 업데이트시켜서 연산시간의 증가를 가져온다. 이 문제를 해결하기 위해 제시된 구조의 멀티레이트 제어기를 다음절에서 설명한다[6].

2. 리프팅기법을 사용한 멀티레이트 입력 제어기 설계

멀티레이트 입력제어기는 리프팅 연산자 $L_{T_c} : l_{T_c}^p \rightarrow l_{T_s}^p, 1 \leq p \leq \infty$ 를 이용하여 느린 샘플링 주기에 맞게 제어기 입력력을 표현하면 싱글레이트처럼 표현이 가능하다[6]. 따라서 (3)의 제어입력을 리프트하여 (4)와 같이 표현할 수 있다. 그림 2에 리프트된 멀티레이트 입력 제어기 구조가 묘사되어 있다. 여기서 L_{T_c} 는 리프팅 연산자, \bar{K} 리프팅된 피드백 게인 그리고 \bar{N} 는 리프팅된 피드포워드 게인을 나타낸다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(k, 0) &= L_{T_c} u(k, i) \\ (\text{for } i &= 0, 1, \dots, R_u - 1). \end{aligned} \tag{4}$$

그리고 실제 플랜트에 가해지는 제어입력은 역리프트 연산자 $L_{T_c}^{-1}$ 를 통하여 빠른 주기로 입력된다.

$$u(k, i) = L_{T_c}^{-1} \bar{u}(k, 0).$$

결국 리프트된 플랜트 모델은 (5)와 같이 다시 전개되어 표현이 된다.

$$\begin{aligned} x(k + 1, 0) &= \tilde{\Phi} x(k, 0) + \tilde{\Gamma} \bar{u}(k, 0), \\ y(k, 0) &= \tilde{C} x(k, 0), \\ \bar{u}(k, 0) &= \begin{bmatrix} u(k, 0) \\ u(k, 1) \\ \vdots \\ u(k, R_u - 1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

여기서

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \Phi_c^{R_u}, \\ \tilde{\Gamma} &= [\Phi_c^{R_u-1} \Gamma_c : \Phi_c^{R_u-2} \Gamma_c : \dots : \Gamma_c], \\ \tilde{C} &= C_c. \end{aligned}$$

이다.

여기서 우리는 다음과 같은 가정을 한다.

Assumption 1: 리프팅된 이산시간 시스템(5)에서 $\tilde{\Gamma}$ 과 \tilde{C} 의 각각 유사역행렬 $\tilde{\Gamma}^+, \tilde{C}^+$ 이 존재한다.

Assumption 2: $(I - \tilde{\Phi})$ 가 invertible 하다.

가정 1에서 유사 역행렬(pseudo inverse matrix) 존재조건은 $\tilde{\Gamma}$ 와 \tilde{C} 는 풀 랭크(full rank)를 갖는다. 가정 2는 플랜트가 원

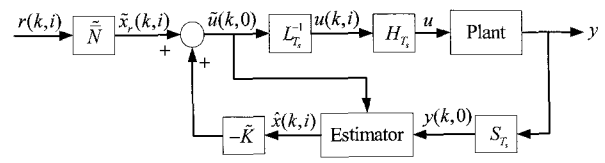


그림 2. 리프트된 멀티레이트 입력 제어기구조. Fig. 2. Multirate sampled-data control system.

점에 pole을 갖지 않을 조건이다.

(5)로 표현된 플랜트 모델로부터 리프트된 현재 추정기의 모델 (6)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1,0) &= \tilde{\Phi}\hat{x}(k,0) + \tilde{\Gamma}\tilde{u}(k,0), \\ \hat{x}(k,0) &= \bar{x}(k,0) + \tilde{L}(y(k,0) - \bar{y}(k,0)). \end{aligned} \quad (6)$$

리프트된 제어 입력 신호에 다음과 같이 기준입력 신호를 포함시켜 다시 표현할 수 있다.

$$\tilde{u}(k,0) = -\tilde{K}\hat{x}(k,0) + \tilde{N}r(k,0). \quad (7)$$

III. 리플이 제거된 멀티레이트 제어기

1. 멀티레이트 입력 제어기 설계

멀티레이트 입력 제어기의 설계 방식에서는 빠른 샘플링 주기 모델 (Φ_c, Γ_c, C_c) 로부터 (8)에서 사용되는 제어 이득, K_c 를 구한 다음에 리프트된 \tilde{K} 을 얻을 수 있다[6].

$$\begin{aligned} u(k,i) &= -K_c\hat{x}(k,i) = K_c(x(k,i) - \hat{e}(k,i)), \\ x(k,i+1) &= (\Phi_c - \Gamma_c K_c)x(k,i) - \Gamma_c K_c \hat{e}(k,i) \\ (\text{for } i &= 0, 1, \dots, R_u - 1). \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 추정오차 $\hat{e}(k,i)$ 는 $x(k,i) - \hat{x}(k,i)$ 로 정의되며 실제 상태변수와 현재 추정기의 상태 변수의 차이이다. (Φ_c, C_c) 가 관측가능하다면(observable) 추정오차가 영으로 수렴하게 L_c 를 설계할 수 있다. 본 논문에서는 극배치 법을 이용하여 L_c 를 결정하였다. 결국 느린 샘플링 주기에 해당하는 부분 $(k+1,0)$ 와 $(k,0)$ 에서는 연산을 간략하기 위해 기준입력 $r(k) = 0$ 이라고 가정하면 (9)와 같이 표현된다.

$$x(k+1,0) = (\Phi_c - \Gamma_c K_c)^{R_u} x(k,0). \quad (9)$$

리프트된 멀티레이트 입력 제어기 구조에서 레귤레이터 제어 입력신호는 (8)과 같이 $\hat{x}(k,0)$ 을 사용하여 설계되므로 (10)과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(k,0) &= -\tilde{K}\hat{x}(k,0) \\ &= -\tilde{K}(x(k,0) - \hat{e}(k,0)). \end{aligned} \quad (10)$$

최종적으로 (3)의 플랜트는 (7)의 제어입력을 사용함으로써 (11)로 간략히 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} x(k+1,0) &= (\tilde{\Phi} - \tilde{\Gamma}\tilde{K})x(k,0) - \tilde{\Gamma}\tilde{K}\hat{e}(k,0) \\ &= (\tilde{\Phi} - \tilde{\Gamma}\tilde{K})x(k,0). \end{aligned} \quad (11)$$

결국, 제어이득 \tilde{K} 는 (9), (11)로부터 두 식이 등가이므로 다음과 같은 관계식이 성립되게 된다.

$$\tilde{K} = (\tilde{\Gamma})^+ (\tilde{\Phi} - (\Phi_c - \Gamma_c K_c)^{R_u}) \quad (12)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{R_u-1} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

여기서 $(\tilde{\Gamma})^+$ 는 $\tilde{\Gamma}$ 의 pseudo inverse 이다. 위의 결과식으로부터

터 제어이득 K_c 는 고정되어 있는 반면에 제어 이득 \tilde{K} 는 주기적으로 변하는 값이 됨을 알 수 있다.

다음은 기준 입력 신호를 고려 했을 때 추종 응답의 정상 상태에서 오차를 소거시키는 피드 포워드 이득 \tilde{N} 을 결정하는 방법에 관하여 설명한다. 느린 샘플링주기의 플랜트 (Φ_s, Γ_s, C_s) 로부터 N_x, N_u 를 구한 다음에 \tilde{N} 을 결정할 수 있다. 기준입력을 리프트된 제어입력에 포함시켜 표기하면 (14)와 같이 표현할 수 있고 (7)의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(k,0) &= -\tilde{K}(\hat{x}(k,0) - x_r(k,0)) + \tilde{N}_u r(k,0) \\ &= -\tilde{K}(\hat{x}(k,0) - N_x r(k,0)) + \tilde{N}_u r(k,0) \\ &= -\tilde{K}\hat{x}(k,0) + \tilde{N}r(k,0). \end{aligned} \quad (14)$$

따라서 우리는 리프트된 플랜트와 리프트된 제어입력으로부터 single rate경우와 유사하게 N_x, \tilde{N}_u 를 결정할 수 있다[7].

$$\tilde{N} = \tilde{K}N_x + \tilde{N}_u = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{R_u-1} \end{bmatrix} \cdot N_x + \begin{bmatrix} N_{u,0} \\ N_{u,1} \\ \vdots \\ N_{u,R_u-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_{R_u-1} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

여기서 $r(k,0)$ 가 step input 이므로 다음식이 성립한다.

$$N_{u,0} = N_{u,1} = \dots = N_{u,R_u-1} = N_u.$$

\tilde{K} 는 projection으로 구해지기 때문에 결국 \tilde{N} 도 Nonconstant (periodic) gain으로 주기적으로 변하는 피드포워드 이득임을 알 수 있다.

2. 제안된 제어기의 현재 추정기 이득 설계

(3)을 예측 추정 상태변수(prediction estimator state)로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{x}(k,i+1) &= \Phi_c \bar{x}(k,i) + \Gamma_c u(k,i) \\ &\quad + \Phi_c \Gamma_c (y(k,0) - \bar{y}(k,0)). \end{aligned} \quad (16)$$

이 식을 느린 샘플링 주기 (T_s) 로 표현하면 (17)로 표현 된다.

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1,0) &= \tilde{\Phi}\bar{x}(k,0) + \tilde{\Gamma}\tilde{u}(k,0) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{R_u} (\Phi_c^j L_c)(y(k,0) - \bar{y}(k,0)). \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 (6)을 아래와 같이 표현할 수 있으며

$$\bar{x}(k+1,0) = \tilde{\Phi}\bar{x}(k,0) + \tilde{\Gamma}\tilde{u}(k,0) + \tilde{\Phi}\tilde{L}(y(k,0) - \bar{y}(k,0)).$$

위식과 (17)로부터 우리는 리프트된 현재 추종기의 이득 \tilde{L} 를 L_c 로부터 구할 수 있다[6].

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}\tilde{L} &= \sum_{j=1}^{R_u} (\Phi_c^j L_c), \\ \tilde{L} &= (\tilde{\Phi})^{-1} \sum_{j=1}^{R_u} (\Phi_c^j L_c). \end{aligned} \quad (18)$$

3. 기존의 리플 제거 멀티레이드 입력 제어기와 비교

그림 3의 구조는 상태공간에서 리프트 된 그림 2에 있는

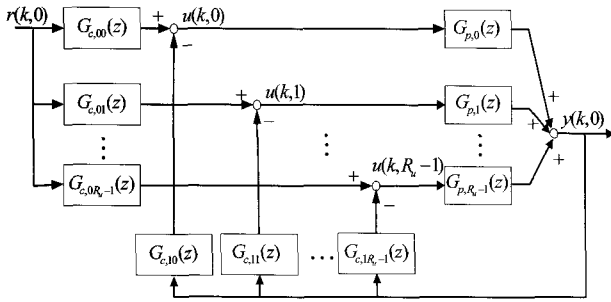


그림 3. 멀티레이트 입력 이산전달함수 구조.
Fig. 3. Block diagram of the multirate control system.

멀티레이트 입력 제어기 구조를 이산 전달함수 구조로 바꾼 블록 다이어그램이다[3].

(5)를 Z-변환시켜 (19)와 같이 리프트된 플랜트에 대한 이산 전달함수를 구할 수 있다.

$$Y(z) = [\tilde{C}(zI - \tilde{\Phi})^{-1}\tilde{\Gamma}] \cdot \tilde{U}(z) = \tilde{G}_p(z) \cdot \tilde{U}(z). \quad (19)$$

이때 플랜트의 이산 전달함수는 그림 3에서 보여진 것처럼 아래와 같이 열 벡터 형태를 갖는다.

$$\tilde{G}_p(z) = [G_{p,0}(z), G_{p,1}(z), \dots, G_{p,R_s-1}(z)].$$

그림 2의 상태공간 구조에서 제어기는 제어이득 \tilde{K} 와 현재 추정기를 포함한 것으로 이산 전달함수를 구하면 그림 3 과 같이 피드백 및 피드포워드 보상기의 구조로 변환 시킬 수 있다. 여기서는 제한된 제어기의 리플제거 성능을 확인하기 위해 정상상태 제어입력이 일정한 상수 값으로 수렴하는지를 확인한다. (6)과 (7)을 다시 정리하면

$$\hat{x}(k,0) = \bar{x}(k,0) - \tilde{L}\tilde{C}\bar{x}(k,0) + \tilde{L}y(k,0) = (I - \tilde{L}\tilde{C})\bar{x}(k,0) + \tilde{L}y(k,0). \quad (20)$$

이고, (6)에서 제어입력 (7) $\tilde{u}(k,0)$ 를 대입하여 $\bar{x}(k+1,0)$ 를 다시 정리하면

$$\bar{x}(k+1,0) = \tilde{\Phi}\hat{x}(k,0) + \tilde{\Gamma}(-\tilde{K}\hat{x}(k,0) + \tilde{N}r(k,0)) = (\tilde{\Phi} - \tilde{\Gamma}\tilde{K})\hat{x}(k,0) + \tilde{\Gamma}\tilde{N}r(k,0). \quad (21)$$

로 표현할 수 있어서 (20)을 (21)에 대입하면

$$\bar{x}(k+1,0) = \tilde{\Phi}_L\bar{x}(k,0) + \tilde{\Gamma}_L y(k,0) + \tilde{\Gamma}\tilde{N}r(k,0), \quad (22)$$

와 같이 쓸 수 있다. 단, 여기서

$$\tilde{\Phi}_L = (\tilde{\Phi} - \tilde{\Gamma}\tilde{K})(I - \tilde{L}\tilde{C}), \quad \tilde{\Gamma}_L = (\tilde{\Phi} - \tilde{\Gamma}\tilde{K})\tilde{L}$$

(22)를 Z-변환하면

$$\bar{X}(z) = (zI - \tilde{\Phi}_L)^{-1}\tilde{\Gamma}_L Y(z) + (zI - \tilde{\Phi}_L)^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{N}R(z) \quad (23)$$

와 같이 되며 여기서 (20)을 다시 Z-변환하면

$$\hat{X}(z) = (I - \tilde{L}\tilde{C})\bar{X}(z) + \tilde{L}Y(z) \quad (24)$$

이다. (23)을 (24)에 대입하면

$$\hat{X}(z) = (I - \tilde{L}\tilde{C})(zI - \tilde{\Phi}_L)^{-1}\tilde{\Gamma}_L Y(z) + (I - \tilde{L}\tilde{C})(zI - \tilde{\Phi}_L)^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{N}R(z) + \tilde{L}Y(z),$$

이고 (14)에서

$$\begin{aligned} \tilde{U}(z) &= -\tilde{K}\hat{X}(z) + \tilde{N}R(z) \\ &= -\tilde{K}(I - \tilde{L}\tilde{C})(zI - \tilde{\Phi}_L)^{-1}\tilde{\Gamma}_L Y(z) \\ &\quad - \tilde{K}(I - \tilde{L}\tilde{C})(zI - \tilde{\Phi}_L)^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{N}R(z) - \tilde{K}\tilde{L}Y(z) + \tilde{N}R(z) \\ &= (C_{c,1}[zI - A_{c,1}]^{-1}B_{c,1} + D_{c,1})Y(z) \\ &\quad + (C_{c,0}[zI - A_{c,0}]^{-1}B_{c,0} + D_{c,0})R(z) \\ &= \tilde{G}_{c,0}(z)R(z) + \tilde{G}_{c,1}(z)Y(z), \end{aligned} \quad (25)$$

단, 여기서

$$\begin{aligned} A_{c,0} &= A_{c,1} = (\tilde{\Phi} - \tilde{\Gamma}\tilde{K})(I - \tilde{L}\tilde{C}), \\ B_{c,1} &= (\tilde{\Phi} - \tilde{\Gamma}\tilde{K})\tilde{L}, \quad B_{c,0} = \tilde{\Gamma}\tilde{N}, \\ C_{c,0} &= C_{c,1} = -\tilde{K}(I - \tilde{L}\tilde{C}), \\ D_{c,1} &= -\tilde{K}\tilde{L}, \quad D_{c,0} = \tilde{N} \end{aligned}$$

이고 피드포워드 ($\tilde{G}_{c,0}(z)$) 보상기와 피드백 ($\tilde{G}_{c,1}(z)$) 보상기를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{G}_{c,0}(z) = \begin{bmatrix} G_{c,00}(z) \\ G_{c,01}(z) \\ \vdots \\ G_{c,0R_s-1}(z) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{c,1}(z) = \begin{bmatrix} G_{c,10}(z) \\ G_{c,11}(z) \\ \vdots \\ G_{c,1R_s-1}(z) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

(19), (25), (26)으로 부터 페루프 전달함수를 구하면

$$\begin{aligned} Y(z) &= \tilde{G}_p(z)\tilde{U}(z) \\ &= \tilde{G}_p(z) \cdot [\tilde{G}_{c,0}(z)R(z) - \tilde{G}_{c,1}(z)Y(z)] \\ &= \tilde{G}_p(z)\tilde{G}_{c,0}(z)R(z) - \tilde{G}_p(z)\tilde{G}_{c,1}(z)Y(z). \end{aligned}$$

와 같이 되고 따라서 기준 입력신호에 대한 페루프 시스템의 응답은 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{\tilde{G}_p(z)\tilde{G}_{c,0}(z)}{1 + \tilde{G}_p(z)\tilde{G}_{c,1}(z)} R(z) \\ &= \frac{G_{p,0}(z)G_{c,00}(z) + \dots + G_{p,R_s-1}(z)G_{c,0R_s-1}(z)}{1 + [G_{p,0}(z)G_{c,10}(z) + \dots + G_{p,R_s-1}(z)G_{c,1R_s-1}(z)]} R(z). \end{aligned}$$

\tilde{K} 와 \tilde{L} 는 state matching으로 lifting technique을 사용하여 구하였다. 즉 본 논문에서 제한한 제어기를 기존 리플제거 제어기와 유사하게 피드포워드와 피드백 제어기의 형태로 표현할 수 있다.

R(z)는 step input으로 최종값을 살펴보면, (5)에서 내부 샘플링에 해당하는 제어 입력 신호가 정상상태에서 일정 상수값 (constant : c_0)으로 수렴하게 될 때 출력응답에 리플이 발생하지 않는다. 즉, [4]에서와 유사하게 다음과 같은 matching condition조건을 만족하도록 제어기를 설계하면 된다.

$$\tilde{G}_{c,0}(z) \Big|_{z=1} - \tilde{G}_{c,1}(z) \Big|_{z=1} = (\tilde{G}_p(z) \Big|_{z=1})^+,$$

여기서 (19)에 의해서

$$(\tilde{G}_p(z)|_{z=1})^+ = (\tilde{C}(I - \tilde{\Phi})^{-1}\tilde{\Gamma})^+ \quad (27)$$

이다. 지금부터 제안된 제어기가 기존 리플제거 제어기의 조건을 만족하는지 확인한다. 제안된 멀티레이트 제어기의 정상상태 제어입력을 구하기 위해 (5)를 정상상태 함수로 표현하면

$$x(\infty) = \tilde{\Phi}x(\infty) + \tilde{\Gamma}\tilde{u}(\infty) \quad (28)$$

이다. 또한, 정상상태에서는 모든 차수의 시스템에서 아래 식이 성립한다[7]. 그림 2 참조.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\infty) &= \tilde{N}_u r(\infty), \\ N_x r(\infty) &= x_r(\infty) = x(\infty), \\ \tilde{C}x(\infty) &= y(\infty) = r(\infty) \end{aligned}$$

여기서

$$\tilde{C}N_x r(\infty) = r(\infty)$$

이 만족되도록

$$N_x = (\tilde{C})^+ \quad (29)$$

가 설계 된다. (29)를 (28)에 대입하게 되면

$$\begin{aligned} (\tilde{\Phi} - I)x(\infty) + \tilde{\Gamma}\tilde{u}(\infty) &= 0 \\ \therefore (\tilde{\Phi} - I)N_x r(\infty) + \tilde{\Gamma}\tilde{N}_u r(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

이 되고 여기서 임의의 $r(\infty)$ 에 대하여 (30)는 등가적으로 성립되어야 함으로

$$(\tilde{\Phi} - I)\tilde{C}^+ + \tilde{\Gamma}\tilde{N}_u = 0$$

을 만족하면 된다. 여기서 \tilde{N}_u 다음 조건을 만족하는 것을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{N}_u &= (\tilde{C}(I - \tilde{\Phi})^{-1}\tilde{\Gamma})^+ \\ &= (\tilde{G}_p(z)|_{z=1})^+. \end{aligned}$$

따라서 제안된 멀티레이트 제어기의 정상상태 제어입력은

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\infty) &= -\tilde{K}\hat{x}(\infty) + \tilde{N}r(\infty) \\ &= -\tilde{K}(\hat{x}(\infty) - x_r(\infty)) + \tilde{N}_u r(\infty). \end{aligned} \quad (31)$$

이때 정상상태에서 $\hat{x}(\infty) = x_r(\infty)$ 가 됨으로 (29), (30), (31)로부터

$$\tilde{u}(\infty) = \tilde{N}_u r(\infty). \quad (32)$$

이 된다. 일반적으로 이산시간 시스템의 경우에는 이 가정이 성립하지 않으나 여기서는 가정 2가 성립한다고 가정하였기 때문에 연속시간 플랜트를 이산화한 경우는 만족한다.

그러나 제안된 리프팅 제어기의 정상상태 제어입력이 (27)과 같이 리프팅된 플랜트모델의 inverse를 만족하더라도 내부 샘플링시 제어입력값이 일정 상수값(constant: c_0)으로 수렴하는지 확인할 수 없다. 따라서 (33)과 같이 추가적인 조건을 만족하여야 리플이 제거됨을 보일 수 있다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}(k, 0) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\tilde{U}(z) = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_0 \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

제안된 멀티레이트 제어기의 정상상태 제어입력이 (33)을 만족하는지 확인한다. 여기서 플랜트가 type 0라고 가정하였기 A의 역행렬이 존재하고 이산화된 플랜트는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi_c &= e^{AT_c} \\ \Gamma_c &= \int_0^{T_c} e^{At} dt B = A^{-1}(e^{AT_c} - I)B \end{aligned} \quad (34)$$

e^{AT_c} 를 Taylor급수전개하면

$$e^{AT_c} = I + AT_c + \frac{A^2 T_c^2}{2!} + \dots \quad (35)$$

으로 나타낼 수 있다. (35)를 리프팅된 플랜트 모델에 적용하여 다시 표현하면

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \Phi_c^{R_u} = e^{R_u A T_c} = I + R_u A T_c + \frac{R_u^2 A^2 T_c^2}{2!} \dots, \\ \tilde{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \Phi_c^{R_u-1} \Gamma_c & \dots & \Gamma_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I + (R_u - 1)AT_c + \frac{(R_u - 1)^2 A^2 T_c^2}{2!} \dots)(BT_c) & \dots & (BT_c) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I + R_u AT_c - AT_c + \frac{(R_u - 1)^2 A^2 T_c^2}{2!} \dots)(BT_c) & \dots & (BT_c) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} BT_c + R_u ABT_c^2 - ABT_c^2 + \frac{(R_u - 1)^2 A^2 BT_c^3}{2!} \dots & \dots & (BT_c) \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= C_c. \end{aligned} \quad (36)$$

이 된다.

리프팅 제어기 정상상태 제어입력은 (36)을 (32)에 대입하면

$$\begin{aligned} \tilde{N}_u &= (\tilde{C}(I - \tilde{\Phi})^{-1}\tilde{\Gamma})^+ \\ &= (\tilde{C}(I - \tilde{\Phi})^{-1}[\Phi_c^{R_u-1}\Gamma_c \dots \Gamma_c])^+ \\ &= (\tilde{C}(I - \tilde{\Phi})^{-1}[BT_c + R_u ABT_c^2 - ABT_c^2 \dots \dots BT_c])^+ \end{aligned} \quad (37)$$

이다. (37)에서의 2차 이상에 고차항에 값을 $O(T_c^2)$ 표현할 경우 (38)로 표현되며 샘플링주기가 아주 작은 경우라면 (38)에서 2차 이상의 고차항을 무시할 수 있다. 그 결과 \tilde{N}_u 내부 값은 c_0 값으로 수렴함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{N}_u &= (\tilde{C}(I - \tilde{\Phi})^{-1}[BT_c \dots BT_c \dots \dots BT_c] + O(T_c^2))^+ \\ &\approx \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

4. \tilde{N}_u 를 ZOH(Zero Order Hold)로 계산하여 구할 때 오차에 관한 분석

제안된 제어기의 정상상태 제어입력의 리플 제거 유효성

은 (37)의 \tilde{N}_u 에 row값의 차를 구함으로써 검증할 수 있다. 제안된 제어기의 리플양(ripple: η)은 정상상태 제어입력의 최대값 $\max[\tilde{N}_u] = \max_{0 \leq i \leq R_u-1} [N_{u,i}]$ 와 최소값 $\min[\tilde{N}_u] = \min_{0 \leq i \leq R_u-1} [N_{u,i}]$ 값의 차로 아래 식과 같이

$$\begin{aligned} \eta &= \left| \max[\tilde{N}_u] - \min[\tilde{N}_u] \right| \\ &= \left| \max[(\tilde{\Gamma})^+(I - \tilde{\Phi})(\tilde{C})^+] - \min[(\tilde{\Gamma})^+(I - \tilde{\Phi})(\tilde{C})^+] \right| \\ &\approx R_u T_c \left\{ \max[(\tilde{\Gamma})^+(-A)(\tilde{C})^+] - \min[(\tilde{\Gamma})^+(-A)(\tilde{C})^+] \right\} \quad (39) \\ &= \frac{T_s}{T_c} \left| \max[\hat{\Gamma}^+(-A)(\tilde{C})^+] - \min[\hat{\Gamma}^+(-A)(\tilde{C})^+] \right| \end{aligned}$$

정의할 수 있다. 단 여기서

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &= [B + R_u A B T_c - A B T_c : \dots : B] \\ &= [B : \dots : B] + O(T_c) \end{aligned}$$

이다. η 는 T_s 를 작게 설정할 경우 영으로 함을 확인할 수 있다. 그러나 T_c 를 짧게 설정할 경우 $\hat{\Gamma}$ 의 요소들도 일정한 값으로 수렴하기 때문에 η 는 초기에는 크게 증가하다가 일정한 값으로 수렴함을 알 수 있다. 구체적인 수치적 예는 IV 절에서 보인다.

본 논문에서 제안된 제어기의 정상상태 입력은 기존 멀티레이트 리플제거 제어기와 동일하게 리플이 제거 됨을 (32) 과 (38)을 통해 확인하였다. 그리고 제안된 멀티레이트 제어기는 (9), (10), (11)과 (12)로부터 주기적인 제어 이득을 프로젝션을 이용한 상태일치로 결정하므로 내부샘플링시 상태들의 갱신을 하지 않는다. 즉 기존 제어기보다 줄어든 계산량으로 인하여 멀티레이트 비율을 높이는 것이 비교적 용이하다.

IV. Numerical examples

리프트팅 기법을 이용한 멀티레이트 제어기 설계 시 제어 입력 신호가 (34) 조건을 만족하여 리플이 제거됨을 시뮬레이션과 수치적으로 확인한다. 본 예에서 고려하는 연속시간 플랜트모델은 다음과 같다.

$$G_p = \frac{8.407 \times 10^8}{s^2 + 722s + 2.088 \times 10^6}$$

$R_u = 2$, 출력 측정 샘플링주기(T_s)는 12KHz, 제어 갱신주기(T_c)는 24KHz인 조건에서 (2)의 기존 멀티레이트 플랜트 모델($\Phi_c, \Gamma_c, C_c, D_c$)로 빠른 주기에 해당하는 제어 이득 K_c 를 극점배치 방법으로 구한다. (5)로부터 리프트된 멀티레이트 플랜트 모델 ($\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}, \tilde{C}, \tilde{D}$)을 구하고, 제어이득 \tilde{K} , 현재 추정기 이득 \tilde{L} 과 피드포워드 이득 \tilde{N} 는 각각 (12), (15), (18)을 이용하여 구한다. (19)와 (25)를 이용하여 리프트된 플랜트 모델 $\tilde{G}_p(z)$, 피드 포워드에 해당하는 보상기 $\tilde{G}_{c,0}(z)$ 그리고 피드백에 해당하는 보상기 $\tilde{G}_{c,1}(z)$ 의 이산 전달함수를 구하면 다음과 같다. 그림 4는 $R_u = 2$ 이산전달함수의 멀티레이트 제어

기를 묘사한다.

$$\begin{aligned} \tilde{G}_p(z) &= \begin{bmatrix} \frac{2.136z + 0.693}{z^2 - 1.928z + 0.942} \\ \frac{0.722z + 2.107}{z^2 - 1.928z + 0.942} \end{bmatrix}^T, \\ \tilde{G}_{c,0}(z) &= \begin{bmatrix} \frac{0.234z^2 - 0.212z + 0.074}{z^2 - 0.118z + 3.339 \times 10^{-5}} \\ \frac{0.069z^2 + 0.029z + 0.001}{z^2 - 0.118z + 3.339 \times 10^{-5}} \end{bmatrix}, \\ \tilde{G}_{c,1}(z) &= \begin{bmatrix} \frac{-0.216z^2 + 0.122z + 1.855 \times 10^{-17}}{z^2 - 0.118z + 3.339 \times 10^{-5}} \\ \frac{0.040z^2 + 0.001z + 7.472 \times 10^{-20}}{z^2 - 0.118z + 3.339 \times 10^{-5}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(39)의 η 는 샘플링 주파수가 ($1/T_s$) 높을 수록 영으로 수렴하며 제어입력 주파수가 ($1/T_c$) 높을 수록 증가함을 그림 5와 그림 6에 결과로 확인하였다.

또한 그림 7에서 리프트된 두 제어신호가 ($R_u = 2$) 정상상태에 동일한 값이 됨을 확인할 수 있으며 그 결과 그림 8에 제어신호는 리플에 발생되지 않는다. 제어신호에 리플이 발생되지 않으므로 그림 9에 스텝응답에 채터링 또한 발생되지 않는다.

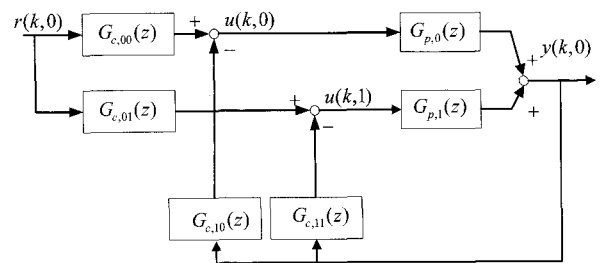


그림 4. $R_u = 2$ 일 때 멀티레이트 이산전달함수 구조.
Fig. 4. Block diagram of the multirate control system ($R_u = 2$).

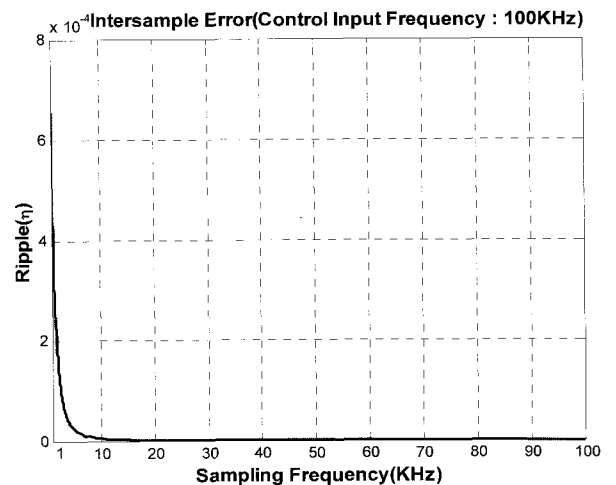


그림 5. 샘플링 주파수와 intersample error에 관계.
Fig. 5. Sampling frequency vs. intersample error.

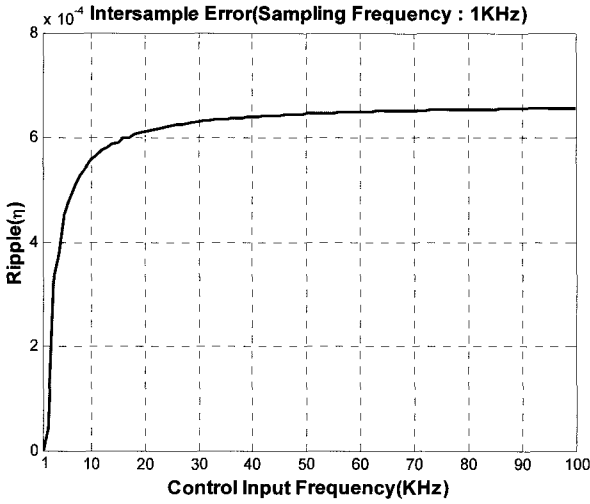


그림 6. 제어입력 주기에 따른 intersample error.
Fig. 6. Control input frequency vs. intersample error.

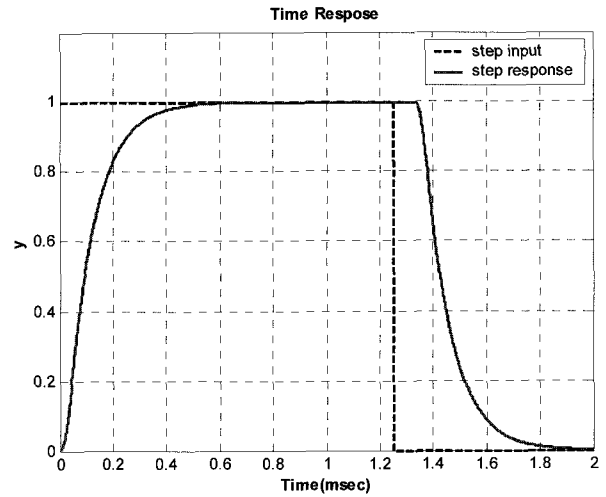


그림 9. 제안된 멀티레이트 스텝응답.
Fig. 9. System output of the new multirate control design.

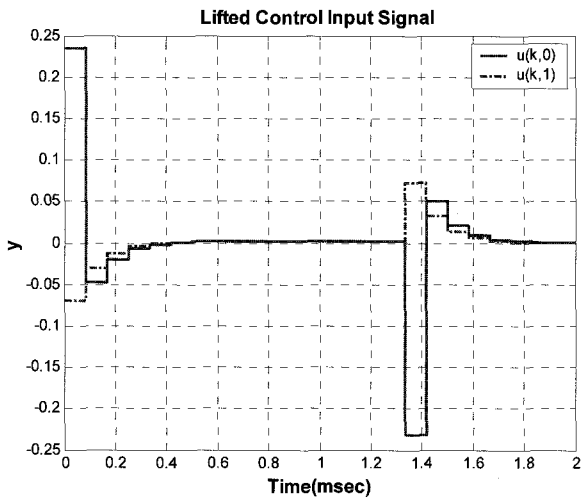


그림 7. 리프트된 제어입력 신호.
Fig. 7. Lifted control input.

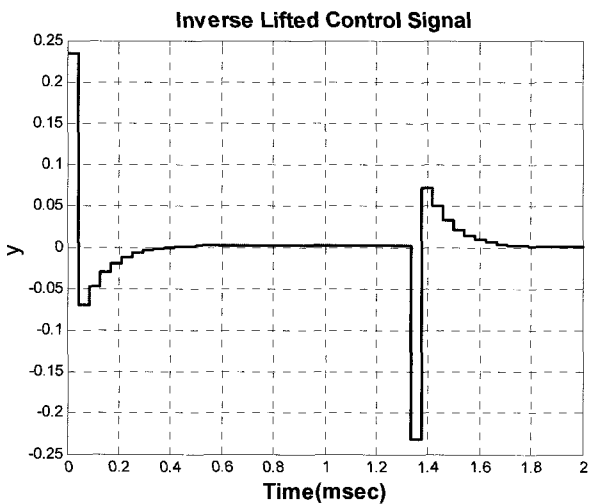


그림 8. 제안된 멀티레이트 제어기 입력신호.
Fig. 8. Control inputs in the new multirate control.

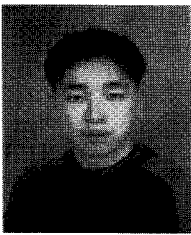
V. 결론

본 논문에서는 리프팅 기법을 이용하여 상태 공간에서 현재 추종기를 기반으로 한 멀티레이트 입력제어기 설계를 소개하였다. 제안된 제어기를 사용함으로써 기존 멀티레이트 제어기의 성능을 그대로 유지하며 제어입력 신호에 리플이 발생하지 않음을 증명하였다. 또한 제안된 제어기에서의 피드포워드는 상태피드백 이득으로 표현되어 기존의 리플 제거 멀티레이트 제어기설계법과 비교하여 간단하게 설계할 수 있음을 보였다. 그리고 상태공간에서의 리프팅 기법을 이용한 멀티레이트 입력제어기의 리플은 샘플링 주파수와 제어입력주기에 연관이 있음을 확인하였다.

참고문헌

- [1] K. L. Moore, S. P. Bhattacharyya, and M. Dahelh, "Capabilites and limitations of multirate control schemes," *Automatica*, vol. 29, no. 4, pp. 941-951, 1993.
- [2] J. Tomero, Y. Gu, and M. Tomizuka, "Analysis of multirate discrete equivalent of continuous controller," in *Pro. Amer. Control Conf.*, pp. 2759-2763, 1999.
- [3] R. Chen, G. Guo, and T. S. Low, "An intersample ripple free multirate servo controller for disk drive actuators," *Pro. 25th Annu. Conf. IECON*, vol. 3, San Jose, CA, pp. 1171-1176, 1999.
- [4] Q. W. Jia, K. K. Ooi, and D. W. Wu, "Multirate control of an HDD servo system with intersample ripple free," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 38, no. 5, pp. 2192-2194, 2002.
- [5] T. Hara and M. Tomizuka, "Multirate controller for hard disk drive with redesign of state estimator," in *Proc. Amer. Control Conf.* pp. 3033-3037, 1998.
- [6] S. H. Lee, C. C. Chung, and S. M. Suh, "Multirate digital control for high track density magnetic disk drives," *IEEE Trans. Magnetics*. vol. 39, no. 2, pp. 832-837, 2003.
- [7] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, Reading, MA, Addison Wesley, 1990.
- [8] W. W. Chiang, "Multirate state-space digital controller for sector servo system," *IEEE Conference on decision control*, pp. 1902-1907, 1990.

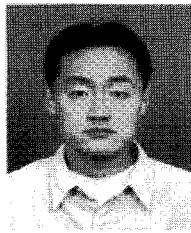
- [9] S. H. Lee, Y.-H. Kim, and C. C. Chung, "Multirate digital control system design in," *Proc. Amer. Control Conf.*, pp. 1861-1866, 2002.
- [10] G. M. Kranc, "Input-output analysis of multirate feedback systems," *IRE Transaction on automatic control*, pp. 21-28, 1956.
- [11] H. C. Hwang, C. C. Chung, and S.-H. Lee, "Design of a multirate controller and its application to galvanometer servo systems," in *Proc. Amer. Control Conf.*, pp. 564-569, 2001.
- [12] C. C. Chung, S.-H. Lee, D. S. Jeong, and H. B. Shim, "Multirate output feedback control and its application to galvanometer servo systems," in *Proc. Amer. Control Conf.*, pp. 4663-4668, 2003.
- [13] J. C. D McEachen and D. Meyer, "Tradeoffs for multirate controller design and exact comparisons with singlerate control," *IEEE Control Systems*, pp. 30-35, 1991.
- [14] D. GMeyer, "A parameterization of stabilizing controller for multirate sampled-data systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 35, no. 2, pp. 233-236, 1990.
- [15] J. B. Burl, *Linear Optimal Control*, Reading, MA, Addison Wesley, 1999.
- [16] J. Tomero, Y. Gu, and M.Tomizuka, "Analysis of multi-rate discrete equivalent of continuous controller," in *Proc. Amer. Control Conf.*, pp. 2759-2763, 1999.



정 동 술

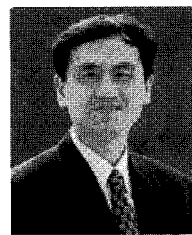
1977년 7월 20일생. 1998년 원광대 전자공학과(공학사). 2000년 전북대 의용생체공학과 대학원 졸업(공학석사). 2000년~현재 한양대학교 전자통신전파공학과(박사과정). 2006년~현재 (주)이노칩테크놀로지 부설연구소 선임연구원. 관심

분야는 멀티레이트제어, 광디스크 드라이브, 센서시스템 설계, 바이오시스템 설계.



조 규 남

1977년 4월 24일생. 2003년 한양대학교 전자전기 공학부 졸업(공학사). 2005년 동 대학원 전자통신전파 공학과 졸업(공학석사). 2005년~현재 삼성전자 스토리지 사업부 Servo그룹 연구원. 관심분야는 HDD Servo/Optimal Control.



정 정 주

1958년 9월 5일생. 1981년 서울대학교 전기공학과 졸업(공학사). 1983년 동 대학원 졸업(공학석사). 1983년~1985년 LG 전자 중앙연구소 주임연구원. 1985년~1987년 한국 IBM 국제 구매 사무서 구매 및 품질보증 엔지니어. 1993년

University of Southern California 졸업(Ph.D.). 1993년~1994년 미국 콜로라도 주립대 연구원. 1994년~1997년 삼성종합기술원 정밀기계 연구실 수석 연구원(팀장). 2005년 8월~2006년 8월 미국 버클리대 방문연구자. 1997년~현재 한양대학교 전기제어생체공학부 교수. 관심분야는 Nonlinear control theory, robotic system, vehicle dynamics control, biological control and data storage systems including hard disk drives, optical disk drives, holographic data storage system and SPM based storage system, Lithography, exposure system.