

## 초등 교사의 수학과 교수법적 내용 지식 정립을 위한 교수·학습 자료 개발<sup>1)</sup>

방정숙<sup>2)</sup> · 김상화<sup>3)</sup>

최근의 수학교육 개혁은 교육과정의 개발이나 평가의 변화에 국한하지 않고, 교사의 학습이나 전문성 신장을 위한 다각적인 노력을 기울이고 있다. 이와 관련하여 가장 저변에 깔려 있는 요소 중의 하나는 가르치는 내용과 방법을 망라한 교수법적 내용 지식(Pedagogical Content Knowledge [PCK])이라고 할 수 있다. 본 연구는 초등 교사의 PCK 정립을 위해서 수학과 내용 전반에 걸쳐서 핵심적인 학습 주제를 선정하여 종합적이고 체계적인 교수·학습 자료를 개발한 것이다. 본 논문에서는 이 중에서 비와 비율 주제와 관련하여 수학 내용에 대한 지식, 교수법에 대한 지식, 학생들의 수학적 이해 및 학습에 대한 지식, 교육과정 및 교과용 도서 분석, 교과서 재구성 및 적용으로 나누어 개발된 사례를 제시하였다.

주요용어 : 교수법적 내용 지식, 교사 학습, 초등수학교육, 교수·학습 자료

### I. 연구 개관

현행 수학과 교육과정은 무엇보다 학습자의 능력과 개인차를 최대한 고려하여 학생 개인의 수준에 부합하는 차별화된 교육을 추구하려고 노력하고 있다. 이를 토대로 학생들이 다양한 문제를 합리적으로 해결하고 논리적으로 사고하며, 수학적으로 의사소통하고 표현하는 수학 수업을 지향하고 있다. 이와 같은 수학 교실을 구현하기 위해서 가장 중요한 것 중의 하나는 교사의 역할이다. 왜냐하면, 교사가 일방적으로 수학 수업을 설계하고 이를 그대로 적용하기보다는 의미충실한 과제와 사려 깊은 수업 계획을 바탕으로 다양한 교실 상황에서 학생들의 수학적 아이디어를 적절하게 이끌어 내면서 학생들과 함께 수학의 교수·학습 과정을 만들어 나가야 하기 때문이다.

이와 같은 관점에서 최근의 수학교육 개혁은 교육과정의 개발이나 평가의 변화에만 국한하지 않고, 교사의 학습 또는 전문성 신장을 위한 다각적인 노력을 기울이고 있다. 이와 관련한 연구에서 공통적으로 그리고 가장 저변에 깔려있는 요소 중의 하나는 가르치는 데 필요한 전문적 지식이다. 이 지식에는 일반적인 교수법 지식과 특정 교과목 지식을 포함하여

1) 이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2005-030-B0004005).

2) 한국교원대학교 (jeongsuk@knue.ac.kr)

3) 용인상하초등학교 (exit90@dreamwiz.com)

여러 가지를 생각해 볼 수 있겠으나, 가장 중요한 지식은 가르치는 내용과 방법을 망라한 교수법적 내용 지식(pedagogical content knowledge [PCK])이라고 할 수 있다(Shulman, 1986). PCK는 다른 사람이 이해할 수 있도록 해당 교과목을 가르치는 방법에 대한 지식인데, 이는 보다 구체적으로 해당 교과를 가르치기 위해 필요한 전반적인 관점, 특정한 학습 주제를 가르치기 위한 교수적 전략과 표상에 대한 지식, 해당 교과에 대한 학생들의 이해·사고·학습에 대한 지식, 교육과정과 교수·학습 자료에 대한 지식으로 나뉘볼 수 있다(Grossman, 1990; Marks, 1990).

한편, 최근에는 기존의 PCK에 수업 상황이나 교실 환경에 대한 고려까지 포함하기도 하고, 학습자들이 이해할 수 있도록 교과를 표현하고 구성하는 방식에 관한 지식, 학습하는 학생의 사전 개념이나 오개념을 다루기 위한 전략 등을 보다 강조하기도 한다(Geddis & Wood, 1997; Li, 2001). 즉, PCK는 교사 개인이 이해한 정적인 수준의 지식을 넘어서서 아는 것을 효과적으로 표현할 줄 아는 능력이며, 교실 상황을 고려하여 학습자에 대한 이해뿐만 아니라 학습하는 과정에서 이루어지는 제반 요소들에 대한 지식까지 포함한다.

그동안 수학 교육과 관련하여 PCK의 중요성은 여러 수준에서 강조되어 왔다. 예를 들어, Ma(1999)는 받아내림이 필요한 뺄셈이나 분수의 나눗셈과 같이 초등수학교육의 핵심적인 주제에 대해서 미국과 중국 교사를 대상으로 그 기본 개념이나 의미 및 가르치는 전략 등을 면밀하게 비교 분석하면서 교사의 기초수학에 대한 깊은 이해(profound understanding of fundamental mathematics)가 얼마나 중요한지 역설하였다. 보다 최근에, Hill, Rowan, Ball (2005)은 초등학교 1학년과 3학년 학생들을 대상으로 교사가 수학을 가르치기 위해서 필요한 지식은 학생들의 수학 성취도와 통계적으로 유의미한 관계가 있음을 밝히면서 학생들의 수학 성취도를 향상하기 위해서는 교사의 수학 지식을 향상시킬 것을 주장하였다. 이는 교사의 PCK가 수학 교과에 있어서 교사의 신념과 교수법에 근본적인 변화를 일으키며 학생들의 학업성취도와 관련된다는 이전의 연구 결과들을(예, Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs, & Empson, 1996) 실증적으로 뒷받침해 준 것이라고 볼 수 있다.

PCK의 개념이 소개된 이후로 여러 가지 관련된 연구가 진행되었음에도 불구하고, PCK의 일부 요소만을 개별적으로 분석한 다소 단편적이거나 산발적인 연구가 많다. 또한 주된 연구 영역을 살펴보면, 범자연수의 사칙연산이나 분수의 곱셈 및 나눗셈에 관한 연구가 주를 이룬다(예, 김민경, 2003; 박교식·송상헌·임재훈, 2004; 오영열, 2004; 이종욱, 2003; Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001; Tirosh, 2000). 이와 같은 연구 경향은 특정 수학 학습 주제에 대해서 상세한 지식을 교사에게 제공할 수 있다는 장점이 있다. 하지만, 현행 수학과 교육과정이 국민공통기본 교육과정으로 초등학교 수준에서도 6대 내용 영역<sup>4)</sup> 모두를 지도해야 한다는 점을 고려해볼 때, PCK와 관련한 연구 주제를 보다 확장시킬 필요가 있다.

물론 제7차 교육과정이 시행된 이후로, 상당히 많은 교수·학습 자료가 개발되고 보급되어 온 것이 사실이다. 하지만, 대부분의 자료는 학생들을 위한 것이지 교사 학습이나 교사 교육에 직접적으로 관련된 것은 아니다. 또한 예비교사를 위한 초등수학교육론이나 방법론 강좌, 또는 현직교사를 위한 다양한 연수 프로그램의 내용을 살펴보면, 대부분 이론과 실체가 분리되어 있어서 교사가 직접적으로 이 두 영역을 연계하여 새로운 지식을 창출하기가 어렵고, 이마저 다소 피상적으로 제시되어 있는 경우가 많아서 구체적으로 교실 현장과 접목하는 것

4) 초·중등학교 교육과정 부분 수정 고시에 따르면(교육인적자원부, 2006), 초등학교의 내용 영역은 5대 영역(수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제해결)으로 변경되었다

이 쉽지 않다. 사실 많은 현직 교사들은 교사양성 프로그램과 관련하여 교육이론과 지도방법을 실제와 접목시켜 학습에 적용할 수 있도록 배우는 과정, 또는 해당 교과목을 가르치는 데 필요한 지식을 심도 있고 체계적으로 배우는 과정이 중요하다고 주장한다(송경현, 2003).

이에, 본 연구는 초등학교 수학의 주요 학습 주제에 대해서 예비교사나 현직교사가 PCK를 정립하는 데 도움을 줄 수 있는 교수·학습 자료를 개발하는 데 주된 목적이 있다. 특히 기존의 연구 경향에 반하여 수학과와 6대 내용 영역을 망라하여 주요한 학습 주제를 모두 다룸으로써, 그동안 PCK 연구에서 다소 소홀히 취급되었던 주제를 포함한다. 또한 각각의 학습 주제에 대해서 PCK의 일부 요소에만 초점을 두는 것이 아니라 전체 요소에 대한 정보를 종합적이면서 체계적으로 제공함으로써 초등학교 교사가 풍부한 지식을 바탕으로 궁극적으로 바람직한 수학 수업을 구현하는 데 기여하고자 한다.

## II. 연구 내용 및 방법

### 1. PCK의 의미와 요소

수학과와 PCK는 교사가 학생들에게 수학을 가르치기 위해서 필요한 제반 지식을 망라하는 것으로, 수학 내용에 대한 지식, 수학 수업 전략 및 교수 방법에 대한 지식, 학생들의 수학적 이해 및 학습에 대한 지식, 수학과 교육과정 및 교수·학습 자료에 대한 지식 등을 포함한다. 본 연구에서는 PCK에 대해서 최근에 부각되는 동적인 의미를 반영하고, 본 연구의 현장적용 가능성을 보다 높이기 위해서 수업 재구성 및 현장 적용 등의 내용을 첨가하여 다음과 같이 학습주제별로 전체 5가지 범주로 구별하여 정리하였다.

- 수학 내용에 대한 지식
- 교수법에 대한 지식
- 학생들의 수학적 이해 및 학습에 대한 지식
- 교육과정 및 교과용 도서 분석
- 교과서 재구성 및 적용

한편, 교실에서 교사가 수학을 가르치는 과정 중 PCK가 적용된다는 점을 고려해보면, 위의 범주는 낱낱이 개별적으로 독립되어 있다기보다는 서로 긴밀하게 연관되어 있다고 보는 것이 보다 타당하다. 따라서 본 연구에서는 PCK의 주요 범주간의 상호 연결성과 중복 가능성을 인정하면서도, 예비·현직교사를 대상으로 한 체계적인 자료 제공이라는 본 연구의 목적상 구분하여 결과를 제시하였다.

### 2. 수학과 내용 영역별 주요 학습 주제의 도출

본 연구는 초등교사의 수학과 PCK 정립을 위한 교수·학습 자료를 개발하는 것이므로, 우선 초등학교 수학에서 다루는 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수, 각각의 영역에 대해서 핵심이 되는 주요 학습 주제를 다음과 같이 기초개념, 다중의미, 연관성을 주요 기준으로 도출하였다.

- 기초개념: 단순하지만 초등수학교육에서 매우 중요한 기본 주제인가?
- 다중의미: 여러 가지 의미 또는 개념이 내포되어 있어서 그 주제를 제대로 학습하기 위해서는 그 다양한 의미를 비교하여 이해할 필요가 있는가?

- 연 관 성: 한 단계의 학습 주제로 그치는 것이 아니라, 여러 학년이나 다른 내용 영역에 걸쳐서 연결되어 있는가?

수와 연산 영역은 초등수학의 핵심적인 영역이기 때문에, 범자연수, 범자연수의 덧셈과 뺄셈, 범자연수의 곱셈과 나눗셈, 분수, 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈과 나눗셈, 소수, 수감각으로 세분하여 상세하게 분석하였다. 또한 도형 영역에서는 평면도형, 입체도형, 공간감각 및 도형의 변환을, 측정 영역에서는 길이, 넓이, 부피를 주요 학습주제로 선정하였다. 도형과 측정 영역은 초등수학의 주된 영역에 속함에도 불구하고 기존의 PCK에 대한 연구에서 다소 소홀히 다루어졌던 영역이기 때문에 세 가지 하위 학습주제를 도출하여 분석하였다.

한편, 특정 개념에 국한된 선행 연구 경향을 넘어서서 본 연구에서는 확률과 통계 영역에서 자료의 분류와 정리, 문자와 식 영역에서 문제해결, 규칙성과 함수 영역에서 비와 비율을 각각 추가로 도출하여 기존 연구에서 교사의 PCK와 관련하여 별반 연구되지 않았던 영역을 망라하여 전체적으로 분석하였다.

### 3. 학습 주제별 연구 내용 및 방법

#### 1) 수학 내용에 대한 지식 분석

선정된 학습 주제별로 관련된 수학 내용에 대한 지식을 요약·정리하였다. 특히, 교사의 수학 내용 지식을 확고히 하기 위해서 여러 문헌 분석을 통하여 그 주제와 관련한 제반 내용을 종합적으로 정리하는 데 초점을 두었다. 또한 관련된 참고문헌을 적절하게 제시함으로써 보다 자세한 정보를 요하는 경우 찾아보기 쉽도록 하였다.

#### 2) 학습 주제별 교수법에 대한 지식 분석

선정된 학습 주제별로 전반적인 교수 전략에 대한 지식을 요약·정리하였다. 학습 주제의 특성에 따라 개괄적인 교수법을 다루고 이에 대한 구체적인 설명을 부가하여 제시하기도 하였고, 여러 가지 대안적인 교수 전략이 소개된 경우는 각각을 소개하고 이를 비교 및 대조하여 본 연구에서 또 다른 교수 전략을 제시하기도 하였다.

#### 3) 학습 주제별 학생들의 수학적 이해 및 학습에 대한 지식 조사

선정된 학습 주제별로 학습자의 전반적인 이해 및 지식 획득 방법, 학생들의 오류나 오개념에 대한 지식, 학생들이 특정 개념이나 의미를 어려워하는 이유에 대한 지식 등을 다음과 같이 2가지 방법으로 조사하였다.

- 선행연구: 선정된 학습 주제와 관련하여 국내·외 주요 문헌을 분석하여 학생들의 다양한 학습 과정 및 어려움의 정도와 원인을 정리하였다.
- 실태조사<sup>5)</sup>: 선정된 학습 주제와 관련하여 학생들의 이해와 학습에 관한 실태조사를 실시하여 오답이 높은 주제를 중심으로 분석하였다.

5) 여기서의 실태조사는 통계적으로 유의미하고 총체적인 조사를 의미하는 것이 아니라 문헌 연구를 보완·보충하는 방법의 일환으로 해당 학습 주제에 따라 각각 30명~60명의 학생들을 대상으로 학습에 대한 이해 정도를 조사하는 것을 의미한다. 사실, 연구되는 학습 주제가 17개이므로, 이것만으로도 상당히 많은 학생들을 대상으로 하여 비형식적이긴 하지만, 학습에 대한 통찰을 얻고 교사에게 적절한 학생 학습에 대한 지식을 제공할 수 있다.

#### 4) 학습 주제별 교육과정 및 교과용 도서 분석

선정된 학습주제에 대해서 교육과정에서 그 계열을 어떻게 다루는지 학년별/단계별로 각 목표와 내용을 개괄적으로 살펴보고, 이를 구체적으로 교과서에서 어떻게 제시하고 있는지 상세하게 분석하였다. 예를 들어, 세부 지도내용, 문장제 유형, 연산 도입방법, 알고리즘 제시방법, 해당 개념의 다양한 의미, 표상양식, 도형 지도방법, 측정에 대한 교수전략에 따른 분석 등 학습 주제의 특성에 맞춰서 수학 교과서 및 익힘책을 다양한 방법으로 분석하였다. 특히 교사들이 특정 개념의 제한된 의미나 유형에만 익숙하다는 것에 착안하여, 교과서나 익힘책에서 해당 학습 주제에 대해 다양한 의미나 유형을 폭넓게 다루고 있는지, 그렇지 않다면, 어떤 의미나 내용을 제대로 다루고 있지 않은지 살펴보았고, 그에 따른 교수법적 장·단점은 무엇인지 추론하여 후속 교과서 재구성의 기초 자료로 활용하였다.

#### 5) 학습 주제별 교과서 재구성 및 적용

본 연구결과의 현장 적용성을 높이기 위하여 해당 학습주제별로 한 단원을 선정하여 교과서 재구성을 시도하였다. 교과서의 차시를 간단하게 변경한다거나 교과서에서 사용된 구체물이나 수를 대체하는 수준의 재구성이 아니라, 도출된 학습 주제의 의미, 그 주제에 대한 학생들의 전반적인 이해나 학습 정도, 현행 교과서의 제시방법에 대한 심도 있는 분석 등을 토대로 이론적 배경과 경험적 근거를 바탕으로 하여 교과서를 적극적으로 재구성하고 지도방법을 구안하고자 노력하였는데, 구체적으로 다음과 같은 순서로 제시하였다.

- 재구성의 방향: 앞서 분석된 내용을 토대로 전반적인 재구성의 특징을 기술하였다.
- 단원의 전개계획: 각 차시별로 기존 교과서에서의 주제, 재구성한 주제, 재구성한 수업 내용에 대해 일목요연하게 정리하였다.
- 재구성의 실제: 각 차시별로 현행 교과서의 전반적인 체제에 맞춰 수업에 적용할 수 있도록 교과서처럼 구성하였다.
- 지도상의 유의점: 각 차시별로 그리고 활동별로 해당 내용을 지도할 때 교사가 특히 유의해야 할 점에 대해서 구체적으로 기술하였다.
- 수업 적용 후 제안점: 연구기간 내에 현장 적용이 가능한 단원에 한해서 재구성된 단원 전체를 시범 적용해 본 후, 이를 토대로 각 차시별로 잘 적용된 부분과 그렇지 못한 부분에 대해서 구체적인 피드백을 제공하였다. 특히, 잘 적용되지 못한 부분의 경우, 그 원인을 유추하여 대안적인 활동이나 지도방법에 대해서 간단하게나마 제시하였다. 이는 교사의 PCK가 정적인 형태로 머무르는 것이 아니라 학생들과의 다양한 사회적 상호작용을 거치면서 여러 가지 수업 변인을 바탕으로 능동적으로 정립될 수 있음을 반영한 것이다.

### III. 교수·학습 자료 개발의 실제6): 비와 비율을 중심으로

#### 1. 수학 내용에 대한 지식

6) 연구 내용 및 방법에서 기술한 바와 같이 본 연구는 초등수학교육에서 핵심적인 주제로 파악된 17개 학습 주제에 대해서 종합적인 교수·학습 자료를 개발하였지만, 지면의 한계상 '비와 비율'이라는 하나의 주제에 국한하고, 이 역시 60쪽 가까이 되므로, 연구 내용의 개요만 간단히 소개하고 구체적인 예는 일부만 제시한다.

### 1) 연구 내용 개요

비와 비율에 관련하여 수학 내용에 대한 지식 부분은 크게 5가지 부분으로 정리되었다. 첫째, 사전적 개념 및 용어 정의 부분으로써, 표준국어대사전에 제시된 비, 비율, 백분율, 할푼리의 사전적 의미와 박교식(2001)이 검토한 학교수학용어 중 비, 비율, 비의 값, 백분율, 할푼리에 대해서 자세히 알아보았다. 둘째, 현행 교육과정에 나타나 있는 개념 부분으로써, 교과서와 교사용 지도서에 소개된 비, 비율, 비의 값, 백분율, 할푼리를 정리하였다. 셋째, 선행연구에 기초한 비와 비율 개념 부분으로써, 문헌 분석을 통하여 비, 비율, 비의 값에 대해서 정리하고, 각 개념을 명확하게 구분하기 어려운 이유를 설명하였다. 넷째, 비율 개념에 내재한 수학적 개념의 이해 부분으로써, 고정된 관계, 승법적 관계, 정렬 관계라는 측면에서 비율의 수학적 개념을 알아보고, 비율과 전체에 대한 부분의 크기로서의 분수 개념을 여러 가지 측면에서 비교하였다. 마지막으로, 비 기호(:)와 백분율 기호(%)의 유래에 대해서 정리하였다.

### 2) 개발된 자료의 예: 선행연구에 기초한 비와 비율 개념

#### (1) 비

비는 두 수나 두 양을 비교하는 것이다. 두 수나 두 양을 비교할 때 처음에 'A는 B보다 얼마나 더 많다(적다), 혹은 크다(작다)'로 비교하기도 하고 'A는 B의 몇 배다'로 표현하기도 한다. 전자는 절대적인 크기의 비교일 때 사용되고, 후자는 상대적인 크기의 비교에 유용하다.

A와 B를 비교할 때, ':'의 기호를 사용하여 'A:B'로 표현하며, 읽을 때는 'A대B'로 읽는다. A, B가 두 수이거나 같은 종류의 양일 때 A가 B의 몇 배인가의 관계를 'B에 대한 A의 비' 또는 'A와 B의 비'라고 한다. A가 B의 몇 배인가는 A의 크기를 B의 크기에 비추어 생각하는 것이므로 B는 기준량이 되고, A는 비교하는 양이 된다.

(예) 4:5 → [읽기] 4대5,

[의미] 5에 대한 4의 비, 4와 5의 비(4가 5의 몇 배인가?), 4의 5에 대한 비  
[기준량과 비교량] 기준량은 5, 비교하는 양은 4

따라서 a와 b의 비를 a:b로 나타낼 때에는 a와 b를 어떤 순서로 쓰느냐에 따라 의미가 달라진다. 예를 들어, 4:5와 5:4는 전혀 다른 의미이다. 4:5는 5에 대한 4의 비로 4가 5에 몇 배인가를 뜻하고, 5:4는 4에 대한 5의 비로 5가 4에 몇 배인가를 뜻한다.

#### (2) 비율

비율은 두 수나 두 양을 비교하여 크기로 나타내는 것을 의미한다. 즉, B에 대한 A의 비는 B를 단위로 보았을 때 A는 얼마인가를 나타내는 것이다. A의 크기를 B로 재어보는 것을 의미하므로 B를 단위로 한 A의 측도를 의미하며,  $\frac{A}{B}=C$  라고 하면 C를 A:B의 '비율'이라고 한다.

$$(\text{비율}) = \frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$$

비율에서의 핵심적인 의미는 순서를 정하여 그 값을 비교하는 것이다. 서로 단위가 다른 양을 비교할 때, 순서가 다르면 다른 비의 값을 얻게 된다. 두 개의 비에서 비율이 서로 같으면 두 개의 비는 다음과 같이 서로 같다.

$$\frac{A}{B} = \frac{kA}{kB} = m \rightarrow AB = kA:kB$$

비율이 같을 경우, 비에 나타난 수가 다르더라도 그 상대적인 관계인 비는 같게 되며, 이를 비의 상등관계라고 한다. 예를 들어 A버스에는 40명 중 여학생이 16명 타고 있고, B버스에는 35명 중 여학생이 14명 타고 있다면, 각 버스에 타고 있는 전체 학생에 대한 여학생수의 비는 16:40, 14:35로 수는 다르지만 비율은  $\frac{16}{40} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$  로 같기 때문에 두 비는 같다. 비의 상등관계를 이용하여 주어진 비를 가장 간단한 정수비로 고치는 것을 ‘비를 간단히 한다’라고 한다. 비율은 기준량과 비의 값을 실용적으로 활용하기 위해 나타나는 것으로, 나타내는 방법에는 분수, 소수, 할푼리, 백분율 등이 있으며, 기준량을 얼마로 보느냐에 따라 표현방법이 다르다. 분수나 소수로 나타내는 경우는 기준량을 1로 보았을 때이고, 백분율은 100으로 보았을 때의 상대적인 크기를 나타내는 것이다. 할푼리는 기준량을 10으로 본 것이 ‘할’, 기준량을 100으로 본 것이 ‘푼’, 기준량을 1000으로 본 것이 ‘리’이다.

### (3) 비의 값

비의 값은 기준량을 1로 볼 때의 비율을 의미한다. 따라서 비율을 분수로 표현했을 때의 값이 비의 값과 일치한다. 예를 들어, 5:9의 비율은 기준량이 9이고 비교하는 양이 5이므로  $\frac{5}{9}$ 이다. 비의 값은 기준량을 1로 보았을 때이므로 5:9가 □:1이 되려면 □은  $\frac{5}{9}$ 이므로, 이 때 분수로 표현한 비율과 같다. 즉, 9에 대한 5의 비의 값은  $\frac{5}{9}$ 이다. 하지만, 개념적으로 주의할 것은 비의 값은 비율의 특수한 경우라는 점이다. 즉, 같은 종류의 두 양 a와 b가 있어서 a가 b의 r배가 되고, 이 r이 유리수일 때 비의 값이 되는 것이다. 즉, 유리수 범위에서는 비율과 비의 값이 같게 되어 결국 초등학교에서는 비율과 비의 값을 혼용하여 사용하기도 한다(박교식, 2001; 장혜원, 2002).

### (4) 각 개념의 명확한 구분에 대한 어려움

우리나라 현행 수학과 교육과정에서는 비, 비율, 비의 값의 개념을 각각 구분하고 있으나 일상생활에서 혼용하여 사용하는 경우가 많다. 수학에서는 비와 비례의 의미를 다르게 사용하고 있지만, 비와 비율은 엄밀하게 구별하여 사용되지 않는다. 우리나라 초등학교에서 지도하는 비와 관련된 용어의 정의를 보면 비와 비율을 구별하는 대신 비의 값이 비율과 같은 의미로 사용되고 있다(정은실, 2003a).

비는 관계이고 비의 값은 수라는 논리적인 면만 생각한다면 비와 비의 값을 구별하는 것이 타당하지만 미국의 경우 비의 값을 구별하여 사용하지 않는다. ratio라는 용어에 비의 값의 의미가 포함되어 있으며, ratio와 rate, proportion까지 같은 의미로 사용되기도 한다. Thompson(1994)은 교실에서는 물론 연구논문에서조차 비(ratio)와 비율(rate)이라는 용어 사용에 혼란이 있음을 지적하면서 여러 논문에서 볼 수 있는 비와 비율의 구분을 다음과 같이 세 가지로 하고 있다. 우리나라의 초등학교 교과서에서는 비와 비율의 구분을 아래 세 번째의 의미로 하고 있는 반면에, 미국에서는 첫 번째의 의미로 구분하는 경우가 많다.

1. 비는 같은 성질을 갖는 양 사이의 비교(예; 파운드 대 파운드)이고, 비율은 다른 성질을

- 갖는 양 사이의 비교(예; 거리 대 시간)이다.
2. 비는 어떤 양이 다른 양과 관련지어 얼마나 있는지를 나타내는 수 표현이며, 비율은 어떤 양과 시간 사이의 비이다.
  3. 비는 양의 순서쌍을 포함하는 이항관계이며, 비율은 내포량으로서 곧 한 양과 다른 양의 한 단위 사이의 관계이다(정은실, 2003a, pp. 249-250. 재인용).

미국 내에서 이 세 가지 구분을 따르기도 하지만 이렇게 구분하는 것이 어려워서 너무 엄밀히 구분할 필요가 없다고 주장하기도 한다. 한편, 첫 번째 의미로 비와 비율을 구분하지 않고 내적비와 외적비로 구분하여 모두 비에 포함시키기도 한다. 예를 들어, Freudenthal(1983)은 같은 성질을 갖는 양 사이를 비교하는 비를 내적비라 하고 다른 성질을 갖는 양 사이를 비교하는 비를 외적비라 한다. 비는 몫으로 해석할 수 있기 때문에, 내적비는 같은 성질을 가진 두 양의 비이므로 그 몫이 수가 되며, 외적비는 다른 성질을 가진 두 양 사이의 비이므로 그 몫 또한 양이 된다. 비의 값과 비율의 의미에 비교해보면 내적인 비의 몫은 비의 값에 해당하고 내적인 비와 외적인 비의 몫 모두 비율이라 할 수 있다. Ohlsson(1988)도 Freudenthal과 마찬가지로 비를 내적비와 외적비로 나눈다. 더 나아가 같은 성질의 길이지만 직사각형의 가로와 세로처럼 한 대상의 서로 다른 측면을 비교하는 비와 두 나라의 인구 비처럼 두 개의 다른 대상의 한 가지 측면을 비교하는 비를 구분하였다. 한 대상의 두 측면을 비교하는 비는 내적비도 될 수 있고 외적비도 될 수 있으나<sup>7)</sup>, 두 대상의 한 측면을 비교하는 비는 내적비이다(남승인·신준식·류성림·권성룡·김남균, 2004; 정은실, 2003a, 2003b).

이처럼 비의 값과 비율이 지닌 수학적 개념과 의미적 차이를 초등학교 수준에서 학습하기에는 무리가 있으며, 그러다보니 기존 교육과정에서 의미상으로 혼용되어 왔으며, 줄곧 비의 값과 비율을 같은 개념으로 다루어 왔다(장혜원, 2002). 학교 수학에서 각 개념의 독특한 역할에 초점을 두어 이를 수학적으로 구분하여 지도하는 것이 적절한지, 아니면 초등수학을 감안하여 하나의 통일된 용어로 사용하는 것이 보다 적절할지에 대해서는 지속적인 연구 및 논의가 필요하다.

## 2. 교수법에 대한 지식

### 1) 연구 내용 개요

비와 비율에 관련하여 교수법에 대한 지식 부분은 크게 3가지 부분으로 정리되었다. 첫째, 비와 비율 지도 부분으로써, 개념 단계, 연결 단계, 기호화 단계로 나누어서 비와 비율을 가르치는 데 필요한 내용을 체계적으로 정리하였다. 둘째, 비와 비례가 활용되는 상황 부분으로써, 일상생활에서 비와 비례가 사용되는 경우를 구체적인 예와 함께 다양하게 소개하였다. 셋째, 백분율의 지도 부분으로써, 수학 개념·실생활·선행 지식과의 연결, 백분율의 문제유형, 백분율 감각 지도, 백분율의 활용, 지도상의 유의점 등을 자세히 제시하였다.

### 2) 개발된 자료의 예: 비와 비율 지도

현행 교과서의 제시방법 및 수업 사례를 살펴보면 비 개념의 본질보다는 비의 외형적 표

7) 한 대상의 두 측면을 비교하는 비의 예를 살펴보면, 삼각형의 밑변의 길이와 높이, 일정한 높이의 삼각형 밑변을 두 배로 하였을 때 늘어난 삼각형의 넓이 등을 들 수 있는데, 전자는 한 대상의 두 측면이지만 길이와 높이의 비는 내적비가 되며, 후자는 길이와 넓이의 비로 외적비라 할 수 있다.



현과 알고리즘만을 강조하는 경향이 있다. 비의 값, 소수나 분수로 표현하기 등과 같은 연습도 필요하지만, 지금처럼 비에 대한 학습지도가 지나치게 표현 중심이고 알고리즘적일 때, 학생들의 입장에서는 개념에 대한 의미 파악이 되지 않아 실생활이나 복잡한 문제에 적용하기가 어렵게 된다(정은실, 2003b). 따라서 비와 비율 지도에 있어서 가장 중요한 것은 의미를 알게 하는 것이며, 비와 비율을 자연스럽게 실생활에서 사용한다는 것을 느끼게 해주는 것이 중요하다.

중학년 이전에는 비를 형식적으로 도입하지 않지만, 저학년에서부터 비형식적으로 비를 탐구할 수 있다. 이제 비형식적으로 비를 탐구하는 방법과 학생의 비형식적 지식과 기호를 어떻게 연결시킬 수 있는지 살펴본다(Baroody & Coslick, 1998; Lamon, 1990; Reys, Suydam, Limdquist, & Smith, 1998).

### (1) 개념 단계

- 비(비율)가 활용되는 일상 상황을 많이 토의하면서 점진적으로 비를 도입한다.

학생들이 다양한 형태로 수를 이해하고 표현하고 서로 비교하며 사용할 수 있어야 한다. 비에 대한 초기 경험은 학생이 비에 관련된 두 가지 수를 동시에 생각할 수 있도록 자극해야 한다. 저학년 학생들에게는 두 배하기, 세 배하기 상황을 제시하거나 화폐 관련 상황을 제시할 수 있을 것이다. 예를 들어 100원짜리 동전 5개는 500원짜리 동전 하나, 500원짜리 동전 2개는 1000원짜리 지폐 하나 등이다. 또한 음악수업에서 박자에 대한 학습에서도 비와 비율 개념이 나타나며, 요리나 미술에서도 나타난다. 이처럼 학생들이 실세계에서 자주 비와 비율을 접하게 된다. 다른 예로, 1000원에 과자 3봉지, 2배나 많은, 절반 등이다. 이러한 예를 잘 활용하여 비를 잘 의식하고 이해하도록 도와줄 필요가 있다.

비를 이용하여 두 수를 비교하는 것을 먼저 지도하고 교사의 일방적 전달이 아니라 교사가 적절한 발문을 하며 의미를 생각하도록 강조하는 것은 학생들이 비를 통한 비교의 의미와 비로 표현할 때 주의할 점을 탐구하는 데에 유의하다. 요인으로는 첫째, 학생들의 사전 지식에 토대를 두고 과제를 제시하고 실행하게 한다는 것이다. 과제를 제시하기 전에 교사는 이전에 배운 분수를 생각하게 한다. 부분-전체로서의 분수는 분모와 분자가 같은 단위의 대상이어야 하므로 비보다는 좀 더 제한적이기는 하지만 비교를 나타낸다는 점을 고려해 볼 때(Lamon, 1999), 비를 도입하기 전에 분수를 생각하게 하는 것은 비교를 위한 학생들의 사고를 원활하게 할 수 있다.

- 둘 이상의 양을 비교하기 위해서 공통 기준을 찾아 비교하는 상황으로 비를 도입한다.

예를 들어 단순한 문제로 1개에 200원하는 것과 3개에 300원하는 것이 있을 때 어느 것이 더 경제적인지 생각해보게 할 수 있다. 또는 농구 경기에서 4번 중 2번 골인한 학생, 10번 중 4번 골인한 학생, 20번 중 6번 골인한 학생이 있는 경우 누가 가장 슈트를 잘 던지는 선수인지를 판가름해 보고 어떻게 그 해결방법을 정당화할 수 있는지 생각해보게 할 수 있다.

- 비율 학습의 첫 단계로 두 묶음의 사물을 세어 짝짓는 구체적인 활동을 제공한다.

저학년 학생들에게 두 가지 상황을 고려하여 활동할 수 있는 상황을 제시하는데, 예를 들어, 4명이 소집단을 이루고 있을 때, 구슬을 12개 주고, 소집단 학생들이 모두 똑같이 나누어 가지게 하거나, 한 사람에게 구슬이 3개씩 돌아가도록 구슬을 가지고 가라는 등의 활동을 통해 4명의 사람과 각자 3개씩 즉, 3배가 되는 구슬의 개수를 관련지어 묶을 수 있도록 지도하면 비와 비율의 의미에 접근하기 쉬워진다. 이와 같이 목적이 있는 활동으로 비와 비율의 의미에 접근할 수 있도록 구성하고 탐구해보는 기회를 가지도록 해주는 것이 매우 중요하다.

## (2) 연결 단계

- 예와 반례를 사용하여 학생이 명확한 비율 개념을 구성하도록 돕는다.

비율의 특성인 고정된 승법적 관계<sup>8)</sup>를 인식하도록 돕는다. 예를 들어, 원의 반지름과 지름간의 비는 항상 지름이 반지름의 2배로 고정된 승법적 관계이다. 하지만, 정사각형의 변의 길이와 넓이를 생각해 보면, 그 길이를 두 배로 하여도 정사각형의 넓이는 두 배로 커지지 않기 때문에 비율이 아니다. 이렇듯, 비율의 적절한 예와 반례를 통해 개념을 이해하게 하는 것이 중요하다.

- 학생이 비율과 유리수를 나타내는 분수를 분명히 구별하게 한다.

두 게임에서의 타율을 더할 때는 각 항을 더하면 되지만, 분수에서의 덧셈은 분모끼리 분자끼리 더하면 안 된다. 이러한 사례를 들면서 비율과 분수는 차이가 있음을 인식하게 해야 한다.

- 학생이 비율의 각 요소가 무엇을 나타내는지 명확히 알게 한다.

비율이라는 것은 전체에 대한 부분의 관계만 있는 것이 아니라 부분에 대한 전체, 부분에 대한 부분, 어떤 양에 대한 다른 양의 비율 등을 나타낼 수 있음을 인식하여야 한다.

## (3) 기호화 단계

- 계산의 형식적 알고리즘을 재발견하거나 자신만의 알고리즘을 만들도록 한다.

비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내거나, 비율을 비의 값이나 백분율 등으로 나타낼 때, 개념단계와 연결단계를 거쳐 충분히 이해를 하고 있는 학생들은 자신 스스로 해결 방법을 찾게 된다. 이때 비나 비율로 표현하는 방법을 식으로 나타내는 활동을 통해 스스로 형식적 알고리즘을 만들어보고 자신의 생각을 발표할 기회를 제공한다.

- 실생활에서 적절히 활용되는 상황을 제시해준다.

비율 중에서도 백분율이 실생활에 많이 활용되고 있다. 예를 들어, 상품을 팔 때 할인율이 나, 선거를 할 때 후보들의 지지율, 주식증가율, 외화 환율 등이 있다. 학생들이 이해할 수 있는 상황을 선정하여 비와 비율에 대해 실생활에서 충분히 이해하고 해결할 수 있도록 지도한다.

## 3. 학생들의 수학적 이해 및 학습에 대한 지식

### 1) 연구 내용 개요

비와 비율에 관련하여 학생들의 수학적 이해 및 학습에 대한 지식 부분은 크게 2가지 부분으로 구별되어 연구되었다. 첫째, 선행 연구를 토대로 비를 표현할 때 순서가 바뀌는 경우, 비율을 분수나 소수로 나타낼 때 분자와 분모를 바꾸는 경우, 비와 비의 값, 비율과 비의 값의 의미를 구분하지 못하는 경우, 여러 가지 비율의 변환을 어려워하는 경우, 비율과 관련된 문장제에서 발생하는 오류, 백분율에 대한 이해 부족으로 해석을 잘못하는 경우, 백분율에 관한 문제에서 나타나는 오류, 백분율의 오용 등을 상세히 살펴보았다. 둘째, 실태 조사 부분으로, 초등학교 6학년 75명을 대상으로 10개 문항을 통하여 비, 비율, 비의 값에

---

8) 비율  $\frac{A}{B}$ 가 있을 때, A가 2배로 늘어나면 B도 2배로 일정하게 늘어난다는 특성이 있는데, 이것을 고정된(일정한) 승법적 관계가 있다고 표현한다.

대한 의미 파악과 비와 비율의 표현 방법, 비의 값, 백분율, 할푼리로 나타내는 방법 등을 이해하고 있는지 검사하여 관련 문항과 함께 각 문항별 오류를 구체적으로 분석하였다.

2) 개발된 자료의 예: 선행 연구 중 백분율에 관한 문제에서 나타나는 오류

비와 비율을 배우고 나면 실생활에서 가장 많이 접하고, 문장제로도 많이 제시되는 것 중의 하나가 백분율과 관련된 문제이다. 그럼에도 불구하고 학생들은 이에 대해 어려워하고, 오류를 많이 범하는 편이다(김성희·방정숙, 2005; Baroody & Coslick, 1998). 이를 네 가지로 정리해볼 수 있다. 첫째, 소수와 백분율을 혼동하여 쓰는 경우와 기준량이 100임을 이해하지 못하는 경우가 있다. 예를 들어, 50개의 20%라고 할 때 20%는 100 중에서 20이므로 0.2와 같아서  $50 \times 0.2$ 를 해야 하는데, 기준량이 100임을 파악하지 못하기 때문에  $50 \times 20$ 으로 생각한다. 즉, 전체의 20%는 전체의 양보다 적은데 전체의 20배로 착각하는 결과가 된다.

둘째, 백분율 유형 문제 중 전체를 구하는 문제에 대해 익숙하지 않은 경우이다. 학생들이 백분율을 구하는 문제나 부분을 구하는 문제는 상대적으로 쉽게 접근하고 익숙해진다. 예를 들어, '90명의 학생 중 40%가 여학생이면 여학생은 몇 명인가?'라는 문제에 대해 많은 학생들이  $90 \times 0.4$ 를 계산하여 36명이 되는 것을 이해한다. 그러나 이 문제를 변경하여 '전체 학생수의 40%가 36명일 때, 전체 학생 수는 몇 명인가?'라고 하면  $36 \div 0.4$ 를 쉽게 생각하지 못한다. 학생들에게 익숙하지 않아서이기도 하지만, 비율에 대한 정확한 개념이 없기 때문에 식을 어떻게 세워야 할지 어려워하는 경우가 많다.

셋째, 100%이상의 백분율이 제시된 문제에 익숙하지 못한 경우이다. 예를 들어, '이번 달 용돈은 지난 달 용돈의 125%를 받았다. 지난 달 용돈이 20000원이었다면 이번 달 용돈은 얼마인가?'라는 질문에 대해 125%라는 비율을 낮설어하고 어떻게 풀지 난감해하는 경우가 종종 있다. 만약에 이 문제를 '이번 달 용돈은 지난 달 용돈보다 25% 더 인상되었다. 지난 달 용돈이 20000원이었다면 이번 달에는 얼마를 더 받는가?'라고 바꾼다면 전자의 문제를 해결하지 못하던 학생도 해결하는 것을 볼 수 있다.

넷째, 백분율에 대한 백분율이 있는 문제에 익숙하지 못한 경우 등이 있다. 예를 들어 '15m 길이의 리본의 80%에 대한 20%는 몇 m인가?'라는 문제가 있을 시에 비율에 대한 비율을 묻기 때문에 익숙하지 않아 틀리거나 문제가 매우 어렵다고 느껴져 해결하려는 의지가 약해지는 경향이 있다.

3) 개발된 자료의 예: 실태 조사 중 비율의 특성에 대한 이해

전체적으로 비, 비율, 비의 값의 개념 이해에 대한 오류가 72%, 비율의 특성에 대한 오류가 82.7%로 매우 많았다. 비의 표현이나 전체를 구하는 백분율 문제와 할푼리의 개념을 묻는 문제에서도 40%이상의 오류를 보였다. 이러한 결과는 비와 비율에 대한 개념이나 성질을 이해하지 못한 상태에서 단순히 비율을 구하거나 백분율을 구하는 문제에 치중하였음을 부분적으로 반영한다고 해석된다.

문항별 분석 중 비율의 특성에 관한 문제는 [표 1]에 제시되어 있다. 비율의 특성 중 하나인 고정된 관계에 대한 문항을 분석한 [표 2]를 보면 75명 중 62명이 틀린 것으로 나타났다. 학생들은 보기 ②번의 '정사각형의 변의 길이를 두 배로 하였을 때, 늘어난 정사각형의 넓이'도 일정하게 같이 늘어난다고 생각하여 다른 번호를 답으로 쓴 경우가 50명으로 66.7%였다. 이 경우 보기 중 일정하게 늘어나지 않는 것이 없어서인지 다른 번호를 답으로 쓴 경우에 그 근거를 명확하게 설명하지 못하는 경우가 대부분이었다. 또한 무응답한 학생이 7명으

로 9.3%에 해당하였고, ②번을 답으로 하였지만 이유를 쓰지 못한 학생도 5명으로 6.7%였다. 정답과 타당한 이유를 쓴 학생이 13명밖에 되지 않으며, 분석 결과 비율의 특성을 제대로 파악하지 못하고 있는 학생이 매우 많음을 알 수 있었다9).

[표 1] 비율의 특성에 대한 문항의 예

6. 다음 중 비율과 관련 없는 것을 고르고, 왜 비율이 아닌지 설명하시오.(     )	
①	시속 80km인 기차가 3시간 달렸을 때의 거리
②	정사각형의 변의 길이를 두 배로 하였을 때, 늘어난 정사각형의 넓이
③	어느 놀이공원의 입장료가 1인당 5000원이며 5명이 갔을 때의 입장료
④	일정한 높이의 삼각형 밑변을 두 배로 하였을 때, 늘어난 삼각형의 넓이
⑤	1000원이 되려면 500원짜리 동전 2개가 있어야 하며, 5000원이 되기 위한 500원짜리 동전의 개수

[표 2] 비율의 특성에 대한 오류 분석 예

문항 번호	주제	정답	오류 분석	
			오류 유형	명(%)
6	비율의 특성 (고정된 관계 이해)	②, 이유: 정사각형의 변의 길이를 두 배로 하였을 때, 정사각형의 넓이는 네 배로 늘어난다. 비율은 두 배로 늘어났을 때, 같이 일정한 두 배로 늘어나야한다.	6-a. 비율이 고정된 승법적 관계가 있음을 이해하지 못함 (틀린 답을 쓴 경우)	50 (66.7)
			6-b. 무응답	7 (9.3)
			6-c. 비율의 특성 중 고정된 승법적 관계를 이해는 하지만 특성을 설명하지 못함 (②를 답하였으나 이유를 설명하지 못함)	5 (6.7)
			계	62 (82.7)

#### 4. 교육과정 및 교과용 도서 분석

##### 1) 연구 내용 개요

비와 비율에 관련하여 교육과정 및 교과용 도서 분석 부분은 크게 2가지 부분으로 구성되었다. 첫째, 교육과정 분석 부분으로, 비와 비율, 비례식, 연비에 대한 교육과정상의 목표와 내용을 살펴보았다. 둘째, 수학 교과서 및 수학 익힘책 분석 부분으로, 교과서의 지도 내용, 학습 내용에 따른 교과서 및 익힘책 분석, 백분율의 문제 유형에 따른 교과서 및 익힘책 분석을 다루었다.

9) 예를 들어  $\frac{3}{5}$ 은 기준량과 비교하는 양 각각 2배로 늘어난  $\frac{6}{10}$ 과 비의 값이 같고, 비의 관계에서도 3:5는 2배로 늘어난 6:10과 같아진다는 것을 이해하기 위해서는 일정한 승법적 관계를 갖고 있다는 특성을 충분히 이해하고 있어야하는데 실태는 그렇지 못함을 알 수 있다.

2) 개발된 자료의 예: 학습 내용에 따른 교과서 분석

교육과정의 목표에서 비와 비율의 개념 이해와 다양한 방법으로 비율을 표현하는 것이 강조되는 바, 교과서 내용에서 목표에 부합되는 내용인지 분석하였다. 예를 들어, 비와 비율의 개념을 이해하기 위한 활동이나 문제인지, 비율과 분수의 관계, 비율과 소수의 관계, 백분율, 할푼리에 대해 어느 정도 다루고 있는지 주제별로 구분하여 분석하였다. [표 3]에서 드러나듯이, 교과서에서는 비, 비율, 비의 값의 개념에 대한 활동이 이 단원에 제시된 활동 9개 중에서 2개(22%)이다. 구체적으로, [그림 1]에서 볼 수 있듯이(교육인적자원부, 2002), 활동 1에서 비교 방법을 여러 가지 찾아보고, 활동 2에서 비의 특성 중에 비를 쓸 때의 순서가 달라지면 안 되는 특성을 알아본다. 하지만, 개념 자체를 충분히 이해할만한 활동은 부족하다. 또한 비, 비율, 비의 값의 개념과 관련된 문제는 총 27문제 중 4문제(15%)에 지나지 않는다. 비, 비율, 비의 값의 의미를 “약속” 코너에서 각각 제시하고 있으나 활동이나 문제를 분석해보면 각각의 의미가 명확히 구분되어 나타나 있지 않다. 교육과정에서 비와 비율의 개념을 이해하는 것에 중점을 둔 반면 교과서 내용에서는 개념에 대한 활동과 문제가 상대적으로 부족하다.

[표 3] 교과서에 제시된 비와 비율 관련 학습 내용 분석

학습 내용		수준별 내용	6-가			계
			기본		심화	
			활동	문제	합계	
비	비의 개념	2	3	5		5
비의 값	비의 값에 대한 개념		1	1	1	2
비율	비율의 개념				1	1
	비(비율)와 분수의 관계	1	3	4		4
	비(비율)와 소수의 관계	1	4	5		5
백분율	백분율의 개념	1		1	1	2
	백분율과 분수 관계	1	3	4		4
	백분율과 소수 관계	2	7	9		9
	백분율과 비의 관계 및 응용		1	1		1
할푼리	할푼리의 개념					
	할푼리와 비율 관계	1	5	6		6
종합	다양한 비율 표현 및 응용					
	다양한 비율간의 크기 비교					
합 계		9	27	36	3	39

한편, 비, 비율, 백분율, 할푼리를 소수나 분수로 나타내는 활동은 9개 중 5개(56%)이며, 각 차시의 익히기, 문제해결 차시의 문제에서는 27개 중 17개(63%)로 비나 비율을 소수나 분수로 나타내거나 소수나 분수를 비나 비율로 나타내는 문제가 매우 큰 비중을 차지하고 있다. 특히, 백분율과 소수관계에 대한 문제가 상대적으로 많다. 백분율과 관련된 문장제를

해결하려면 백분율을 소수로 변환하고 혼용하지 않도록 명확히 이해하고 있어야하기 때문에 의도적으로 백분율과 소수의 변환 문제가 많은 것으로 보인다. 교육과정의 목표 중에서 여러 가지 비율로 표현해볼 수 있다는 목표에는 잘 부합하지만 전체적인 비와 비율의 내용으로 보았을 때, 소수나 분수로 표현하기에 너무 치중된 면을 보인다.

**1** 남학생 수와 여학생 수를 여러 가지 방법으로 비교하여 보시오.

● 표에 남학생 수만큼 ○, 여학생 수만큼 △를 그려 보시오.

남학생	여학생

● 숫자만 가지고 비교할 수 있다고 생각합니까?

● 왜 그렇게 생각합니까?

**2** 남학생 수와 여학생 수를 비교 나타내는 방법을 알아보시오.

남학생	여학생

● 남학생 수 3과 여학생 수 5를 비교하는 것을 3:5로 나타낼 수 있다고 생각합니까?

● 또, 남학생 수 3과 여학생 수 5를 비교하는 것을 5:3으로도 나타낼 수 있다고 생각합니까?

● 왜 그렇게 생각합니까?

<6-가> 6. 비와 비율 pp.86-87

[그림 1] 비의 개념을 알기 위한 활동

이렇듯 기본과정에서 비, 비율, 비의 값에 대한 개념 학습보다는 비율간의 관계나 변환에 대한 문제에 치중되어 있는 반면, 심화과정인 실생활에 적용하기 차시에서는 비의 개념 및 적용, 비율의 개념 및 적용, 백분율의 개념 이해 및 적용에 관한 문제로 되어있어 개념을 상대적으로 다루려는 노력이 돋보인다.

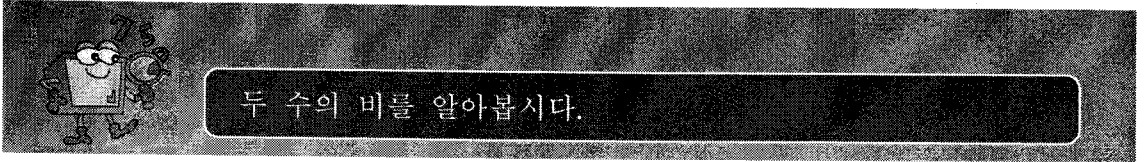
본 단원의 학습 내용을 비, 비율, 비의 값, 백분율, 할푼리로 구분할 때, 백분율과 관련된 활동과 문제가 총 39개 중 16개(41%)를 차지한다. 사실 백분율이 실생활에서 매우 많이 활용되기는 하지만 비와 비율의 개념 이해를 명확히 하는 것이 더 중요하고, 백분율은 비와 비율의 개념에서 표현이 다른 형태라는 것을 이해시키는 것이 더 바람직하다고 볼 때, 상대적으로 비와 비율의 개념 및 적용의 문제는 부족하고, 백분율의 활동과 문제가 많다는 것을 알 수 있다.

## 5. 교과서 재구성 및 적용

### 1) 연구 내용 개요

비와 비율에 관련하여 교과서 재구성 부분은 크게 4가지 부분으로 구성되었다. 첫째, 6-가 단계의 '6. 비와 비율' 단원을 대상으로 하여 앞서 분석된 내용을 토대로 재구성의 방향을 설정하였다(예를 들어, 비와 비율 도입의 필요성 제고, 일상생활에서 백분율과 할푼리의 활용, 다양한 문제 유형 제시, 비율과 연계한 백분율 및 할푼리의 도입 등). 둘째, 구체적인 단원의 전개 계획을 세워 기존 학습 주제와 비교하면서 재구성한 수업 내용을 기술하였다. 셋째, 재구성의 실제 부분으로 각 차시별로 교과서를 재구성하여 제시하였다. 마지막으로, 지도상의 유의점을 제시하면서 각 차시별로 수업을 전개하는 데 있어서 주의해야 할 점을 간단하게나마 정리하였고, 직접적인 현장 적용을 통해서 드러난 점을 토대로 수업 적용 후 제안점을 추가하였다.

2) 개발된 자료의 예: 교과서 재구성(1차시)



**생활에서 알아보기**

철수네 모듬에는 남학생이 3명, 여학생이 5명입니다. 남학생 수와 여학생 수를 비교하는 방법을 알아보시오.



**활동 1**

철수네 모듬의 남학생 수와 여학생 수를 비교하려고 합니다. 여러 가지 방법으로 비교하여 보시오.

- 남학생 수만큼, 여학생 수만큼 색을 칠하시오.

남학생	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
여학생	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

- 이미 알고 있는 비교 방법으로 남학생수와 여학생수를 비교하여 글로 써보시오.

**활동 2**

다른 방법으로 두 수를 비교하려 합니다. 어떤 방법이 있는지 생각해보시오.

- 숫자만 가지고 비교하는 방법이 있습니까?
- 방법을 설명해보시오.



### 약속하기

남학생 수와 여학생 수를 비교하기 위하여 기호 : 를 사용합니다. 남학생 수 3명과 여학생 수 5명을 비교하는 것을 3:5 로 나타내고, 3대5 라고 읽습니다. 이것을 5에 대한 3의 비 또는 3의 5에 대한 비 라 하고 간단히 3과 5의 비라고 합니다.

### 활동

3 남학생 수와 여학생 수를 비로 나타내는 방법을 알아보시오.

- 남학생 수 3과 여학생 수 5를 기호 : 를 사용해서 비로 나타내어 보시오.

$$\square : \square$$

- 여학생 수에 대한 남학생 수의 비를 3:5로 나타내고, 5:3으로도 나타낼 수 있다고 생각합니까?
- 이유를 설명하십시오.

### 알게 된 사실

### 이해하기

- 안에 알맞은 수를 써 넣으시오.

7에 대한 3의 비	<input type="text"/> : <input type="text"/>	8의 5에 대한 비	<input type="text"/> : <input type="text"/>
3과 7의 비	<input type="text"/> : <input type="text"/>	5와 8의 비	<input type="text"/> : <input type="text"/>
3에 대한 7의 비	<input type="text"/> : <input type="text"/>	8에 대한 5의 비	<input type="text"/> : <input type="text"/>

3) 개발된 자료의 예: 지도상의 유의점(1차시)

· 이 차시에서 가장 중요한 것은 비를 표현하는 방법을 학습하는 것이 아니라 왜 비를 알아야하는지에 대한 필요성과 개념 학습이다. 따라서 활동 1을 통해 비가 두 수의 비교를 목적으로 쓰는 것임을 인지할 수 있어야 한다. 예전에 배웠던 수의 비교는 크기 비교, 양 비교 등 '크다, 작다, 많다, 적다' 등으로 표현하였지만 비는 활동을 통해 '몇 배'로 표현된다는 것을 이해할 수 있어야 한다.



• 1차시에서는 활동이 매우 간단해 보이지만 학생들의 생각을 발표하고, 서로 토론할 수 있는 의사소통의 기회를 많이 제공하여 학생들 스스로 비의 필요성을 발견하도록 해야 한다.

• 활동 2에서는 비의 개념 중에서 순서를 바꾸면 의미가 달라진다는 것을 깨닫는 것이 핵심이다. 비의 성질 중 하나라 할 수도 있겠으며, '~에 대한 ~의 비'로 표현할 때, 두 수가 비의 기호 ':'의 왼쪽과 오른쪽 어디에 나타내어야 하는지를 살펴보는 활동이다. 이 활동 후에 알게 된 점을 공란으로 놓아두었다. 학생들이 스스로 알게 된 사실을 적어보고 발표하는 기회를 갖는 것이 바람직하다.

#### ※ 수업 적용 후 제안점

• 활동 1에서 기존 교과서의 '숫자만 가지고 비교할 수 있다고 생각합니까?'를 활동 2로 하고 활동 1을 '이미 알고 있는 비교 방법으로 남학생 수와 여학생 수를 비교하여 글로 써 보기'로 재구성한 것은 학생들에게서 '~이 ~보다 많다. ~이 ~보다 적다. ~은 ~의  $\Delta/\sigma$ ' 등 다양하게 사고 활동을 유도할 수 있어 좋았다.

• 활동 2에서 '숫자만 가지고 비교하기'는 학생 중 한 명이 숫자와 기호가 있어야 한다고 얘기를 하였으므로 '숫자와 기호만 가지고'라고 수정하는 것이 바람직하다. '왜 그렇게 생각합니까?'를 '방법을 설명하시오.'로 수정한 것은 학생들의 생각을 좀 더 포괄적으로 기술하는 가운데 학생들의 생각을 파악할 수 있었다.

• '약속하기'는 뒤쪽에 배치하여 보이지 않도록 하는 것이 학생들의 다양한 사고 활동을 유발하는데 도움이 되며, 활동 3에서 남학생 수 3과 여학생 수 5를 기호 ':'를 사용해서 비로 나타내어 보게 하고 5:3과의 차이점을 찾도록 한 내용은 2차시 비율과 비의 값을 배우고 난 다음 활동 2에서 정리하도록 하는 것이 학생들이 더 잘 이해할 수 있을 것이며, 비율과 비의 값에 대한 개념이 없는 상태에서 학생들이 3:5와 5:3의 차이점을 수학적으로 이해하기는 어려운 것 같다.

## IV. 맺는 말

초등학교 교사의 전문성 측면에서 수학 교육에서의 PCK는 매우 중요하다. 미국수학교사 협의회(National Council of Teachers of Mathematics, 2000)에서는 학교 수학 전반에 걸쳐서 효과적인 수업을 위해서 교사는 수학 내용과 학습자로서의 학생들, 그리고 다양한 교수 전략을 제대로 이해해야 한다고 강조한다. 또한 많은 연구자들이 다양한 실험 결과를 토대로 특정한 수학 개념과 관련하여 교사의 지식이 종종 매우 약하거나 심지어는 정확하지 않다는 것을 밝힘으로써, 이런 경우에 어떻게 교사가 학생들의 수학적 개념의 이해를 강조하는 수업을 구성할 수 있는지에 대한 문제 제기를 하였다(예, Adams, 1998; Ball et al., 2001). 교사의 PCK는 다른 수업 외적 요인과는 다르게 학생들의 수학 학습에 직접적인 영향을 끼칠 수 있다는 점에서 그 중요성이 더욱 부각되었다고 볼 수 있다.

본 연구는 초등학교에서 가르치는 활동과 직접적으로 관련된 지식을 종합적으로 획득하기 위한 자료가 여전히 미비한 실정에서 핵심적인 학습 주제 전반에 대해서 관련된 수학 내용 지식, 교수법 지식, 학습자 지식, 교육과정 및 교과용 도서 분석, 교과서 재구성 및 적용 측면에서 체계적으로 분석함으로써 PCK에 대한 폭과 깊이를 상당부분 확장하려고 하였다. 그동안 효과적인 수학과 교사교육 프로그램의 저변에는 교사에게 유용한 교수·학습 자료 개

발이 선행되었음을 고려해 볼 때(남승인 외, 2004; Remillard & Bryans, 2004), 본 연구를 통해 개발된 자료가 다양한 후속 교사교육 프로그램의 기초가 될 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- 교육인적자원부(2002). 수학 6-가. 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육인적자원부 (2006). 초·중등 학교 교육과정 부분 수정 고시.
- 김민경(2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석. *학교수학*, 5(2), 223-240.
- 김성희, 방정숙(2005). 수학 교수·학습 과정에서 과제의 인지적 수준 분석: 초등학교 '비와 비율' 단원을 중심으로. *수학교육학연구*, 15(3), 251-272.
- 남승인, 신준식, 류성립, 권성룡, 김남균(2004). 초등 교사 교육을 위한 수학 프로그램 적용 및 확산 연구. 서울: 교육인적자원부.
- 박교식(2001). 수학을 다시 보기. 서울: 수학사랑.
- 박교식, 송상헌, 임재훈 (2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. *학교수학*, 6(3), 235-249.
- 송경현(2003). 초등교사 양성·현직교육의 연계 실태 및 주요 문제. 서울교육대학교 초등교육연구원(편집). *초등교사의 전문성 함양을 위한 양성교육과 현직교육과의 연계 강화 방안*(pp. 25-55).
- 오영열(2004). 초등수학에 대한 예비교사들의 이해: 분수의 곱셈을 중심으로. *학교수학*, 6(3), 267-281.
- 이종욱(2003). 예비초등교사의 덧셈과 뺄셈에 관한 교수학적 지식. *수학교육학연구*, 13(4), 447-462.
- 장혜원(2002). 초등학교 수학에서 비의 값과 비율 개념의 구별에 대한 논의. *학교수학*, 4(4), 633-642.
- 정은실(2003a). 비 개념에 대한 교육적 분석. *수학교육학 연구*, 13(3), 247-265.
- 정은실(2003b). 비 개념에 대한 역사적, 수학적 심리적 분석. *학교수학*, 5(4), 421-440.
- Adams, T. L. (1998). Prospective elementary teachers' mathematics subject matter knowledge: The real number system. *Action in Teacher Education*, 20(2), 35-48.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Mathematics. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- 권성룡 외 11인 공역(2005). *수학의 힘을 길러주자. 왜? 어떻게?* 서울: 경문사.
- Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 403-434.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel Publishing Company.

- Geddis, A. N. & Wood, E. (1997). Transforming subject matter and managing dilemmas: A case study in teacher education. *Teaching & Teacher Education*, 13(6), 611-626.
- Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Lamon, S. J. (1990, April). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston, MA. (ERIC Document Reproduction Service No. 325 335).
- Li, X. (2001). Literature review on pedagogical content knowledge. Retrieved August 18, 2005 from <http://www.ma.utexas.edu/~xhli/PCKReview.pdf>.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 41(3), 3-11.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.
- Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Remillard, J. T. & Bryans, M. B. (2004). Teachers' orientations toward mathematics curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 352-388.
- Reys, R. E., Suydam, M. N., Lindquist, M. M., & Smith, N. L. (1998). *Helping children learn mathematics* (5th ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon. 강완 외 19인 공역 (1999). *초등 수학 학습 지도의 이해*. 서울: 양서원.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15, 4-14.
- Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relation to concepts of Rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: SUNY Press.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.

# Development of Teaching and Learning Materials for Elementary School Teachers to Foster Pedagogical Content Knowledge in Mathematics

Pang, JeongSuk<sup>10)</sup> · Kim, SangHwa<sup>11)</sup>

## Abstract

Recent reform movement in mathematics education has focused not only on the curriculum development but also on teachers' learning or professional development. Whereas various theoretical paradigms call for different programs of professional development for teachers, one of the common emphases is on the pedagogical content knowledge [PCK] which encompasses contents and methods to teach. Against this background, this study developed comprehensive instructional materials for the purpose of fostering PCK in mathematics for elementary school teachers with 17 essential learning themes such as fraction, plane geometry, and area. Each learning theme was first summarized on the basis of literature reviews and surveys in terms of knowledge in mathematics contents, knowledge in teaching methods, and knowledge in students' mathematical understanding and learning. Each theme was then analyzed in detail on how it was represented in the national curriculum and its concomitant textbooks along with workbooks. Finally, this report included a reconstruction of one unit in textbooks per each learning theme, followed by teaching notes and suggestions from classroom implementation. This was intended for teachers to apply what they might learn from this material to their actual mathematics instruction. Given the page limit, this paper dealt only with the learning theme of ratio.

Key Words: Pedagogical content knowledge, Teacher learning, Elementary mathematics education, Teaching and learning materials.

---

10) Korea National University of Education (jeongsuk@knue.ac.kr)

11) Yongin Sangha Elementary School (exit90@dreamwiz.com)