한국학교수학회논문집 제 10 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 10, Number 1, 91-111, March 2007

컴퓨터 시각화 자료가 고등학생들의 수열 개념 이해에 미치는 영향

정인철[1] · 황운구[2] · 김택수[3]

본 연구는 컴퓨터를 활용하여 동적이며 직관적인 시각화 자료를 활용하여 실험에 참가한 고등학교 학생들의 수열 개념에 대해서 수열의 합 공식에 대해 귀납 추론으로 공식을 학생 스스로가 추론할 수 있는지를 알아보고자 했다. 학생들은 스스로가 수열의 합 공식을 사용하지 않고 귀납 추론으로 공식을 유도할 수 있음을 보았다. 또한 무한급수에서의 무한의 오개념인 잠재적 무한의 개념을 가진 학생들이 본 실험 자료로 학습을 하였을 때에 무한의 올바른 개념인 실 무한의 개념을 이해하는데 도움을 주는지에 대하여 연구를 하였는데 실험에 참가한 실험 학생들은 잠재적 무한 개념을 가지고 있었고 동적이고 직관적인 시각화 자료를 가지고 수업 후 실 무한의 개념으로의 변화가 있었다. 이들 학생들은 또한 컴퓨터를 활용하여 동적이고 직관적인 시각화 자료에 대해서 매우 흥미를 느꼈고, 수학에 대한 태도에도 영향을 주었다.

주요용어 : 수학적 시각화, 직관, 귀납추론, 잠재적 무한, 실 무한

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

학생들이 수학을 추상적인 교과로 인식하여 학습에 흥미를 잃거나 실세계 문제를 해결하는 능력이 부족하다는 점이 문제시되어 왔다. 여러 연구들(예를 들면, Hierbert & Carpenter, 1992; Jurdak & Shahin, 2001; Lave, 1988; Nunes, Schliemann, & Carrah, 1993; Saxe, 1991)에서는 학생들이 실생활에서 직면하는 문제를 해결하기 위해 학교에서 학습한 수학을 합리적으로 사용하지 못한다는 점을 밝혔다. 그리고 그 원인으로는 학교수학은 탈맥락적인 기호 표현에 기초한 추상적인 학습을 강조하여 학생들이 수학을 형식적인 기호조작으로 받아들인다는 점을 지적하였다(신은주 · 이종인, 2005, 재인용). 현장에서도 학생들이 수학은 매우 추상적 학문으로 형식적인 기호조작에 어려움을 느끼고 있다. 또한 수학교육이

1) 전남대학교 (ijung@jnu.ac.kr)
2) 유성고등학교 (michol92@edurang.net)
3) 대전외국어고등학교 (wpkts@hanmail.net)

직면하고 있는 어려움 중의 하나는 수학이라는 교과에 대해 학생들이 가지고 있는 인식이라고 할 수 있고, 많은 학생들은 수학이 대단히 어렵고 재미없으며 의미 없는 과목으로 느끼고 있다. 그 원인은 수학 자체가 갖는 논리성과 형식성 때문이기도 하지만 '정적'이고 '언어중심'으로 조직되어 있는 현행 교재나 지도 방법에서도 그 원인을 찾아 볼 수 있다(문광호, 1999).

이렇듯 형식성과 논리적 엄밀성에 집착하는 기성 수학의 성향을 수학교육에 여과 없이 적용하는 것이 현행 수학교육의 심각한 문제점 중 하나로 지적하고 있다(김응태, 1984). 이러한 형식주의적 교육은 아동 자신이 수학을 생각하여 왔다는 것을 인식하지 못하게 함으로써 수학적 사고를 수행하는 자신의 능력에 대해 신뢰를 제거시키는 결과를 가져오고 있다(우정호, 2000). 수학은 추상화된 내용을 기호로 나타내고 이를 형식적으로 전개해 나가면서 논리적 엄밀성을 강조를 한다. 그러나 이러한 것을 강조한다고 하여 수학이 추구하는 목표가 이루어지지는 않는다. 추상성, 형식성, 논리성, 엄밀성과 관련된 능력이 발달되지 않은 아동이나 저학년의 단계는 물론이고 그러한 능력이 잘 발달되어 있는 단계의 사람들도 수학을 배우는 과정에서는 직관과 통찰을 이용하여 이해를 돕고 점진적인 형식화를 이루도록 지도하는 것이 필요하다(문광호 · 우정호, 1999).

그러나 이러한 직관도 우리나라 수학 교육과정에서 '극한'의 개념은 인문계 고등학교 2학년에서 배우는 수학 I 에서 '수열의 극한' 단원에서 직관적이고도 비형식적인 극한을 중심으로 지도하고 있다. 제 7차 교육과정에 의해 극한 개념을 직관적인 교수 · 학습하고 있으며 제7차 수학과 교육과정 해설서(1997)의 '수열의 극한'에서 지도상 유의점으로 '수열의 극한은 직관적으로 지도한다.'라고 명시되어 있다. 미분과 적분을 학습하기 위한 첫 번째 무한의 개념의 도입의 단원이기도 한 이 단원은 대학교에서는 $\epsilon-\delta$법의 매우 엄밀성을 강조하여 지도하지만 고등학교에서는 이 내용이 매우 어려워 교육과정에서도 직관적으로만 지도하라고 되어 있다. 이렇게 직관적으로 학습하다 보니 학생들도 매우 극한의 개념을 오해하고 잘 받아 들이지 못한다. 한종희(1997), 박선화(1998)의 논문에서 극한 개념을 이해하는 데에 많은 어려움과 극한에 대한 오개념을 연구하였다. 이러한 오개념들은 학생들의 학습의 장애가 되고 학습 부진의 원인이 되기도 한다. 또한 박선화(2000)는 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복에 대하여 연구하였다.

수열과 수열의 극한의 시각적 지도에 관한 논문들을 보면, 시각적인 자료를 제시하여 자연수의 거듭제곱의 합에 재한 지도를 통해서 기존의 교과서가 항등식과 수학적 귀납법을 이용하여 자연수의 차수에 따라 제각기 다른 방법으로 증명을 함으로써 학생들은 선행되어야 하는 여러 가지 지식을 스스로 이끌어 내지 못해 어려움이 있다(기완희, 2000). 또한 수학을 학습하는 교육 현장에서는 학생들이 수학적 개념을 이해하고 문제를 해결함으로써 즐거움을 느끼는 수업보다는 수학 문제에 대한 기계적인 해결 방법이나 성적만의 성취효과를 중시 한 나머지 획일적인 수업으로 전개되는 경향이 있으므로 학생들의 이해를 다양한 이해과 효과적인 학습을 위해서 효율적인 자료를 개발하고 상호 정보를 교환함으로써 수학이 복잡하고 매력이 없는 교과라는 고정 관념에서 벗어나도록 도와주어야 한다고 하여 이를 위해 수열 단원의 내용을 우리 생활 주변에 존재하는 것으로부터 찾아 제시함으로써 학습자의 흥미를 유발시켜야 한다고 하였다(기완희, 2000). 박희송(2004), 차은경(2005), 최영선(2005), 김내희(2005), 김세진(2002), 오선희(2001), 왕수민(2002)의 논문들을 정리하여 보면 시각화를 강조한 수업이 중위 집단 학생들의 수학적 태도에 의미 있는 영향을 미쳤고, 수열의 극한 단원에서 시각화를 강조한 수업은 학생들의 개념 형성에 의미가 있었다. 그리고 고등학교 과정

에서의 시각화 자료를 제시하고 수열 I의 수열 단원과 수열의 극한 단원을 대수적 방법으로 다루고 있으며 이를 시각적 자료를 토대로 하여 증명의 수단이 되면서 기억이 오래 남을 수 있다. 차은경(2005)에서는 이러한 시각화의 효과적인 방법도 하위집단에서는 수열의 개념 형성에 방해만 되어 그 효과를 보지 못했다.

Aristoteles는 무한 개념을 잠재적 무한과 실 무한으로 구분하였다. 현대 수학의 무한 개념은 Cantor의 실무한의 개념을 바탕으로 하고 있는데, 학생들이 일상의 경험이나 선험 지식에 모순적인 실 무한 개념의 이해에 많은 어려움을 겪고 있다(이대현, 2001). 이러한 무한 개념의 지도방안으로 학생들의 기존의 인지구조를 변화시키는 교수학적 노력이 필요하다(이대현, 2001). 이를 위해 학생들이 기존의 지식으로는 해결할 수 없는 문제를 제시하여 기존의 지식과 정신적인 갈등을 느끼도록 해 주어야 한다. 학생들이 무한에 대하여 직관적으로 인식하는 개념은 잠재적 무한 개념에 근거한다. 즉, 우리의 잠재적 무한 개념은 실 무한 개념의 인식에 어려움을 야기 시킨다. 따라서 실 무한 개념에 적절한 직관을 계발하여야 한다고 주장하였다. 이에 컴퓨터를 사용하여 직관적이고 시각적인 자료를 통한 학생들의 실무한의 개념 이해에 대하여 연구를 하고자 한다.

직관적으로 지도하는데 도움을 주는 것이 시각화인데 이대현 · 박배훈(2002)은 수학교육에서 시각화와 직관에 대하여 시각화의 의미와 시각화의 긍정적인 면과 부정적인 면에 대하여 논의하고 직관적인 문제해결 과정에서 시각화 역할과 수학적 사실의 시각화에 의한 직관의 신장 방안에 대하여 제시하였다. 직관의 신장 방안으로 Dienes의 '지각적 다양성의 원리'와 '수학적 다양성 원리'와 같이 컴퓨터 탐구형 소프트웨어로 동적인 애니메이션과 시뮬레이션으로 다양한 수학적 개념, 원리, 법칙을 다양하고 동적인 것으로 제시되어야 한다(이대현, 박배훈, 2002).

3대 작도의 불능의 문제에서 작도는 기하적인데 이의 증명은 대수학적으로 증명하였고, 페르마 마지막 정리도 시무라-다니야마 추측 대수적인 증명을 기하적인 증명으로 바꾸어서 증명을 시도한 것을 와일즈가 1994년에 연결고리를 증명함으로써 증명을 하였다. 여기서 보듯이 대수적인 것과 기하적인 것과의 관계를 서로 넘나들면서 증명이 이루어져 왔다. 따라서 대수적인 면을 너무 강조하고 있는 현실에서 기하적인 면도 학생들에게 제공함으로써 사고 확장에 도움을 주어야 한다.

상위권 학생들은 시각화 이미지만 보아도 그 의미를 빠르게 파악하지만 대부분의 중위권 학생들과 하위권 학생들은 추론 능력이 부족하여 수학 개념을 이해하지 못한다. 중위권 학생들과 하위권 학생들의 직관적 시각화 컴퓨터 자료로 보조적인 도움을 주어 학생들 스스로가 추론할 수 있는지를 살펴보고자 한다. 또한, '수열'과 '수열의 극한'에 대한 컴퓨터 프로그램 자료가 없어 이들 자료들을 플래시로 제작하고 이를 학생들에게 투입하여 정적인 이미지 시각화 자료보다 동적이고 자기주도적인 시각화 자료들이 수학적 개념의 올바른 이해, 수학적 흥미와 태도의 변화에 대한 연구를 하고자 한다.

2. 연구문제

이 논문에서는 컴퓨터를 통한 자기 주도적이고 동적인 시각화 자료를 통하여 '수열'과 '수열의 극한'의 학습을 통하여 직관력의 향상과 개연추론을 함으로서 수열 공식의 이해를 쉽게 할 수 있고, 또한 실무한의 개념형성을 통해서 무한 개념을 올바른 이해를 할 수 있다.

이를 위해서 대전D고등학교 1학년 5명을 대상으로 사례연구를 하였다.

첫째, 수열의 합에 대한 공식들을 컴퓨터를 통해 직관적으로 개연 추론함으로서 시각적으로 공식의 유도와 이해를 쉽게 할 수 있는가?

둘째, 컴퓨터를 통한 시각화 실험이 학생들의 잠재적 무한 개념을 실 무한 개념으로의 전환하는데 도움을 줄 수 있는가?

셋째, 중위권 학생들이 시각화 자료를 보면서도 그 내용이 무엇을 담고 있는지 그 시각화 자료의 의미가 무엇인지를 파악을 못하는 경우가 대부분 이었다. 따라서 성취감이 결여되고 흥미가 부족하고 적극적인 태도를 못 갖는 학생들에게 컴퓨터를 통한 시각화의 경험이 성취감과 긍정적인 태도에 영향을 미치는가?

3. 연구의 제한점과 한계

본 연구는 수열의 극한 단원의 극한 개념을 기존 시각적 이미지만으로 제시된 것을 컴퓨터를 이용하여 자기주도적이고 동적이며 직관적인 시각화 자료로 만들어 제시하였을 때 학생들의 반응을 실험하였다. 또한 중위권 학생을 대상으로 하여 그 반응을 살펴보았는데, 예비 실험에서 상위권 학생들은 시각적 이미지만으로 더 충분히 그 효과를 보고 수학적 태도와 흥미가 있음을 보았다. 또한 하위권 학생들의 대한 실험도 이루어져야 하며, 좀 더 다양한 시각화 자료의 개발 및 이들을 통한 연구가 필요하다.

또한 컴퓨터로 만든 동적이며 직관적인 시각화 자료는 탐구형 소프트웨어 또는 자바 언어, C 언어로 다양하게 만들 수 있으나 웹으로 제공하기 쉽게 제작을 하기 위해서 플래시 액션스크립트로 제작을 하였고 다양한 자료를 모두 실험에 활용을 못하고 선택적인 자료로 실험을 하였으며, 실험에 참가한 5명은 선별된 집단으로 표준집단이 아니라서 일반화하기에는 한계가 있다.

II. 이론적 배경 및 교과서 시각화 자료 분석

1. 수학적 시각화

‘시각화는 수학적 개념이나 원리 또는 문제들의 기하적이거나 도형적인 표현을 생성하거나 이동하는 과정을 묘사하기 위해서 사용 된다.’라고 하였으며, 시각화를 흥미를 가지는 것을 단순히 다이어그램이나 그래프를 교과서에서 설명의 보조 도구로서 이용하는 것만이 아니라 수학적 개념을 이해하고 문제를 표현하기 위해 적절한 도형을 그릴 수 있는 학생들의 능력이라고 하였다. 따라서 수학적인 시각화란 마음속으로, 연필과 종이로 또는 기술공학을 이용하여 이미지를 형성하는 과정이며, 수학적 발견과 이해를 위해 효과적으로 그 이미지를 사용하는 과정으로 정의하였다(이지요, 1999).

문광호 · 우정호(1999)의 수학교육의 교수학습 과정에서의 시각화 역할을 네 가지를 살펴보면

첫째, 동기부여적인 측면으로서의 수학 교육과정이 갖추어야 할 중요한 요소로서 강조되는 ‘수학에 대한 흥미와 관심’, ‘긍정적인 태도’를 갖도록 하는 데 시각화는 매우 중요한 역할을 한다.

둘째, 수학적 사실의 인식, 이해 및 기억에 관한 측면으로서 지식이나 정보에 대하여 언어적 표현과 함께 시각적인 자료가 제시될 때, 그 지식이나 정보를 더욱 잘 인식하고 이해하며 그것에 더욱 강한 확신을 가지게 된다.

셋째, 수학적 증명에 도움이 된다.

넷째, 수학적 문제해결에도 도움이 된다.

시각화 유형으로는 도형적 표현, 다이어그램, 그래프, 컴퓨터를 이용한 동적 이미지를 제시하였다(김내희, 2005). 도형적 표현은 수학적인 내용을 가진 문자나 숫자를 도형의 형태로 표현하는 것이다. 다이어그램은 수학적 개념을 그림으로 표현하여 내재적인 신뢰감을 높이는 방법이다. 그래프는 주로 함수단원에서 사용되는 방법으로 함수를 그래프 형태로 표현하여 그 성질을 알아보는 것이다. 컴퓨터를 이용한 동적 이미지는 그래프 또한 움직임을 통해서 수학에 대한 성질을 더욱더 이해하기가 쉽게 표현된 것이다.

2. 수학교육에서의 직관

Fischbein(1987)은 직관을 기원에 따른 분류에서 제 1직관과 제 2직관으로 분류를 하고 있다. 제 1직관이란 일상적인 경험을 바탕으로 개인적으로 발전되는 직관으로 어떤 체계적인 수업에도 독립적으로 전개되는 개인의 인지적 신념이다. 예를 들면 공간에 대한 차원 표현, 조석에 대한 지관, 모든 사건은 원인이 있어야 한다는 생각, 어떤 사건의 객관적 빈도에 대한 예견의 자동적 적응 등이다. 제 2직관은 자연적인 근원이 없이 개발되는 새로운 직관으로 다시 말해 교육에 의해 새롭게 개발된 직관이다. "삼각형의 내각의 크기의 합이 180도이다." 라는 명제를 엄밀한 증명을 하기 전에 어떤 방법으로 합이 반드시 일정해야 된다는 사실을 바로 이해할 수 있다면 새로운 이차적 직관을 획득한 것이다.(류희찬 · 류성림, 1997)

또한 Fischbein(1987)은 역할과 기원에 기초하여 직관을 단정 직관, 추측 직관, 예측 직관, 결정 직관으로 분류하고 있다. 단정 직관은 '전체는 각각의 부분보다 크다'와 같이 확실하고 자명하게 받아들여지는 시실의 표현과 해석이다. 관계직관은 서로의 관계를 표현하는 자명하고 자기 일관적인 진술로 표현된다. 예를 들어 서로의 관계를 나타내는 '전체는 각각의 부분보다 크다'와 같이 진술을 자명하고 확실하게 받아들여진다. 추론적 직관은 연역적이거나 귀납적인 구조를 갖는다. 추측직관은 미래의 사건에 대하여, 어떤 현상의 과정에 대하여 본연의 가정에 의해 표현된다. 이러한 추측은 확신의 느낌과 결합할 때만 비로소 직관이 된다. 예측직관은 문제에 대한 완전한 해를 산출하는 예비적이고 전체적인 견해를 나타낸다(이대현, 2001).

직관의 역할은 논리적이고 체계적인 수학적 기술의 구조를 전체로서 파악하는 것이 가능하고, 어떤 문제를 해결하고자 하나 막혔을 때, 해결의 방향을 시사하고, 해결 가능하도록 한고 수학적인 기술, 구조, 개념, 원리 등을 실제적 이해가 가능하도록 하며, 마지막으로 수학의 학습을 꽤 뚫기도 하고, 학습한 수학적 개념이나 지식을 현실의 문제에 응용하기도 하고, 학습에 유용하도록 한다(류희찬 · 류성림, 1997).

직관이 비록 보편적이고 확실할 지식은 보장하지 못하지만 수학적 개념 형성이나 발달에 있어서 결정적인 역할을 한다는 점을 감안한다면 직관을 교육적 대상에서 제외하는 것은 교육의 가정 중요한 영역을 포기하는 것으로 간주하여 교육적 대상으로서의 직관을 소홀히 해서는 안 될 것이다(류희찬, 1987). 또한 직관력을 향상시키기 위해서는 먼저 교사가 직관적으로 사고하는 태도가 중요하다고 본다(1997, 류희찬 · 류성림).

직관은 오류를 포함하고 있어서 그 오류에 대한 지도도 필요하다. 직관의 오류에 관한 연구는 이대현·박배훈(2001)의 연구에서 직관은 문제해결에 유용한 단서를 제공하며, 참된 지식의 근원으로 인식 되고 있으나, 직관으로 인해 문제해결 과정에서 야기되는 오류는 새로운 교수전략의 개발의 필요성을 주장하고, 그 전략으로 수학적 사실이나 개념의 형식적 해석과 직관적 해석의 적절한 조화를 이룰 수 있는 직관과 논리의 조화, 기능의 고착화 현상의 극복, 유용한 직관 모델의 개발, 메타 인지 능력의 개발을 들었다.

3. 귀납 추론

4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 12=5+7, 50=19+31, … 등과 같은 합으로 만들 수 있었던 것이다. 골드바흐는 당시 스위스 최고의 수학자 오일러에게 편지를 보내 이것이 일반적인 성질인지 물어 보았다. 오일러는 골드바흐가 말한 명제를 두 개로 나누어 정리하였다.

1) 2보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

2) 5보다 큰 모든 홀수는 세 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

오늘날 우리가 흔히 '골드바흐의 추측'이라고 말하는 것은 바로 첫 번째 명제이다. 그리고 두 번째 명제는 '골드바흐의 추측이 옳다고 확신했으나 안타깝게도 증명하는 데는 실패했다. 두 번째 명제는 1937년 러시아의 위대한 정수론자 이반 비노그라도프가 증명하였고, 첫 번째 명제에 대한 증명에 있어서 가장 최근에 괄목할 만한 성과를 남긴 사람은 중국의 수학자 첸 징런으로, 그는 2보다 큰 모든 짝수는 하나의 소수와 두 개의 인수를 갖는 합성수의 합으로 나타낼 수 있다고 증명했다. 1998년에 슈퍼컴퓨터로 400조까지는 이 추측이 참이라는 것이 증명되었고 어느 누구도 골드바흐의 추측과 맞지 않은 짝수를 찾아내지 못했지만, 그렇다고 해서 골드바흐의 추측이 완벽하게 증명된 것은 아니다. 골드바흐의 추측처럼 증명은 되지 않았지만 경험적인 귀납적으로 400조까지 참인 명제임을 알고 있다. 이런 관찰로부터 일반화로의 점진적인 상승적 사고의 전개과정을 통해서 참이 될까라는 의구심을 품고 이를 해결하기 위해서 아직까지도 많은 수학자들이 도전을 하고 있다.

이렇듯 귀납적 자세에서 수학을 접근하면 학생들에게 호기심과 흥미를 이끌어 수학자들이 하는 것을 같은 맥락으로 경험을 하게 할 수 있다. 또한 이를 증명을 통해서 논리적으로 확신을 갖게 한다면 학생들의 사고가 많은 발전을 이룰 것이다.

귀납추론은 일반화, 특수화, 유추(유비추리)로 구분할 수 있고, 일반화란 어떤 주어진 대상들의 집합에 대한 연구로부터, 그를 포함한 더 큰 대상들의 집합에 대한 연구로 나아가는 것이고, 특수화란 주어진 대상들의 집합 전체에 대한 연구로부터 그 집합 안에 포함된 더 작은 집합에 대한 연구로 나아가는 것이며, 유추는 일종의 닮음(유사함)이다. 즉, 비슷한 대상들은 관점을 달리하면 동일한 것으로 보이는 것을 말한다(2003a, Polya, 이만근역).

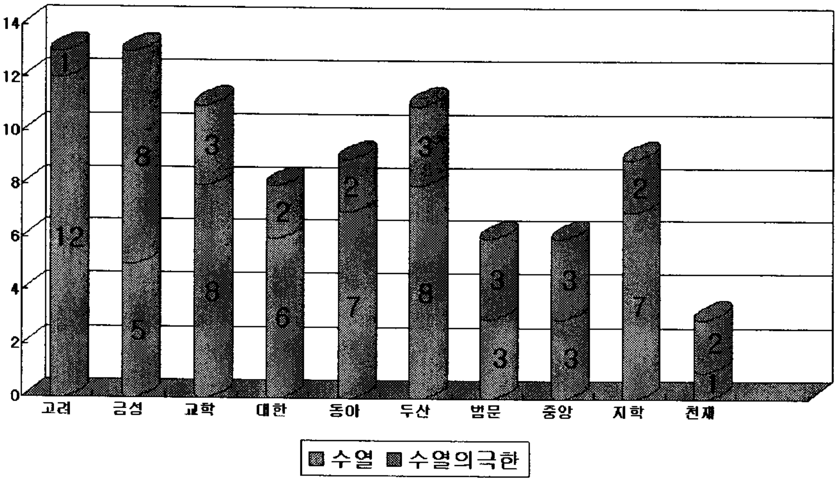
이렇듯 학교 현장에서도 논증적 증명을 하기 전에 추측하는 것을 가르쳐 추론을 이끌어내고 이를 다시 논리적으로 증명을 통해서 확신을 심어주면 학생들에도 수학을 바라보는 눈이 달라질 것이다. 이에 이 논문에서는 '수열'과 '수열의 극한' 단원에서 컴퓨터를 통한 동적이고 직관적인 시각화 자료를 통해서 공식을 추론할 수 있게 자료를 제작하고 이를 학생들에게 실험하여 추론을 어떻게 하는지 또한 어떠한 식으로 추론을 하는지를 실험하였다.

4. 무한 개념의 이해

잠재적 무한이란 어떤 것이 임의로 무한히 증대될 수 있는 것을 말하며, 실무한은 무한히 증대될 수 있는 것의 총체가 완결되어 실제로 존재함을 의미한다. 즉 무한급수에서 무한히 더 한다고 생각하는 것이 잠재적 무한이 되고, 계산된 결과 실 무한인 것이다. 학생들 자신의 경험에 의해 형성된 직관에 의한 잠재적 무한 개념이 실 무한 개념을 이해하기 어렵게 만든다. 무한 개념에 대한 이해에 대해 실 무한 개념 보다는 잠재적 무한 개념에 학생 반응은 순환 소수의 문제에서도 확인할 수 있고, 무한급수의 실 무한 답을 산출 했을 지라도 여전히 잠재적 무한 개념에 의존하고 있다(이대현, 2001, pp. 90-92). 이러한 장애를 극복하기 위해서 해결방안으로는 기존의 지식으로 해결할 수 없는 문제를 제시하여 기존의 지식과 정신적인 갈등을 느끼도록 하여야 하고, 학생들이 무한 개념을 잠재적 무한 개념에 근거하여 실 무한의 개념에 어려움을 느끼므로 실 무한 개념에 대한 직관의 자료를 개발 하여야 한다(이대현, 2001). 그러나 이대현의 자료들은 그림으로만 표현된 것이어서 이번실험에서도 많은 학생들이 그림만 가지고는 그 내용을 파악하는데 어려워하였다.

현장에서 무한의 개념을 너무 비약적이고 직관적으로 지도하고 있으며 교육과정에서도 그렇게 지도하라고 명시되어 있음을 앞에서 기술하였다. 이러한 이유로 학생들의 무한 개념이 잠재적 무한인데도 공식에서 나오는 결과로 받아들여 실 무한의 결과로 쓰고 있는 모순된 면을 보이고 있다. 이는 학생들의 잘못된 개념을 형성시킬 수 있으면 이것을 바로잡는데 컴퓨터를 이용하여 실무한의 올바른 개념형성에 도움이 되는지를 실험을 하였다.

5. 7차 교육과정 수학Ⅰ '수열'과 '수열의 극한' 단원의 직관적인 시각화 자료 분석



[그림 1] 고등학교 수학 Ⅰ 10종 교과서를 분석한 결과

위 [그림 1]은 고등학교 수학Ⅰ 10종 교과서를 분석한 결과이다. 위의 도표에서 보듯이 수열 단원과 수열의 극한 단원의 시각적으로 내용을 제시해 개수를 표로 제시하였다. 수열 단

원에서 시각적으로 내용을 많이 제시하여 주고 있으며, 특히 금성 교과서에서만 수열 단원보다 수열의 극한 단원에서 보다 많은 시각적 자료를 제시하여 주었다. 그 내용을 살펴보면 수열단원에서는 자연수 거듭제곱의 합의 내용은 모든 교과서에서 제시하였고, 수열의 극한 단원에서는 초항과 공비가 1/4 혹은 1/2인 무한등비급수의 내용이 모든 교과서에서 제시하여주고 있다. 수학사에서 제시된 티티우스 보데 법칙, 피아노 음계, 삼각수, 사각수, 하노이 탑, 시어핀스키 삼각형, 코흐 곡선이 각 교과서 마다 한 두 개씩 제시하고 있다. 모든 교과서에서 탐구활동을 통해서 이를 많이 제시를 하고 있으면 문제를 통해서 혹은 심화문제, 수행평가를 통해서 이를 제시 학생들이 학습하도록 하고 있다.

그러나 모든 교과서의 탐구활동으로 제시된 자료들이 시각적이고 기하적으로만 보여주고, 바로 논리적인 증명을 들어간 자료들이 많다. 즉, 이들 기하적인 방법과 대수적인 방법의 연관성을 설명하지 않고 있다. 선생님들도 이 부분을 자세히 설명을 하지 않고 넘어가거나 단순히 "이런 것이 있다."라고 설명하고 넘어가는 경우가 많다.

교과서는 시각화 자료를 제시하기는 하나 그 설명이 빈약하고, 그 자료 개수도 많이 제시하지 않고 매우 대수적이고 논리적으로 전개한다. 따라서 기하적이고 직관적인 시각적 자료를 많이 제시하여 학생들의 흥미와 동기유발을 유도하며 컴퓨터를 통한 동적인 시각화 자료를 이용하여 직관력을 길러 주어야 한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구대상

본 연구는 대전D고등학교에서 사례연구를 위해서 1학년 전체 중상위권에 있는 학생 5명으로서 선정하였으며, 이들의 학교 내신기준 2학기 기말고사 성적은 학생1은 81.94점, 학생2는 83.96점, 학생3은 89.36점, 학생4는 72.19점, 학생5는 84.42점으로 중위권에 속하는 학생들로 구성되어 있다.

[표 1] 6월 전국 연합학력평가 학생점수와 전체분포

학생	표준점수
학생1	127
학생2	137
학생3	126
학생4	127
학생5	124

등급	등급구분점수	도수(명)	비율(%)
1	136	22,074	4.44
2	127	33,123	6.66
3	116	65,504	13.18
4	105	82,928	16.68
5	92	99,508	20.02
6	82	84,818	17.06
7	76	54,540	10.97
8	70	35,955	7.23
9	59	18,704	3.76

6월 전국 연합학력평가에서는 [표 1]에서도 보듯이 학생2는 1등급, 학생1과 학생4는 2등급을 겨우 받았고, 학생3과 학생5는 3등급의 수준의 학생들로 중상위권의 학생임을 알 수 있다.

학생1, 학생2, 학생4, 학생5는 전혀 '수열' 단원에 대한 선수학습이 없었고, 학생3은 '등비수열의 합'까지 학원에서 선수학습을 한 학생이다. 이들을 A조에서 학생1, 학생2, 학생3을 대상으로 동적이며 직관적인 시각화 컴퓨터 자료를 활용한 수업을 진행하였고, B조에 학생4, 학생5는 정적인 직관적 시각화 이미지 자료만을 가지고 수업을 진행한 후 이들을 대상으로 정성연구를 하였다.

또한 모든 학생들에게 본 연구에 참여 하겠다는 그들의 개인적인 의사를 존중하여 선정하였다.

2. 연구 방법 및 내용

본 연구에는 5명의 사례연구는 이들에게 오후 집중 연구를 통하여 홀수의 합, 자연수의 합, 여러 가지 자연수의 합의 수열 3개와 무한등비급수 3개를 A조에 동적이며 직관적인 시각화 컴퓨터 자료를 활용한 수업을 진행하였고, B조는 정적인 직관적 시각화 이미지 자료만을 가지고 수업을 진행하였다. A조는 3명 모두에게 각각의 컴퓨터를 제공하고 학습 자료를 가지고서 수업을 진행하였고, B조 2명에게는 정적 학습 자료만을 가지고서 수업을 하였다.

이들 모두 5명에게 사전·사후 설문조사를 하였고, 수업 진행은 비디오카메라로 촬영을 하였으며 이를 분석하고, 수업 후에 학생들의 인터뷰를 통해서 정성연구를 하였다.

Ⅳ. 연구실행

1. 학생들 사전 설문 조사

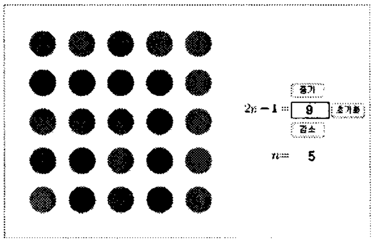
대전D 고등학교 1학년 학생 중 중위권 수준의 학생 5명의 선발하여 그의 연구에 참여할 의사를 물어 동의를 얻어 심도 있는 수업을 하고 이를 조사하였다. 5명의 학생 중에서 4명(학생1, 학생2, 학생4, 학생5)은 '수열'과 '수열의 극한'의 내용을 배우지 않은 학생이고 학생3만이 학원에서 등비수열의 합까지 배운 학생이다. 5명 모두 다 과거에 컴퓨터를 사용하여 학습을 하지 못한 학생들이다. 그림이 많이 제공되는 문제에 대해서는 "재미있다." 3명, "문제 이해에 도움이 된다."가 2명으로 응답하여 이미지가 문제를 해결하는데 보조적 역할을 하고 있음을 보여준다. '수식으로 된 문제를 그림만을 가지고 푼 적이 있는가?' 라는 질문에는 3명이 '없다'라고 하였으며, 2명은 있는데 '매우 쉬운 문제였다'라고 응답하였다. 그림으로 주어진 문제를 수식으로 풀어 보았는가? 라는 질문에서는 5명 모두 '있다'라고 응답을 하여 기하적인 것을 모두 대수적인 방정식으로 바꾸어서 문제를 풀고 있었다.

2. 수업 운영

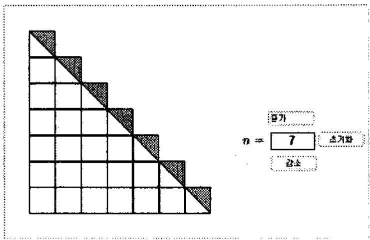
이 5명을 A, B조로 나누어 연구를 하였으며, A조는 학생1, 학생2, 학생3이며 이들에게 동적이고 직관적인 시각화 자료 사용하여 지도하였으며, B조는 학생4, 학생5로 이들에게 정적

이고 직관적 이미지만으로 지도하였다.

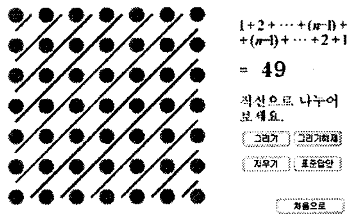
A조는 학습내용은 '수열' 단원의 홀수의 합, 자연수의 합, 수의 합 3개와 '수열의 극한' 단원에서는 무한등비급수의 합 2개, 미분기하적인 무한등비급수 3개 그리고 돋보기를 이용한 동적인 자료 2개를 가지고 학습을 하였다. B조는 아래 그림의 이미지만을 가지고 학습하였다. 또한 B 조도 학습을 마친 후에 컴퓨터를 가지고서 다시 한 번 학습내용을 학습하게 하였다.



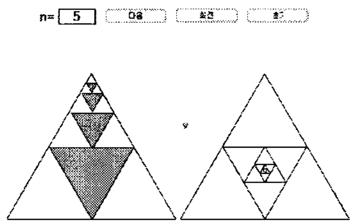
[그림 2] 홀수의 합



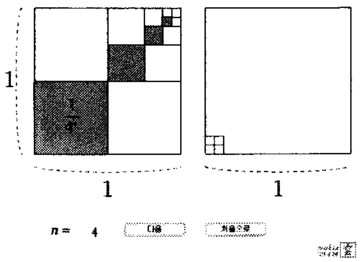
[그림 3] 자연수의 합



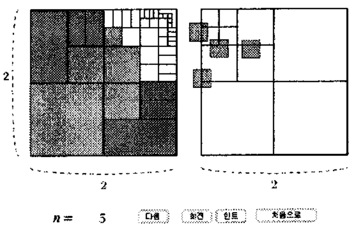
[그림 4] 수의 합



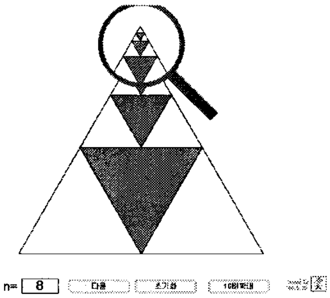
[그림 5] 무한등비급수의 합 1



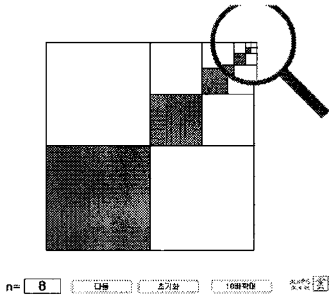
[그림 6] 무한등비급수의 합 2



[그림 7] 미분기하적인 무한등비급수의 합



[그림 8] 돋보기를 이용한 무한등비급수 1



[그림 9]. 돋보기를 이용한 무한등비급수 2

V. 연구결과 및 분석

1. 동적이며 직관적인 자료를 통한 귀납 추론

수열 단원에서의 수열의 합을 지도할 때는 교과서에서는 자연수의 합의 경우에는 파스칼이 사용하였던 방법으로 아래와 같이 지도하고 있다.

$$\begin{array}{rl} 1+\ 2\ +\ 3\ +\cdots+(n-1)+n & = S \\ +)\ \underline{n+(n-1)+(n-2)+\cdots+\ 2\ +1} & = S \\ \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{개}} & = 2S \end{array}$$

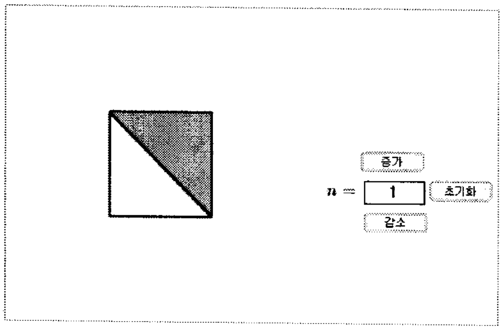
$2S=n(n+1)$

$$\therefore 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

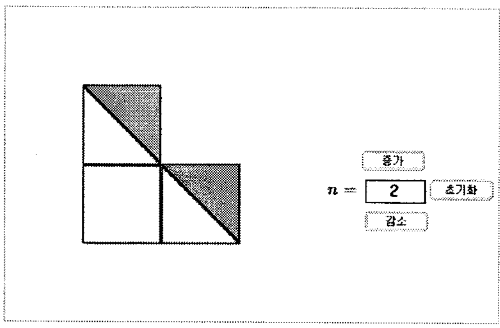
이 방법은 매우 대수적인 방법으로 학생들이 수열을 학습 할 때에 너무 공식만을 외우고 숫자만을 보고 $\sum$ 만의 성질을 학습을 하고 있어 홍미를 잃기 쉽다.

그러나 실험에 참가한 학생들은 컴퓨터의 동적인 직관적 시각화 자료를 통해서 이들 공식을 유도하였다.

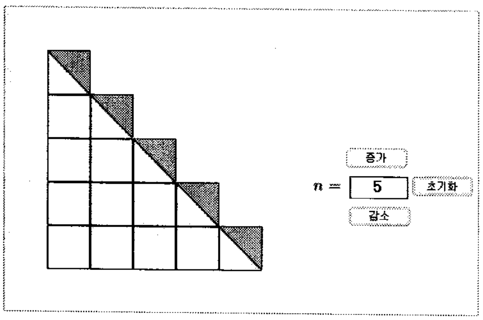
A조의 학생2는 학생은 [그림 10]처럼 컴퓨터를 활용하여 단계적으로 나아가면서 [그림 11]처럼 식을 유도하였다.



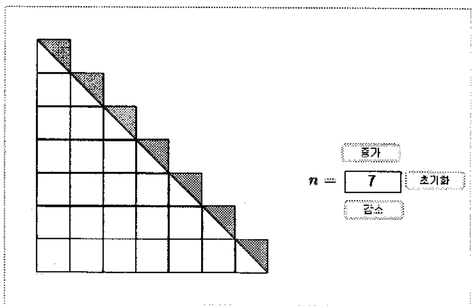
$n=1$일 때



$n=2$일 때



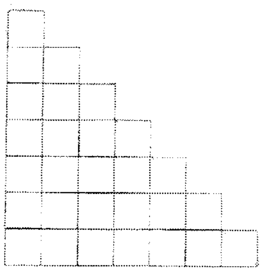
$n=5$일 때



$n=7$일 때

[그림 10] 컴퓨터를 이용한 자연수의 합의 단계별 활동

[그림11]은 B조의 학생4가 학생은 정적인 그림을 해석해서 자연수의 합 공식을 유도하였다.



[그림 11] 정적인 그림을 해석해서 자연수의 합 공식을 유도

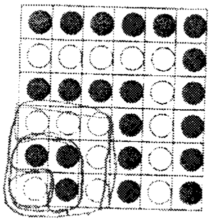
아래의 인터뷰를 보자.

교사1 : 컴퓨터를 사용하였을 때 좋았던 점은?
학생1 : 딱 그림만 던져주는 것 보다는 그 과정 밟아가는 그 단계가 유추에 대해서 좋았던 것 같아요
교사1 : 수식만 보여주었을 때와 컴퓨터를 사용하였을 때 다른 점은 ?
학생3 : 식만 보여 주었을 때는 그냥 숫자가 어떻고 식이 어떻고 이렇게 단순하게 하는데 컴퓨터로 하고 점차 적으로 단계적으로 밟아나가면서 하면은 생각도 넓어지고 사고의 확장 생각하는 수학….
교사1 : 그림만을 가지고 했을 때는 어땠어요.?
학생5 : 컴퓨터를 하기 전에요. 컴퓨터를 할 때는 클릭하면서 점점 변화가 눈에 보이는데 딱 그거는 한 그림만을 보고 생각을 해야 하니까 제가 무엇이라도 알고 있는 것과 연관 지으려고 해서 더 어려웠어요.
학생4 : 컴퓨터로 하다보면요 손쉽게 할 수 있잖아요. 그런데 그림만 보면요 막막하니까 이것저것 생각하다보면요 딴 데로 세고.
교사1 : 컴퓨터로 하니까 어땠어요?
학생4 : 빠르고 이해안가면요 반복할 수 있어서 좋았어요.

위의 인터뷰 내용에서 나타나듯이 학생들은 그림만을 가지고 식을 유도하는데 매우 어려워하는 것을 느낄 수 있었다. 학생들은 대수적인 표현에만 익숙해져 있어 즉, 방정식 풀이를 하던가, 계산을 이용해서 값을 구해야 하는데 익숙해져 있다. 이것은 현 교과과정이 너무 논리적 엄밀성 강조하고 있어 이러한 현상이 나타난다(김응태, 1984).

B조의 학생들 인터뷰에서 보듯이 학생4와 학생5는 정적인 직관적 이미지 자료만을 가지고 수업을 한 후 컴퓨터로 다시 수업을 진행하였는데 이들 모두 그림만을 보면 막막하고 무엇을 해야 할지를 모른다고 답변을 하고 있고 컴퓨터를 사용하니 빠르고 여러 번 반복할 수가 있으며, n이 1부터 원하는 횟수까지 다양하게 볼 수 있어, 귀납적 추론을 하는 것을 볼 수 있었다. 컴퓨터를 이용한 것은 매우 단계별 과정을 컴퓨터가 보여주어 변화하는 것이 눈에 들어와 그것을 보고 자연수 합의 식을 추론하는데 매우 좋은 역할을 한 다는 것을 알 수

있다. 이렇듯 컴퓨터의 역할을 통해서 학생들의 사고 과정에 도움을 줌으로써 귀납 추론을 할 수 있다.



[그림12] 직관적 자료를 통한 귀납 추론

[그림 12]는 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$을 그림으로 나타내어 보세요. 라는 문제에서 아래와 같이 응답을 학생3이 하였다. 학생3은 우리가 원하는 답과는 전혀 다르게 이번에 배웠던 것을 가지고서 만들어 내었다. 이것은 동적이며 직관적인 자료를 통한 학습이 귀납 추론 능력을 발휘하는데 도움을 준다고 할 수 있다.

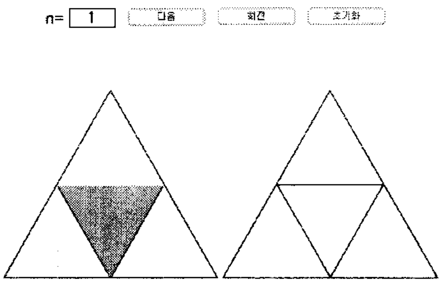
2. 실 무한 개념의 이해

5명 모두 다 실무한의 개념이 없고 잠재적 무한의 개념을 가지고 있었다. 처음에는 학생3 이외의 4명은 안된다고 하였고 학생3만 된다고 말하였다. 아래의 인터뷰를 보자

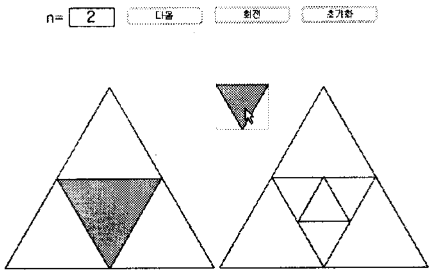
교사1 : 학생3은 된다고 했는데 그 이유는?
학생3 : 0.9999… 를 분수로 바꾸고 하면 "1과 0을 사용해서 한다." 이렇잖아요. 그것을 왜 사용하지도 모르고 식으로 이것 사용해라 이렇게만 하는 … 저희 중학교 때 그렇게 배웠는데 지금 고등학교에서도 모르니까…

학생3도 실 무한의 개념은 그냥 공식에서 되니까 '그런가 보다'라는 생각에 '된다'라고 말하여 학생3도 역시 잠재적 무한의 개념을 가지고 있었다.

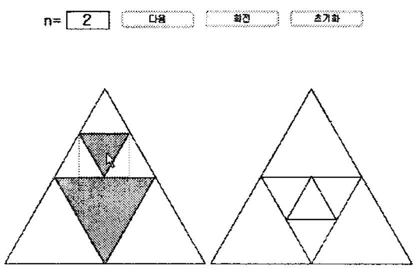
컴퓨터를 통해서 이들이 학습을 하였는데 각 단계별로 넓이를 가져다가 놓는 것을 반복하여서 이것을 통해서 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{1}{3}$ 임을 실험하였다. 아래 [그림 13]은 컴퓨터를 이용하여 동적이고 직관적인 자료를 가지고 학습을 하는 장면이다.



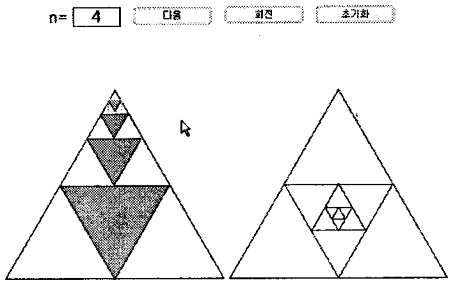
$n=1$일 때



삼각형을 옮기는 화면



움직여 놓은 화면



$n=4$일 때

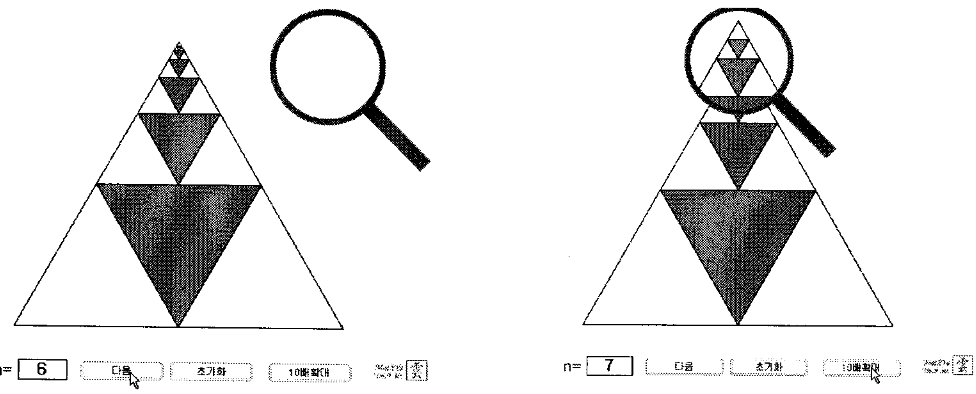
[그림 13] 컴퓨터를 이용하여 동적이고 직관적인 자료를 가지고 학습을 하는 장면

교사1 : 그림만 봐서는 어땠어요. 컴퓨터 하기 전에는 어땠어요?
학생2 : 당황했어요.
교사1 : 여기서 우리가 했던 것은 어때, 삼각형의 합이 1/3로 가는 것에서 처음에 식만 봤었을 때는 알 수 있었어요?
모두 : 아니요
교사1 : 삼각형의 면적으로 해보니까 어때요 ?
학생2 : 의외였어요.
학생3 : 그냥 무한히 가지 않고 언젠가는 끝날 거라고 생각했어요.
교사1 : 1/3이 된다는 것은 어때요?
학생2 : 예. 항상 1/3이라는 것은 0.3333…. 끝없이 계속 이어져야 되니까 그런 것을 선분으로 채운다는 느낌! 이런게 분수보다는 몇 점 몇 숫자 같은게 머릿속에 더 편안하게 들어와서 1/3 봐도 쭉 이어질 숫자일 것이라고 생각하고 안 될 것 같은 생각이 들었는데 그림으로 보니까 분수라고 생각하고 분수에서는 1/3이라고 떨어지잖아요. 그런데 수를 소수로 변환을 안 시키고도 눈에 들어오니까 같다는 느낌이 들어요.

위의 인터뷰 내용에서 보듯이 학생들 모두가 대수적인 표현에서 너무 익숙해져서 그것이 된다는 것 즉 실무한의 개념을 이해하는데 한계가 있고, 그림으로 즉, 기하적인 표현을 하여서 학습을 하였을 때 실무한의 개념을 이해나는데 도움을 준다. 컴퓨터를 사용해서 대수적 표현을 기하적으로 바꾸어 보여주며 연속해서 그 과정을 보여주어 학생들이 믿음을 더욱 줄 수가 있었다. 아래의 학생4이의 인터뷰를 보자.

교사1 : 컴퓨터를 봤을 땐 어땠어요?
학생4 : 무한 개념이잖아요. 아닌 것도 있는데 무한이라는 것을 칠판에 그리는 것을 힘들잖아요. 눌러보면 가까워지는 것을 볼 수 있잖아요 개념에 대해서 이해가 쉽고요. 연속하니까, 연속할 때 변하는 과정을 보면서 확신이 들었어요.

그 과정이 시각적으로 순서 있게 제시되므로 학생들이 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots$이 $\frac{1}{3}$임을 알 수가 있었다. 머릿속에서 다음 단계로의 이미지 전환 과정을 거쳐야 하는데 연결이 안 되어 힘들어 하는 학생들에게 컴퓨터의 도움을 받아서 귀납적 추론을 가능하게 하였다. 5단계 이상을 가면 삼각형의 이미지가 너무 작아 같다놓는데 어려움이 있었다. 이것을 해결하기 위해서 또한 학생들이 작은 부분에서도 나누어진다는 것을 확인시켜주기 위해서 컴퓨터의 이미지를 돋보기를 통해 원하는 만큼의 배율로 확대 하여 안 보이는 부분까지 보이게 제작하여 관찰할 수 있도록 제시하였다. [그림 14]는 돋보기를 활용한 동적이고 직관적인 자료로 학습을 하는 장면이다.



돋보기를 하기 전의 화면 돋보기를 통해서 원하는 만큼 확대시킨 화면

[그림 14] 돋보기를 이용한 직관적 자료

다음은 컴퓨터의 도움을 받아서 확대시켜 안 보이는 부분을 보여준 자료의 인터뷰 내용이다.

교사1 : 돋보기 자료를 봤었을 때는 어땠어요?

학생3 : 돋보기 전까지 언젠가는 끝나겠지라고 …
학생1 : 삼각형 안에서 한 것이니까 언젠가는 딱 삼각형 밖으로 안 나가고 그 안에서 만 있을 것 같아요.

이러한 것을 통해서 학생들이 정규 수업시간에 “선생님 이거 언제까지 되요?”라고 질문을 하여서 “학생이 하고 싶은 만큼 해봐”라고 한 적이 있다. 컴퓨터의 보조적 역할이 그 학습 내용에 매우 중요한 단서를 제공하여 주어 학생들이 매우 쉽게 학습 내용에 접근할 수가 있었다. 학생1과 학생3도 삼각형의 삼등분이 됨을 예상은 하였지만 그것을 눈으로 확인하여 믿음이 더욱 더 가졌다.

3. 동적인 직관적 이미지 자료의 보조적 역할

아래의 인터뷰 내용을 보자.

교사1 : 컴퓨터의 보조적 역할을 상당히 크게 했는데 1/4, 1/16, 1/64, … 보기 좋게 만 들었는데 그것은 어땠어요?
학생3 : 그것 때문에 면적이 확실히 잘 보였어요.
교사1 : 사각형은 삼각형을 한 뒤라서 어땠어요?
학생3 : 삼각형 때문에 좀 더 쉬웠어요.

정적인 직관적 이미지 자료만으로는 순차적으로 머릿속에서 그 면적을 생각하는데 어려움이 있었다. 그런데 동적인 직관적 이미지 자료의 도움으로 면적이 순차적으로 잘 보이도록 해 줌으로써 학습에 큰 도움이 되었다.

B조의 학생들이 정적인 직관적 이미지 자료로 학습을 한 후에 동적인 직관적 이미지 자료로 학습을 다시한 후의 인터뷰이다.

교사1 : 컴퓨터를 봤을 땐 어땠어요?
학생4 : 무한 개념이잖아요. 아닌 것도 있는데 무한이라는 것을 칠판에 그리는 것은 힘 들잖아요. 눌러보면 가까워지는 것을 볼 수 있잖아요. 개념에 대해서 이해가 쉽 고요. 연속하니까, 연속할 때 변하는 과정을 보면서 와닿던 것 같아요.

정적인 직관적 이미지 자료는 머릿속에서 그 다음을 생각하여야 하는데 컴퓨터를 활용한 동적인 직관적 이미지 자료의 도움을 받아 빠르게 그 현상을 확인하고 쉽게 그 과정을 볼 수 있어서 학습의 효과가 정적인 직관적 이미지 자료 보다는 동적인 직관적 이미지 자료가 매우 효과적이다. 아래의 인터뷰를 보자.

교사2 : 먼저 지필 상황에서 나름대로 충분히 고민을 많이 해서 어려운 부분이 어디 일까 하는 과정을 거친 후에 컴퓨터를 상용해 보는 것은 어떨까요?
학생4 : 고민하고서 봐야지 너무 답 먼저 너무 쉽게 접근하면 단편적인 것을 보는 거 잖아요 아무 생각 없이 그 현상만 보잖아요. 여러 가지 생각을 해 보고 …
교사2 : 학생3 학생은요?

학생3 : 예전부터 머 같은 거 계속 반복한 거 나오면 잘라서 해보고 싶었는데 이것이 직접 안 되니까 컴퓨터하면 되게 편하잖아요. 저절로 되고 생각을 하는 것이 아까 지금 이 문제를 생각을 했었는데 1부터 n까지 가고 n-1부터 1까지 그건 생각을 했는데 앞에서 생각을 못했듯이 첫 번째 문제에서 생각을 못했는데 두 번째 문제에서 생각을 했잖아요. 생각을 먼저 하면은 다음에 그 응용문제가 나왔을 때 훨씬 더 하기 편하고 컴퓨터가 더 추가가 되면 더 폭을 넓혀주어 무한이라는 것을 가깝게 느낄 수 있어요.

컴퓨터가 모든 수업을 할 수는 없다. 즉 컴퓨터가 만사라는 것이 아니다. 위에서 학생4와 학생3의 인터뷰에서 보듯이 먼저 그림으로 생각을 해보고 그것을 컴퓨터로 확인을 하는 과정을 밟는 학습이 효과적이다. 컴퓨터에 너무 의지해서도 안 되고 컴퓨터가 완전히 다 해준다고 생각을 해서는 안 된다. 컴퓨터는 하나의 해석을 하기 위한 도구이고 보조도구로 존재해야 한다. 또한 컴퓨터의 수업은 장시간 사용할 경우 학생들의 집중력이 저하되어 역효과를 내기 때문에 학습의 필요한 부분에 최소한의 시간으로 투입을 하여야 한다.

4. 컴퓨터를 통한 동적인 직관적 이미지를 통한 수업의 흥미와 태도

사후 설문지에서 수업에서 느낀 점을 말하라는 질문에서 학생4는 "새로운 문제 접근에 약간 당황했지만 재미있었다.", 학생1은 "이해하기 어려웠던 공식을 그림으로 하면 더 쉽게 이해할 수 있게 하는 것 같다."와 같이 응답을 하였고 다른 학생들도 같은 응답을 하여 흥미롭게 문제를 접근해 나갔으며, 새로운 방식에 진지하게 수업을 듣는 모습을 보여주었다. 아래의 인터뷰를 보자.

교사1 : 이러한 자료를 수업 어디에 했으면 좋겠어요?
학생3 : 초반에 개념 잡을 때.
교사1 : 개념을 도입할 때는 식을 도입하는 것이 더 좋은 방법 같은데 !
학생1 : 다가오지는 않아요.
학생3 : 식을요 처음에 했을 때 너무 생소한데 삼각함수에서는요 그래프와 식을 동시에 이용하잖아요. 그런데 여각 공식 이런거 단순히 알려 주었을 때는 모르겠는데 그림을 통해서 하면은 더 쉽듯이 그림하고 식을 같이 나가는 것이 더 좋아요
학생1 : 두 점 사이의 거리 구하는 공식 그런 것도 …
학생3 : 식 먼저 말고 같이 그림이 있다면 같이 …
학생1 : 식을 먼저 써주시면 지금도 수학 수업할 때 식만 딱 써놓고 이건 이거야 하면 답답한데 그것을 그림으로 돌려서 설명해 주시면 이렇게 되는구나 …
학생2 : 이해가 안 가는 것이 없을 것 같아요

학생들도 "이들 동적인 직관적 시각화 자료를 수업의 단원 도입 시기에 활용을 하는 것이 효과적이다."라고 응답을 하였다. 논리적인 식으로 도입하는 것에서 개념을 잡기가 너무 어려워하고 있어 시각적인 자료의 도입으로 흥미를 이끌 수 있고 수업의 진지한 모습을 볼 수 있으며 개념의 이해하는데 더 효과적일 것이다. 이에 더 많은 동적인 직관적 시각화 자료를 개발 보급 더 많이 수업에 활용되어야 한다.

Ⅵ. 결론

"추측하는 것을 가르치자(Let us teach guessing!)" (2003b, Polya, 이만근역, p. 266). 학교 수업에서 유추나 예시로서 학생들의 흥미를 가르쳐 흥미를 이끌어 내야 한다. 수열 단원에서는 그 내용들이 상당히 적은 수를 제시하고 있으며 교과서 마다 다른 내용들로 그 접근법도 논리적 증명과의 연계성이 없이 간단한 설명으로 넘어가거나 문제로서 대체하고 있다. 이번 실험에서 우리는 학생들에게 정적인 직관적 시각화 자료로는 학생들이 다음 단계로의 추론이 어려워 이들에게 도움을 줄 수 있는 컴퓨터를 동적인 직관적 시각화 자료를 통해서 추론을 이끌어 낼 때 단계별로 보여주어 쉽게 추론을 할 수 있었고, 무한 개념의 올바른 이해를 위해서 동적인 직관적 시각화 자료를 통해서 학생들이 실무한의 개념을 이해하는데 도움을 주었다. 또한, 흥미로웠고 개념을 이해하기 위해서 도입 부분에서 자료를 제공하여야 한다는 학생들의 인터뷰 내용도 있었다. 더 많은 도입 부분에서의 자료를 개발하고 직관적 추측을 통해서 중위권 학생들에게는 동적인 직관적 시각화 자료를 통해서 흥미와 추론을 이끌어 내고 이를 다시 논리적 증명으로 이어가는 것이 필요하다. 이 논문에서는 추론 과정만을 보았는데 추론 후 논리적 증명까지의 과정을 관찰하여 어떠한 연관성이 있는지를 추후 연구 문제로 남기겠다.

GSP나 Cabri와 같은 탐구형 프로그램의 기하영역에서 많은 자료들이 있고 이를 활용하여 학교 현장에서도 지도를 하고 있고 효과를 나타내고 있다. 그러나 수열 단원에서 사용될 탐구형 프로그램이 없으며 일부 정적인 직관적 시각화 자료들이 있어 이를 활용하여 현장연구를 통해서 그 효과를 검증하였다(박근덕, 2003). 이대현(2001)의 논문에서도 정적인 직관적 시각화 자료를 통한 논문을 집필하였으나 컴퓨터를 활용한 동적인 직관적 시각화 자료가 웹의 검색에서도 일반화 되어 있지 않은 자료들은 다수 볼 수 있었으나 일반화된 자료를 찾을 수가 없었다. 이에 컴퓨터를 활용한 동적인 직관적 시각화 자료를 일반화된 자료로 제작을 하였고 이를 이번 논문에 학생들 대상으로 정성연구를 하여 그 효과를 확인하였다. 수열단원에서 탐구형 소프트웨어로는 구현이 매우 힘들고 불가능할 정도이다. 프랙탈의 프로그램으로 몇 가지는 구현이 가능하나 이도 매우 구현자체가 어렵다. 이에 탐구형 소프트웨어의 학생들에게 다른 기능을 몰라도 버튼만으로 구현시키고 학생 스스로가 할 수 있는 자기주도적인 학습이 가능한 동적인 직관적 시각화 자료의 개발도 이루어져야 하고 또한 그에 대한 추가 연구도 필요하다.

참고문헌

공현성 (2001). Flash ActionScript 바이블, 정보문화사.

교육부 (1997). 수학과 교육과정(교육부 고시 제 1997-5호), 대한교과서 주식회사.

기선희 (2000). 수열의 합 구하기 지도에 관한 연구, 중앙대학교 교육대학원.

김내희 (2005). 제7차 교육과정에 따른 학교수학의 시각화에 관한 연구, 전주대학교 교육대학원.

김응태 외 2인 (1984). 《수학교육학 개론》, 서울:(주)지학사.

김현승 · 박선주 (2002). 수열의 합 지도방법에 관한 연구, 교과교육연구회, 제23권 제1호.

류희찬 (1998). 컴퓨터를 이용한 수학교육의 실제, 대한수학교육학회.

류희찬 · 류성림 (1997). 수학교육에서의 직관에 대한 고찰, 대한수학교육학회 제7권 2호.

문광호 (1999). 중 · 고등학교 수학의 시각화에 관한 연구, 서울대학교 대학원.

문광호 · 우정호 (1999). 중 · 고등학교 수학의 시각화, 대한수학교육학회지 제1권제1호.

박규홍 외 5인 (2005). 수학 I 교과서, 교학사 출판사.

박근덕 (2002). PWWs를 활용한 수학과 교수 학습 과정 연구, 제 7회 강원 중등 수학교육 연구 세미나집.

박근덕 (2003). 고등학교 수학과 교수 학습 과정에서의 증명의 시각화에 관한 연구, 2003년 현장교육연구보고서.

박배훈 외 6인 (2005). 수학 I 교과서, 법문사 출판사.

박선화 (2000). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구, 대한수학교육학회지, 제10권 2호.

박희송 (2004). 시각화를 통한 수학 교수-학습 과정에 관한 연구. 중앙대학교 교육대학원.

신동선, 류희찬 (1999). 수학교육과 컴퓨터, 서울 경문사.

신은주 · 이종희 (2005). 구체와 추상을 연결하는 모델의 중재기능 분석, 대한수학교육학회지, 제15권 1호.

오선희 (2001). 중등학교 수학에서 증명의 시각화에 관한 연구, 성균관대학교 교육대학원.

우정호 (2000). 《수학 학습-지도 원리와 방법》, 서울대학교 출판부.

우정회 외 5인 (2005). 수학 I 교과서, 대한교과서 출판사.

이강섭 외 6인 (2005). 수학 I 교과서, 지학사 출판사.

이기철 (2001). 플래시5 액션스크립트 인터렉티브 무비 만들기, 영진출판사.

이대현 (2001). 수학 문제해결 과정에서 고등학생들의 직관적 사고의 분석, 한국교원대학교.

이대현 (2003). 수학교육에서 시각적 표현에 관한 소고, 한국수학교육학회 논문집 제42권 제5호, p638-640.

이만근외 4인 (2003a). 《수학과 개연추론 I》, 교우사.

이만근외 4인 (2003b). 《수학과 개연추론 II》, 교우사.

이지요 (1993). 수학교육에서의 시각화에 관한 연구 (LOGO 프로그래밍을 중심으로), 한국교원대학교 박사학위논문.

임재훈 외 9인 (2005).수학 I 교과서, 두산 출판사.

장혜원 (1997). 수학학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구, 서울대학교 박사학위논문.

정광식 외 2인 (2005). 수학 I 교과서, 동아서적 출판사.

조태근 외 4인 (2005). 수학 I 교과서, 금성 출판사.

차은경 (2005). 시각화가 수학적 태도 및 개념 이해도에 미치는 영향, 강원대학교 교육대학원.

최봉대 외 5인 (2005). 수학 I 교과서, 중앙교육 출판사.

최상기 외 5인 (2005). 수학 I 교과서, 고려 출판사.

최영선 (2005). 추론 능력 성장을 위한 수학과 수업모형의 설정, 강원대학교 교육대학원.

최용준 외 1인 (2005). 수학 I 교과서, 천재 출판사.

한국교육개발원 (1990). 학교 컴퓨터 교육 발전 과제 탐색, 세미나 자료.

Macromedia (2000). Flash5 ActionScript Reference Guide, macromedia.

macromedia (2003). FlashMX 2004 ActionScript Reference Guide, macromedia, Inc.
macromedia (2003). FlashMX 2004 Using Components, macromedia, Inc.
NCTM (1998). Curriculum and evaluation sandards for school mathematics. Reston. Va : The conncil.
Hierbert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics teaching and Learning (pp. 65-100). New York; MacMillian.
Jurdak, M., & Shahin, I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school; the case of constructing solids. Educational studies in mathematics, 47, 297-315.
Lave, J. (1988). Cognition in practice; Mind, mathematics, and culture in everyday life. New York; Cambridge University Press.
Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). Mathematics in the streets and in schools. Cambridge, England; Cambridge University Press.
Saxe, G. B. (1991). Culture and cognitive development; Studies in mathematical understanding. Hillsdale, NJ; Lawrence Erlbaum Associates.
David T. (1991). A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics,

A Study of the Effect of Computer's Visual Data about Understanding Concept of Sequence with High School Student

Jung, Inchul[4) · Hwang, Woon-gu[5) · Kim, Taeg-su[6)

Abstract

This study investigated how high school students predict the rule, the sum of sequence for the concept of sequence, for the given patterns based on inductive approach using computers that provide dynamic functions and materials that are visual. Students for themselves were able to induce the formula without using the given formula in the textbook. Furthermore, this study examined how these technology and materials affect students' understanding of the concept of actual infinity for those who have the concept of the potential infinity which is the misconception of infinity in a infinity series. This study shows that students made a progress from the concept of potential infinity to that of actual infinity with technology and materials used I this study. Students also became interested in the use of computer and the visualized materials, further there was a change in their attitude toward mathematics.

Key Words : Mathematical visualization, Intuition, Induction, Potential infinity, Actual infinity.

4) Chonnam National University (ijung@jnu.ac.kr)
5) Yuseong High School (michol92@edurang.net)
6) Daejeon Foreign Language High School (wpkts@hanmail.net)