

등방성 직사각형의 3변 고정 1변 자유 얇은 탄성판에 대한 유한차분법의 수치해

Finite Difference Numerical Solutions for Isotropic Rectangular Thin Elastic Plates with Three Edges Clamped and the Other Free

서 승 남*
Seung-Nam Seo*

요 지 : 판에 작용하는 등분포하중과 등변분포하중에 의한 휨 모멘트를 계산하기 위해 무차원 방정식에 대한 유한 차분법으로 제시하고 변장비와 격자수에 따른 수치해의 수렴을 분석하였다. 유한 차분법의 수치해는 격자점을 최대 11,520개까지 사용하여 해를 구하였고 변장비에 따른 최적 격자수를 제시하였다. 본 수치해는 Levy형 해석해와 달리 자유단의 모멘트 경계조건을 만족하며 자유단과 고정단의 교점부근에서는 특이한 모멘트 분포를 보인다. 등분포하중과 등변분포하중에 의한 Levy형 해석해의 무차원 휨 모멘트 값과 본 결과를 비교하였으며 특이한 분포를 보이는 자유단과 그 부근을 제외하면 두 값은 동일한 것으로 나타났다.

핵심용어 : 직사각형 판의 유한 차분해, 3변 고정 1변 자유판, 휨 모멘트 계산, 수렴검토

Abstract : In order to calculate bending moments of rectangular plates with three edges clamped the other free subjected to both a uniform load and a triangular load, a finite difference equation for the non-dimensional governing equation are presented and numerical solutions with different aspect ratios and/or number of grid points are analyzed. The finite difference solutions are obtained by use of grid points up to 11,520 and the optimum grid points according to aspect ratios of the plate are presented as well. The obtained numerical solutions are shown to satisfy the given x moment boundary condition at the free edge, which can not be satisfied in Levy's analytical solutions and peculiar behaviour of the calculated moments is observed around the corners between the free edge and fixed ones. The numerical solutions of bending moments subjected to both a uniform load and a triangular load are compared with the corresponding analytical solutions which are shown in very good agreement on the solution domain except the neighborhood of the free edge.

Keywords : finite difference solution of rectangular plates, plates with three edges clamped and the other free, bending moment, convergence test

1. 서 론

케이스 벽체와 잔교 상판 등의 항만구조물은 3변 고정 1변 자유 얇은 판으로 가정하여 설계한다(해양수산부, 1999; 日本港灣協會, 1988). 휨 모멘트는 판의 배근설계에 입력 자료로 사용되기 때문에 안전한 배근설계를 위해서는 올바른 휨 모멘트 계산이 필요하고 3변 고정 1변 자유 판의 휨 모멘트는 해석적 방법, 유한요소법, 변분법, 유한

차분법, 경계요소법 등을 사용하여 계산할 수 있다(Ventsel and Krauthammer, 2001). 그러나 3변 고정 1변 자유판에 대한 해는 4변 고정판, 4변 단순 지지판 등과 달리 기존 문헌(Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1989; Reddy, 1999)에서 자세히 다루지 않았거나 해의 정밀도가 떨어지는 것으로 분석된다.

Timoshenko and Woinowsky-Krieger(1959)의 해석해는 서(2006)가 밝힌 바와 같이 변장비가 작은 경우에만 해가

*한국해양연구원 연안개발연구본부 책임연구원(Coastal Engineering Research Department, KORDI, Ansan P.O. Box 29, Seoul 425-600, Korea. snseo@kordi.re.kr)

Table 1. Comparisons of computed bending moment solution of rectangular plates ($\nu=1/6$) with three edges clamped the other free subjected to a uniform load with unit one

λ	$(a, 0)$				$(0, 0)$		$(a, \pm b/2)$	
	FD solution		Analytical solution		FD	Anal	FD	Anal
	w	M_y	w	M_y	w	M_y	w	M_y
0.6	0.00271	0.0336	0.00222	0.0322	-0.0554	-0.0541	-0.0745	-0.0782
0.7	0.00292	0.0371	0.00249	0.0370	-0.0545	-0.0553	-0.0782	-0.0820
0.8	0.00308	0.0401	0.00264	0.0401	-0.0535	-0.0560	-0.0812	-0.0835
0.9	0.00323	0.0425	0.00273	0.0419	-0.0523	-0.0563	-0.0836	-0.0838
1.0	0.00333	0.0444	0.00277	0.0429	-0.0510	-0.0565	-0.0853	-0.0836
1.25	0.00345	0.0467	0.00278	0.0435	-0.0470	-0.0567	-0.0867	-0.0830
1.5	0.00335	0.0454	0.00276	0.0434	-0.0418	-0.0568	-0.0842	-0.0829

15 terms in the analytical solution are used.

존재하여 실용성이 거의 없다. 한편 3변 고정 1변 자유판에 대해 Timoshenko and Woinowsky-Krieger(1959)는 해석해 대신 유한차분법으로 계산한 수치해를 제시하였고 서(2006)가 堀井와 本(1968)의 방법을 수정하여 계산한 해와는 상당한 차이가 있다.

Table 1은 고정단은 $x=0$ 와 $y=\pm b/2$ 에 자유단은 $x=a$ 에 각각 위치하고 변장비(λ)가 a/b 로 정의된 판에 대해 유한차분법으로 처짐(w)과 모멘트(M_x, M_y) 계산한 결과와 위에 언급한 해석해에 15개의 항을 사용하여 계산 결과를 비교하였다. 표에는 포와송 비(Poisson's ratio, ν)가 1/6인 경우에 대해 계산한 무차원 값이며 처짐에 b^4/D (여기서 D 는 휨 강성계수)를, 모멘트에는 b^2 을 각각 곱하면 크기 1인 하중에 대한 처짐과 모멘트 값이 얻어진다.

Table 1에서 해석해에 대한 유한차분해의 상대오차의 범위를 정리하면 최대변위가 발생하는 점($a, 0$)에서의 처짐은 16.7%~24.1%, M_y 모멘트는 최대 7.4%에 이르며 최대 M_x 모멘트가 발생하는 점($0, 0$)에서의 상대오차는 -26.4%~2.4%에 달한다. 한편 최대 M_y 모멘트가 발생하는 점 ($a, \pm b/2$)에서는 서(2006)가 밝힌 바와 같이 해석해의 항의 수를 늘리면 계산된 모멘트의 크기가 작아져 정확도가 떨어지는 것으로 판단되어 비교하지 않았으며 이에 대해서는 뒤에 자세히 기술하기로 한다. 이러한 차이는 유한차분법에 사용한 계산 격자의 수와 차분식에 의한 것으로 판단되나 이와 관련된 정보가 없어 그 원인을 분석하지 못하였다.

한편 서(2006)는 고정단과 자유단이 접하는 교차점($a, \pm b/2$)에서 기존의 해석적인 방법과 유한요소 상용 프로그램인 "SAP2000" 또는 "MIDAS"로 계산한 결과 또한 자유단 경계조건을 만족하지 않음을 밝혔다. 따라서 자유단의 경계조건을 만족하지 않음으로 인한 영향이 미치는 범위와 적절한 처짐 특성의 값을 규명하기 위한 연구의 필요성이 제기되었다. 본 논문에서는 위의 현상을 분석하기

위하여 유한차분법을 사용하였고 최대 11,520개의 격자점에 대한 수치해를 구하였고 이를 이용하여 해의 수렴과 특성을 분석하였다.

제 2절에서는 직사각형인 3변 고정 1변 자유판에 대한 무차원 식을 유도하고 제 3절에서는 유도된 무차원 식에 대한 유한차분법을 기술하였다. 그리고 제 4절에서는 유한차분법에 의한 해를 구하여 위에 기술한 해석해와 다른 새로운 결과를 제시하였다.

2. 무차원 방정식

등방성 직사각형의 3변 고정 1변 자유 얇은 탄성판 ($0 \leq x \leq a, -b/2 \leq y \leq b/2$)에 분포하중 $q(x, y)$ 가 작용할 때 처짐 $w(x, y)$ 에 대한 지배방정식은 식 (1), 경계조건은 식 (2)로 각각 나타낼 수 있다. 여기서 첨자 변수는 차원이 있는 변수이며 판의 휨 강성계수(D)는 $Eh^3/12(1-\nu^2)$ 으로 정의되고 E, ν 그리고 h 는 각각 판의 탄성계수, 포와송 비 그리고 판의 두께이다. 또한 자유단은 $x=a$ 에, 좌표 원점은 판의 좌측 고정단 중앙에 각각 위치하는 것으로 설정하였고 휨 모멘트는 식 (3)으로 주어진다(Fig. 1).

$$\frac{\partial^4 w_*}{\partial x_*^4} + 2 \frac{\partial^4 w_*}{\partial x_*^2 \partial y_*^2} + \frac{\partial^4 w_*}{\partial y_*^4} = \frac{q_*}{D} \tag{1}$$

$$\begin{cases} w_* = 0, \frac{\partial w_*}{\partial x_*} = 0 & \text{at } x_* = 0 \\ \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} + \nu \frac{\partial^2 w_*}{\partial y_*^2} = 0, \frac{\partial^3 w_*}{\partial x_*^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_*}{\partial x_* \partial y_*^2} = 0 & \text{at } x_* = a \\ w_* = 0, \frac{\partial w_*}{\partial y_*} = 0 & \text{at } y_* = \pm b/2 \end{cases} \tag{2}$$

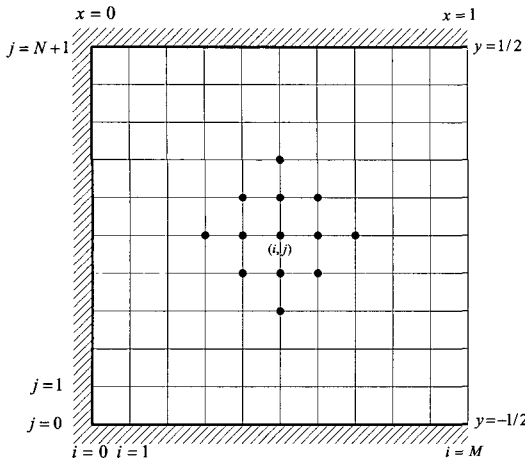


Fig. 1. Computational nodal points for present finite difference method.

$$\begin{cases} M_x^* = -D \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_*^2} + \nu \frac{\partial^2 w^*}{\partial y_*^2} \right) \\ M_y^* = -D \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y_*^2} + \nu \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_*^2} \right) \end{cases} \quad (3)$$

수식 전개에 용이함과 변수를 줄이기 위해 식 (1)~식 (3)에 대한 관련 무차원식을 사용하고 이를 위하여 주어진 판의 대표적인 특성인 변의 길이와 작용하는 최대하중(p_0)을 이용한 식 (4)를 사용한다.

$$\begin{cases} x_* = ax \\ y_* = by \\ q_* = q_0 a \\ w_* = \frac{q_0 a^4}{D} w \\ M^* = a^2 q_0 M(a \leq b) \text{ or } b^2 q_0 M(a > b) \end{cases} \quad (4)$$

식 (4)를 지배방정식 (1)에 대입하여 정리하면 무차원 지배방정식인 식 (5)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(\frac{a}{b} \right)^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (5)$$

수식유도의 편의상 식 (5)에서 판의 변장비 (a/b)를 λ 로 정의하면 단위 길이를 갖는 정사각형 판의 문제로 바뀌고 경계조건에 대한 무차원식은 식 (6)이 된다.

$$\begin{cases} w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 & \text{at } x = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \lambda^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 & \text{at } x = 1 \\ w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0 & \text{at } y = \pm 1/2 \end{cases} \quad (6)$$

한편 휨 모멘트에 대한 무차원식은 변장비가 1보다 크거나 같을 경우와 그 밖의 경우로 나누고 작은 변을 기준으로 무차원하여 식 (7)로 표현한다.

$$\begin{cases} M_x^* = a^2 q_0 M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_*^2} + \nu \frac{\partial^2 w^*}{\partial y_*^2} \right] \\ M_x = - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y = - \left[\lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \end{cases}, \lambda \leq 1 \quad (7a)$$

$$\begin{cases} M_x^* = b^2 q_0 M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_*^2} + \nu \frac{\partial^2 w^*}{\partial y_*^2} \right] \\ M_x = -\lambda^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y = - \left[\lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \end{cases}, \lambda \leq 1 \quad (7b)$$

식 (4)와 식 (7)은 Table 1에서 무차원에 사용된 값과 다름에 주목하기 바란다. 그러나 이 후의 수식에서는 식 (4)와 식 (7)에서 정의한 값을 이용하여 식을 전개하고 계산하였다.

3. 유한 차분식

직사각형의 3변 고정 1변 자유판에 대한 유한차분법은 주어진 영역을 직선 격자선으로 분할해도 경계에서 분할에 의한 오차는 발생하지 않고 지배방정식과 경계조건에 대한 이산화식의 유도가 다른 방법에 비해 비교적 쉽다. 일반적으로 정밀한 수치해를 구하기 위해 격자점의 수를 늘리거나 또는 주어진 방정식에 고차의 차분법을 사용하면 격자수를 줄일 수 있으나 대신 이산화방정식을 구성하기 어렵다. 이러한 점들을 고려하여 본 논문에서는 2차의 정밀도를 갖는 차분법을 사용하였다.

Fig. 1과 같이 판을 x 방향으로 $M+1$ 개의 등간격 격자선 ($i=0, \dots, M$)과 y 방향으로 $N+2$ 개의 등간격 격자선 ($j=0, \dots, N+1$)을 이용하여 나누어 격자망을 구성한다.

고정단은 $i=0, j=0$ 그리고 $j=N+1$ 에, 자유단은 $i=M$ 에 각각 그 위치를 설정한다. 그러면 고정단에서는 처짐은 경계조건인 식 (6)으로 주어지며 판에 하중이 작용하여 발생한 처짐($w_{i,j}$)은 이를 제외한 $M \times N$ 개의 격자점에서 구하게 된다.

지배방정식 (5)에 중앙차분법을 이용하여 격자점(i, j)에서 차분하면 식 (8)을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{w_{i-2,j} - 4w_{i-1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i+1,j} + w_{i+2,j}}{\Delta x^4} \\ + \lambda \frac{4w_{i,j-2} - 4w_{i,j-1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j+1} + w_{i,j+2}}{\Delta y^4} \\ \left(\begin{array}{l} w_{i-1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i+1,j-1} \\ - 2w_{i-1,j} + 4w_{i,j} - 2w_{i+1,j} \\ + w_{i-1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i+1,j+1} \end{array} \right) \\ + 2\lambda^2 \frac{\quad}{\Delta x^2 \Delta y^2} \end{array} \right\} \quad (8)$$

y 와 x 와 격자간격의 비($\Delta y/\Delta x$)를 r 로 표기하여 식 (8)을 정돈하면 격자점(i, j)에 대한 차분식 (9)을 얻을 수 있다.

$$\left\{ \begin{array}{l} r^4 w_{i-2,j} \\ + 2r^2 \lambda^2 w_{i-1,j-1} - 4r^2 (\lambda^2 + r^2) w_{i-1,j} + 2r^2 \lambda^2 w_{i-1,j+1} \\ + \lambda^4 w_{i,j-2} - 4(\lambda^4 + r^2 \lambda^2) w_{i,j-1} + (6r^4 + 8r^2 \lambda^2 + 6\lambda^4) w_{i,j} \\ - 4(\lambda^4 + r^2 \lambda^2) w_{i,j+1} + \lambda^4 w_{i,j+2} \\ + 2r^2 \lambda^2 w_{i+1,j-1} - 4r^2 (\lambda^2 + r^2) w_{i+1,j} + 2r^2 \lambda^2 w_{i+1,j+1} \\ + r^4 w_{i+2,j} \end{array} \right\} = \Delta y^4 q_{i,j} \quad (9)$$

식 (9)의 차분식은 Fig. 1에 채운 원으로 표시된 격자점에서만 값을 가져 행렬 요소의 대부분이 0인 sparse matrix로 표현되는 행렬식이 된다. 만일 격자점이 경계 부근에 위치하는 경우 식 (9)의 일부 미지수는 정의된 영역밖에 위치하게 되며 이들을 계산영역 안의 미지수로 변환하기 위하여 주어진 경계조건을 이용한다.

경계조건 식 (6)에서 고정단에서는 처짐이 0이므로 식 (10)이 된다.

$$\begin{cases} w_{0,j} = 0 & , j=0, \dots, N+1 \\ w_{i,0} = 0 & , i=0, \dots, M \\ w_{i,N+1} = 0 & , i=0, \dots, M \end{cases} \quad (10)$$

고정단에서 처짐각도 0이므로 이를 중앙차분법으로 차분하면 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} w_{i,-1} = w_{i,1} & , i=0, \dots, M \\ w_{i,N+2} = w_{i,N} & , j=0, \dots, N+1 \\ w_{1,j} = w_{-1,j} & , j=0, \dots, N+1 \end{cases} \quad (11)$$

자유단에서의 휨 모멘트 조건과 반력조건에도 중앙차분법을 이용하여 차분하면 식 (12)와 식 (13)을 각각 얻게 된다.

$$\begin{aligned} w_{M+1,j} &= -w_{M-1,j} + 2w_{M,j} - \frac{v\lambda^2}{r^2} (w_{M,j-1} - 2w_{M,j} + w_{M,j+1}) \\ &= -w_{M-1,j} - \frac{v\lambda^2}{r^2} w_{M,j-1} + 2\left(1 + \frac{v\lambda^2}{r^2}\right) w_{M,j} - \frac{v\lambda^2}{r^2} w_{M,j+1} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} w_{M+2,j} &= w_{M-2,j} \\ &+ \frac{(2-v)\lambda^2}{r^2} w_{M-1,j-1} - 2\left[1 + \frac{(2-v)\lambda^2}{r^2}\right] w_{M-1,j} \\ &+ \frac{(2-v)\lambda^2}{r^2} w_{M-1,j+1} \\ &- \frac{(2-v)\lambda^2}{r^2} w_{M+1,j-1} + 2\left[1 + \frac{(2-v)\lambda^2}{r^2}\right] w_{M+1,j} \\ &- \frac{(2-v)\lambda^2}{r^2} w_{M+1,j+1} \end{aligned} \quad (13)$$

유도된 식 (11)~(13)은 계산구역 내부점과 외부점의 관계를 나타내며 이를 이용하여 외부점을 내부점으로 치환시킬 수 있다. 식 (12)로부터 식 (14)의 관계식이 유도된다.

$$w_{M+1,j} = \begin{cases} -2\alpha w_{M,1} & , j=0 \\ -w_{M-1,1} + 2(1+\alpha)w_{M,1} - \alpha w_{M,2} & , j=1 \\ -w_{M-1,j} - \alpha w_{M,j-1} + 2(1+\alpha)w_{M,j} - \alpha w_{M,j+1} & , 1 < j < N \\ -w_{M-1,N} - \alpha w_{M,N-1} + 2(1+\alpha)w_{M,N} & , j=N \\ -2\alpha w_{M,N} & , j=N+1 \end{cases} \quad (14)$$

여기서 α 는 $v\lambda^2/r^2$ 로 의미하고 식 (15)는 식 (13)으로부터 얻어진다.

$$\begin{aligned} w_{M+2,1} &= w_{M-2,1} - 2(1+\beta)w_{M-1,1} + \beta w_{M-1,2} \\ -\beta w_{M+1,0} + 2(1+\beta)w_{M+1,1} - \beta w_{M+1,2} & , j=1 \end{aligned} \quad (15a)$$

$$w_{M+2,j} = w_{M-2,j} + \beta w_{M-1,j-1} - 2(1+\beta)w_{M-1,j} + \beta w_{M-1,j+1} - \beta w_{M+1,j-1} + 2(1+\beta)w_{M+1,j} - \beta w_{M+1,j+1}, \quad 1 < j < N \quad (15b)$$

$$w_{M+2,N} = w_{M-2,N} + \beta w_{M-1,N-1} - 2(1+\beta)w_{M-1,N} - \beta w_{M+1,N-1} + 2(1+\beta)w_{M+1,N} - \beta w_{M+1,N+1}, \quad j = N \quad (15c)$$

여기서 $\beta = (2-\nu)\lambda^2/\nu^2$ 이다. 식 (15)에서 주목해야할 것은 계산구역 밖에 위치하는 격자점 $(M+1, 0)$ 와 $(M+1, N+1)$ 에서의 처짐은 0이 아닌 값을 가질 수 있으며 그 이유는 $j=0$ 와 $j=N+1$ 에 위치한 고정단은 $i=M$ 까지만 존재하기 때문이다.

위에서 유도한 차분식을 모든 격자점에 적용하면 $M \times N$ 개의 연립방정식이 얻어지고 이를 풀면 모든 격자점에서 처짐을 구할 수 있다. 격자점의 개수가 늘어나면 연립방정식의 행렬은 급속하게 늘어나 컴퓨터 기억장치의 용량이 제약조건으로 작용한다. 각 방향에 격자선 1개씩만을 추가해도 식 (16)과 같은 기억용량이 필요하다.

$$\begin{aligned} & [(M+1)(N+1)]^2 \\ & = M^2N^2 + 2M^2N + 2MN^2 + M^2 + 4MN + N^2 + 2M + 2N + 1 \end{aligned} \quad (16)$$

유한 차분식은 근사해로 격자점의 개수를 늘리면 이 근사해는 점차 엄밀해로 수렴하게 된다. 그러므로 가능한 많은 격자점을 사용하여야 하나 기억장치의 용량은 제한되어 있어 격자점을 무한정 늘릴 수 없다. 본 논문에서는 한정된 기억용량을 효율적으로 사용하는 방법으로 3변 고정 1변 자유판 처짐의 특성인 대칭성을 이용하였다.

지배방정식 (5)와 경계조건식 (6)으로부터 처짐은 $y=0$ 에 대칭임을 알 수 있다. 이 특성을 이용하면 미지수가 거의 반으로 줄어들어 격자점의 개수를 대폭 늘릴 수 있다. $y=0$ 에 위치한 격자선의 번호를 N_c 라 하면 $N = 2N_c - 1$ 이 되어 $M \times N_c$ 개의 연립방정식이 구성된다. 대칭조건은 식 (17)로 주어지며

$$w_{k,N_c+l} = w_{k,N_c-l}, \quad \begin{cases} k = 1, \dots, M \\ l = 1, 2, \dots, N_c - 1 \end{cases} \quad (17)$$

식 (17)을 사용하여 $y > 0$ 에 위치한 격자점을 $y \leq 0$ 에 있는 격자점의 처짐으로 치환할 수 있다. 유한 차분식 (9)에 식(17)을 적용하면 $j = 1, 2, \dots, N_c - 2$ 까지는 식 (9)를 그대로 사용할 수 있으나 본 차분식의 경우 격자선 $j = N_c - 1$ 과 $j = N_c$ 에서는 대칭조건을 사용하여야 한다.

식 (9)에 식 (17)을 이용하여 구성된 $M \times N$ 개의 연립방정식을 풀면 $y \leq 0$ 에 있는 격자점에서의 처짐이 구한 뒤 식 (17)을 사용하여 $y > 0$ 에 위치한 격자점에서의 처짐을 구한다. 모든 격자점에서 처짐이 구해지면 휨 모멘트는 식 (7)을 중앙 차분한 식 (18)을 사용하여 계산할 수 있다.

$$\begin{cases} (M_x)_{i,j} = - \left[\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j} + \nu \lambda^2 \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2}}{\Delta x^2} \right], \quad \lambda \leq 1 \\ (M_y)_{i,j} = - \left[\lambda^2 \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \nu \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right] \end{cases} \quad (18a)$$

$$\begin{cases} (M_x)_{i,j} = - \lambda^2 \left[\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j} + \nu \lambda^2 \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2}}{\Delta x^2} \right], \quad \lambda > 1 \\ (M_y)_{i,j} = - \lambda^2 \left[\lambda^2 \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \nu \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right] \end{cases} \quad (18b)$$

식 (18)에서 격자선 $i=0$ 와 $j=N+1$ 그리고 $j=0$ 에 해당하는 처짐은 경계조건 차분식인 식 (10)과 식 (11)을 사용하여 계산할 수 있다. 그리고 격자선 $i=M$ 에 대한 모멘트 계산에는 식 (14)을 이용하였다.

4. 유한차분법의 수치해

대칭조건을 사용하지 않은 차분식 (9)와 이를 사용한 식의 수치해를 각각 구하여 동일함을 확인하였고 본 절에서 제시한 모든 수치해는 대칭조건을 사용한 것이다. 3변 고정 1변 자유판의 처짐 해는 변장비에 따라 분포형태가 달라져 이에 따른 전반적인 특성을 살펴본 후 처짐함수를 두 번 미분한 모멘트 계산의 수렴에 대해 분석하기로 한다. 본 절에서는 콘크리트 포와송비 1/6을 모든 계산에 사용하였고 등분포하중을 받는 판의 처짐 결과를 먼저 기술한 뒤 등변분포에 대한 수치해의 특성을 요약하기로 한다.

4.1 등분포하중에 의한 수치해

크기 1인 등분포하중을 받는 처짐은 식 (9) 우변의 $q_{i,j}$ 에 1을 대입하여 구성된 연립방정식을 풀어 구할 수 있다. Fig. 2는 격자점 개수(133, 85)를 사용하여 계산한 처짐을 나타내며 변장비에 따른 처짐의 형태가 확연히 달라짐을 알 수 있다.

변장비가 작은 경우 즉 자유단의 영향이 판의 대부분에 영향을 주는 경우에는 처짐은 자유단에서 직선 형태로 감소함을 보인다. 그리고 구속되지 않은 자유단으로 인해 비

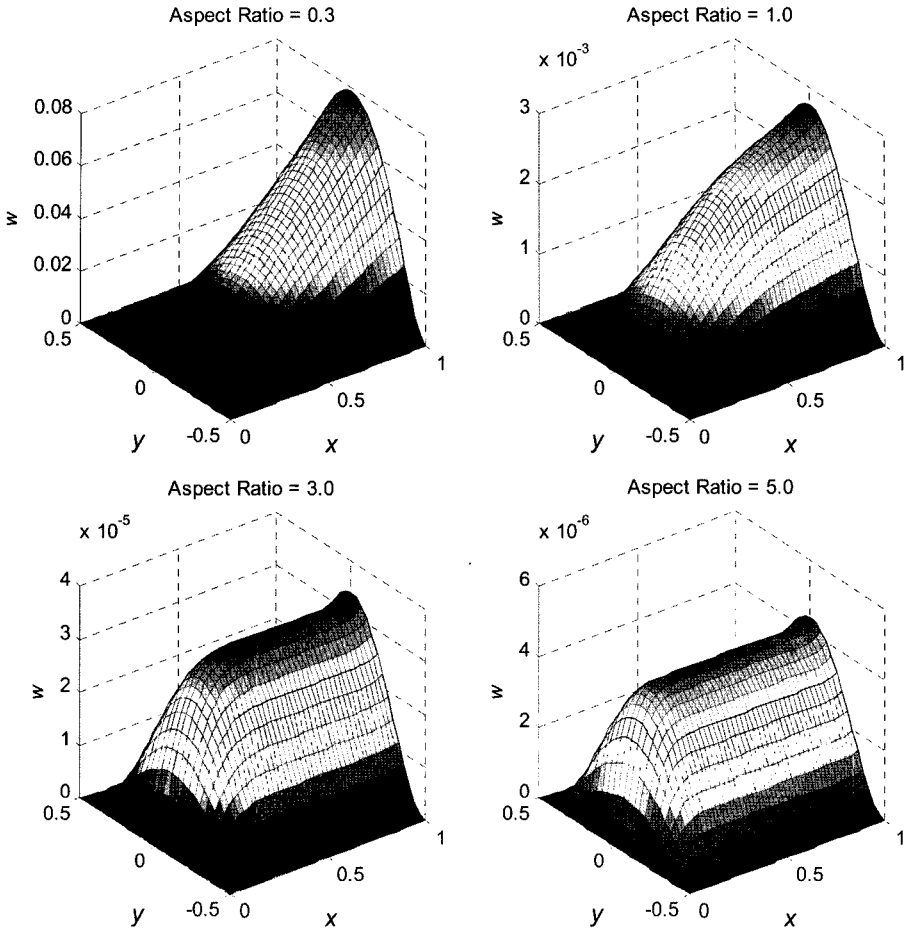


Fig. 2. Computed displacements of a rectangular plate with three edges clamped the other free under unit uniform load by present finite difference method (133×85 grid points).

교적 큰 처짐이 발생하며 자유단의 영향이 미치는 범위에 따라 처짐의 크기가 정해져 변장비가 클수록 최대 처짐도 작아지는 것으로 나타났다.

변장비가 3이상으로 큰 경우에는 자유단의 영향은 판의 일부에 국한되어 자유단 부근에서만 치켜 올라가는 처짐이 발생함을 알 수 있다. 그리고 자유단의 반대편에 있는 고정단은 그 상하에 위치한 고정단의 영향을 받아 고정판의 처짐과 같은 형태를 보인다.

Fig. 3은 변장비 1인 판에 격자점의 개수(133, 85)를 사용하여 계산한 휨 x모멘트의 분포를 보여준다. 자유단에서 x모멘트를 계산한 값은 0으로 주어진 경계조건을 만족하며 최대 크기의 모멘트는 판의 좌단 중앙점(0, 0)에서 발생한다. 판의 중앙선인 y=0에서 x모멘트는 점차 증가하여

최대값을 보인 후 감소하여 x=1에서는 0이 된다. 한편 판의 상·하단인 y=±1/2에서의 x모멘트는 x=0에서 0의 값을 가지며 약간 증가하여 최대에 도달한 후 감소하여 자유단 부근에서 최소값을 보인 후 급격히 증가하여 x=1에서는 0이 된다.

이를 자세히 분석한 Fig. 4a에서 x모멘트의 최대값은 y=0 선상의 판 중앙부에 위치하나 상·하단으로 멀어질수록 최대값은 x=0 쪽으로 이동하고 y가 상·하단에 인접한 경우에는 최소값이 x=1 부근에서 다시 존재한 후 주어진 경계조건을 만족하기 위해 급격히 증가한다.

한편 y모멘트는 최대값이 자유단 중앙점에서 나타나며 최대 크기의 모멘트는 자유단 부근의 y=±1/2에서 발생한다. x=0부근에서 y축에 평행한 단면의 모멘트는 거의 음

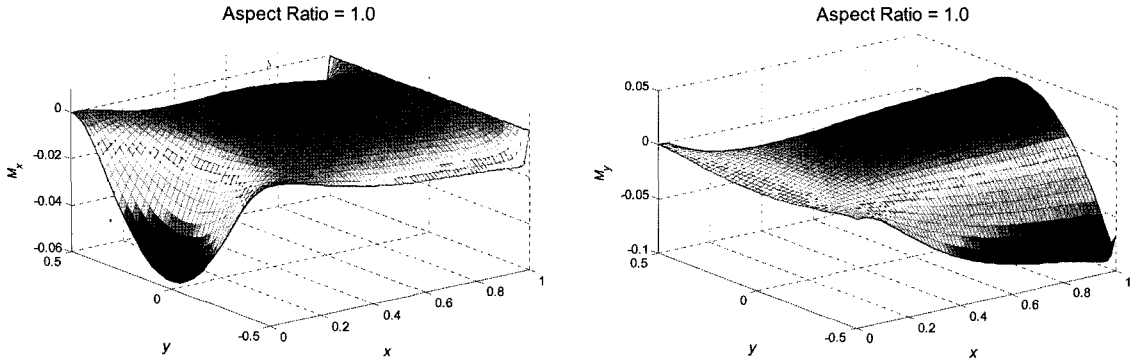


Fig. 3. Computed bending moments of a rectangular plate with three edges clamped the other free under unit uniform load by present finite difference method (133×85 grid points).

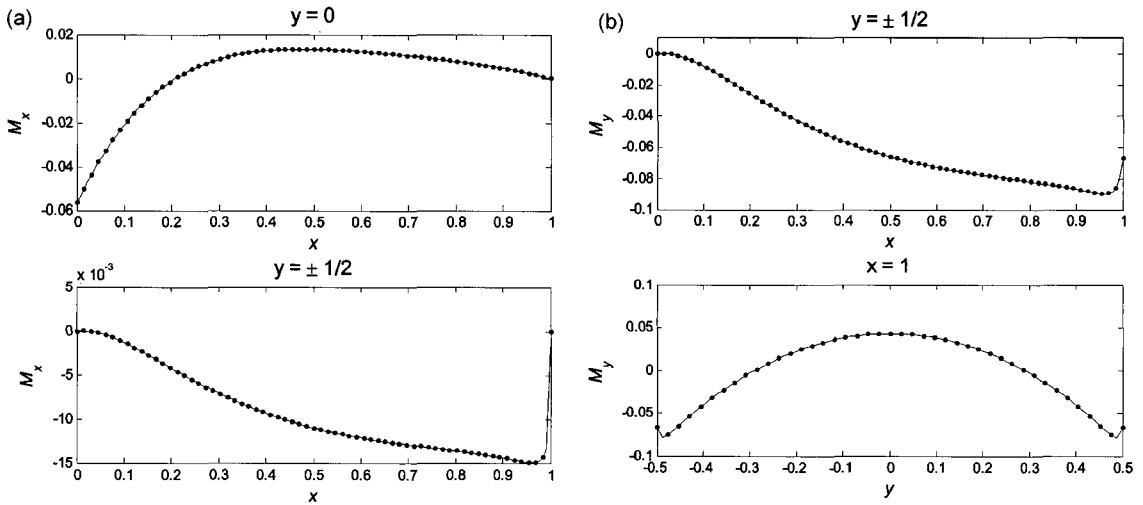


Fig. 4. (a) Computed bending moments of a rectangular plate with three edges clamped the other free under unit uniform load by present finite difference method (133×85 grid points) for different sections. (b) Computed bending moments of a rectangular plate with three edges clamped the other free under unit uniform load by present finite difference method (133×85 grid points) for different sections.

의 값을 가지나 자유단 쪽으로 감에 따라 중앙에 최대값이 존재하고 상하단 쪽으로 감소하여 상하단에서 최소값을 보인다. $x=1$ 에서의 y 모멘트는 Fig. 4b에 도시한 바와 같이 판 상하단에서 최소값을 갖는 것이 아니라 그 인접한 점에서 최소값을 갖는 특이한 형태를 보인다. 이러한 형태는 서(2006)의 해석해에서도 나타나며 이는 자유단과 고정단이 교차하는 교점에 주어진 상이한 경계조건에 의한 것으로 추정된다.

다음에는 격자점의 개수에 따른 수치해의 수렴을 분석하기로 한다. 제 3절에서 기술한 바와 같이 유한차분법은 매우 큰 연립방정식을 풀어야하기 때문에 컴퓨터의 기억

용량에 제한을 받으며 본 연구에서는 4G byte 메모리에서 풀 수 있는 최대 격자점까지 사용하였다. 한정된 기억용량을 이용하여 효율적으로 해의 수렴을 분석하기 위하여 세 가지 형태로 수행하였다. 첫 방법은 x 방향의 개수 M 과 y 방향의 개수 N 을 동일하게 설정하고 이들의 개수를 42, 60, 72, 84, 그리고 102로 증가시켜 수치해를 구하여 이를 분석하였다. 둘째 방법은 N 을 72로 고정하고 M 을 42, 72, 102, 132 그리고 156으로 증가시켜 수치해를 구했으며 셋째 방법은 M 을 72로 고정하고 N 을 둘째 방법과 같이 증가시켜 수치해를 구하였다. 해는 변장비에 따라 영향을 받기 때문에 위의 방법을 변장비 0.3, 1.0 그리고 3.0에 각

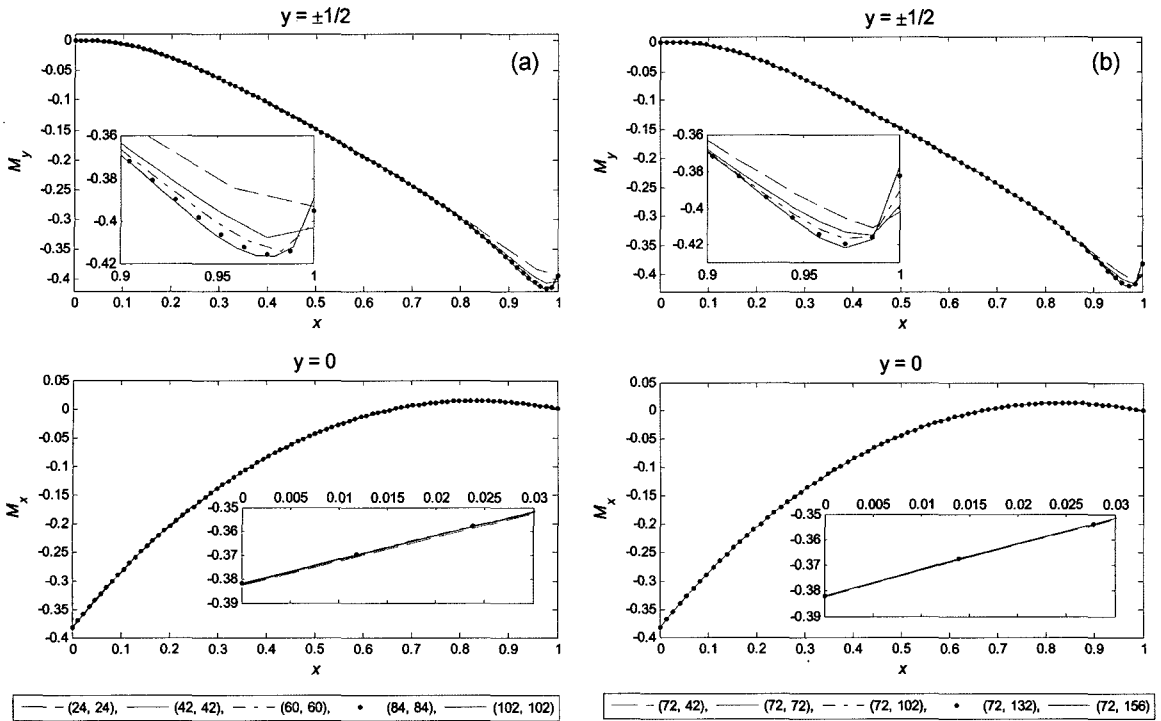


Fig. 5. (a) Computed maximum bending moments for aspect ratio 0.3 in which number of points is equal to in each plot (uniform load case), (b) Computed maximum bending moments for aspect ratio 0.3 in which number of points is fixed in each plot (uniform load case).

각 사용하여 수치해를 계산하였다.

처짐에 대한 수렴은 이를 두 번 미분한 휨 모멘트보다 상대적으로 빠르고 부재의 단면력 계산에는 휨 모멘트 값이 필요함으로 이에 대한 수렴을 비교하였다. 3번 고정 1번 자유판의 휨 모멘트의 최대 크기는 $y=0$ 와 $y=\pm 1/2$ 에서 발생함으로 격자점의 개수에 따른 계산결과를 Fig. 5~7에 나타내었다. 이들 그림에서 “a”는 동일한 개수의 M 과 N 을 사용한 결과이고 “b”는 N 을 고정하고 “c”는 M 을 고정하여 계산한 결과를 각각 의미한다.

Fig. 5~7의 결과를 분석하면 변장비가 커질수록 모멘트는 판의 좌측인 고정단과 우측인 자유단 부근에서 변화율이 커진다. 특히 y 모멘트는 자유단 부근에서 최소값을 보인 후 증가하는 형태를 보이며 변장비가 커질수록 최소값을 보이는 점은 자유단 쪽으로 이동한다. 또한 변장비가 커질수록 판의 중앙부에는 모멘트가 거의 일정한 값을 가지는 구간이 넓어지며 이는 Fig. 2에서 x 방향의 처짐은 거의 같고 동시에 y 방향의 처짐은 고정부와 유사한 4차 곡선 형태를 보이는 것으로 해석할 수 있다.

변장비가 0.3인 경우 모멘트의 수렴은 Fig. 5에서 x 방향

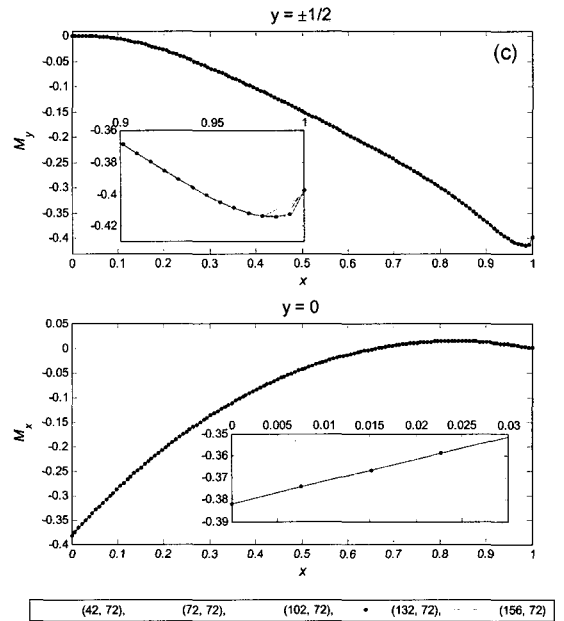


Fig. 5. (continued) (c) Computed maximum bending moments for aspect ratio 0.3 in which number of points is fixed in each plot (uniform load case).

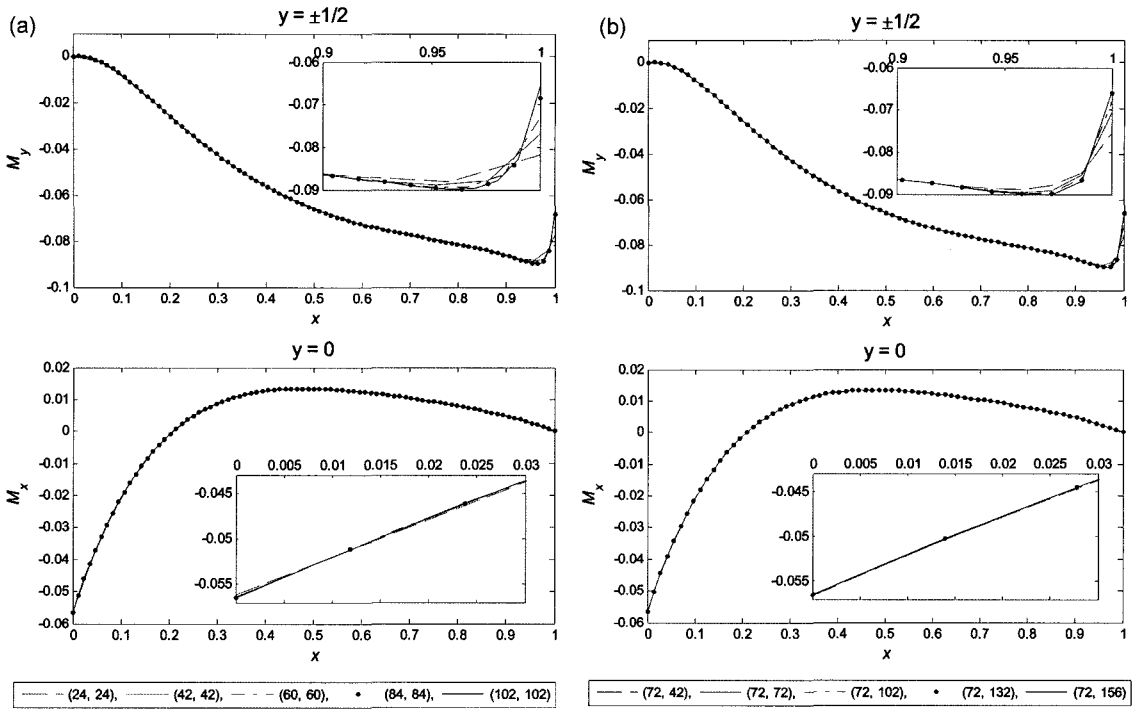


Fig. 6. (a) Computed maximum bending moments for aspect ratio 1.0 in which number of points is equal in each plot (uniform load case), (b) Computed maximum bending moments for aspect ratio 1.0 in which number of points is fixed in each plot (uniform load case).

의 격자수(M)보다는 y 방향의 격자수(N)에 영향이 큰 것으로 분석된다. 이는 x 방향의 변화율보다 y 방향의 변화율이 더 크기 때문인 것으로 해석된다. Fig. 6에 도시한 변장비가 1.0인 경우에는 x 방향과 y 방향의 변화율이 비슷하여 양 방향에 충분한 격자점이 필요하며 Fig. 6a에서 80개 이상을 사용하는 것이 좋으며 M 보다 N 의 수를 늘리는 것이 수렴이 빠른 것으로 판단된다. 변장비가 3.0인 경우에 대한 모멘트 계산은 Fig. 7에 나타내었고 N 보다 M 의 수를 늘리는 것이 수렴을 가속시키는 데에 효과적으로 분석된다.

Fig. 5~7의 결과로부터 변장비 0.3에는 격자수 (84, 132)를, 변장비 1.0에는 (96, 120)를 그리고 변장비 3.0의 경우에는 (132, 84)를 최적 격자수로 설정하여 수렴이 가장 늦은 자유단 부근에서 y 모멘트 계산결과를 Fig. 8에 나타내었다.

Fig. 8a는 $y = \pm 1/2$ 에서 상이한 격자수로 계산한 자유단 부근의 결과로 설정한 격자수가 적정함을 나타낸다. Fig. 8b는 $x=1$ 에서 설정한 최적 격자수로 계산한 y 방향에 대한 결과이다. 변장비가 작은 경우에는 y 모멘트의 최소값은 경계선인 $y = \pm 1/2$ 부근에서 뚜렷하지 않으나 변장비가 커지면 최소값은 경계에 인접한 곳에서 나타난다.

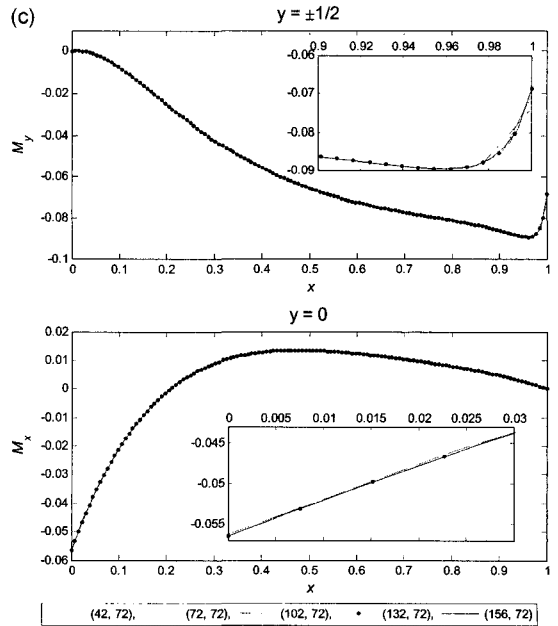


Fig. 6. (continued) (c) Computed maximum bending moments for aspect ratio 1.0 in which number of points is fixed in each plot (uniform load case).

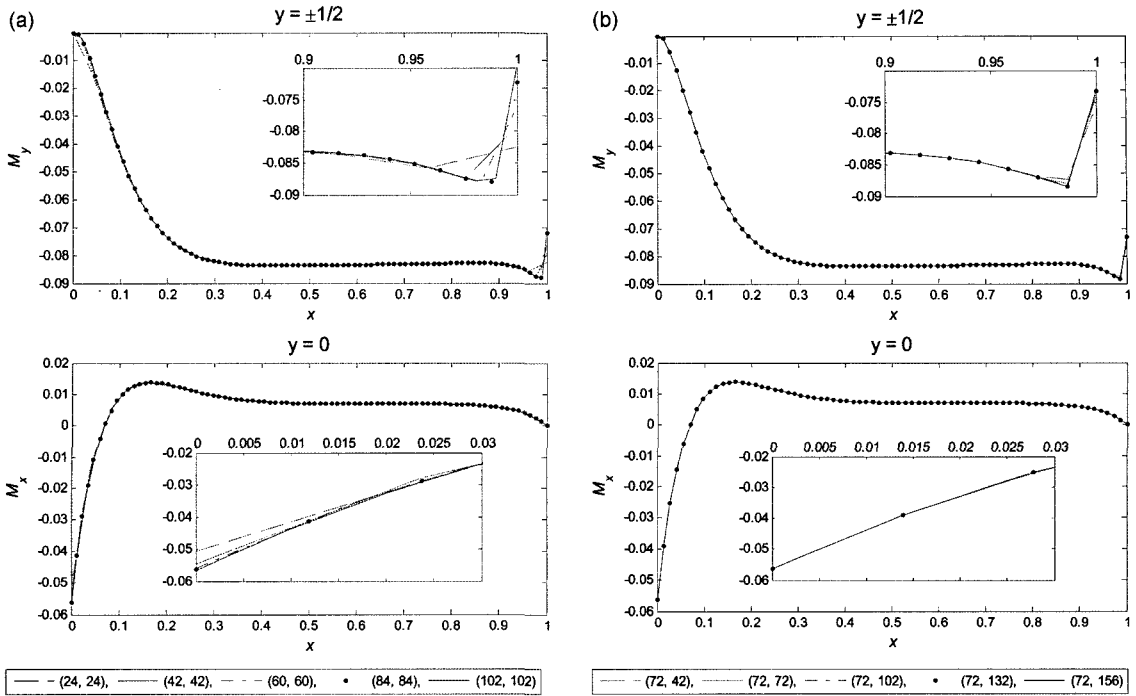


Fig. 7. (a) Computed maximum bending moments for aspect ratio 3.0 in which number of points is equal to in each plot (uniform load case), (b) Computed maximum bending moments for aspect ratio 3.0 in which number of points is fixed in each plot (uniform load case).

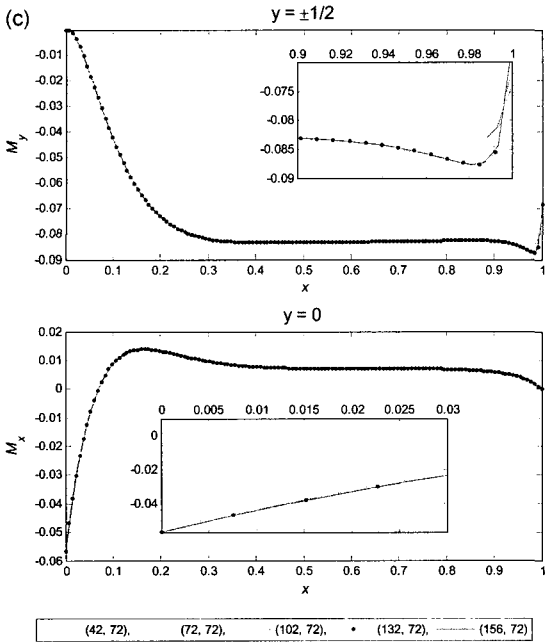


Fig. 7. (continued) (c) Computed maximum bending moments for aspect ratio 3.0 in which number of points is fixed in each plot (uniform load case).

4.2 등변분포하중에 의한 수치해

최대 크기 1인 등변분포하중을 받는 경우의 처짐은 식 (9) 우변의 $q_{i,j}$ 에 $(1-i/M)$ 을 대입하여 구성된 연립방정식을 풀면 얻을 수 있다. Fig. 9는 격자점의 개수(133, 85)를 사용하여 계산한 처짐의 분포를 보여준다.

Fig. 2의 등분포하중에 의한 결과와 비교하면 등변분포하중에 의한 처짐은 상대적으로 작고 특히 자유단 부근에서의 처짐 형태는 변장비가 커질수록 현저히 다르나 자유단 반대편의 고정단 부근에서는 유사한 형태를 보인다. 이는 등변분포하중의 경우 고정단에서 크기 1인 하중이 x 방향으로 선형적으로 감소하여 자유단에 작용하는 하중은 0의 크기를 갖기 때문인 것으로 해석된다.

Fig. 10은 변장비 1인 판에 최대 크기 1인 등변분포하중을 받는 경우 격자점의 개수 (97, 121)를 사용하여 계산된 휨 모멘트 분포를 나타낸 것이다.

이것과 대응되는 Fig. 3의 등분포하중에 의한 결과와 비교하면 크기는 전반적으로 작고 판 상하단의 자유단 부근에서 x 모멘트의 급격한 변화는 보이지 않는다. y 모멘트의 분포형태는 판 상하단 부근의 최소값이 판의 중앙부로 이동한 점을 제외하면 등분포하중의 분포와 유사하다.

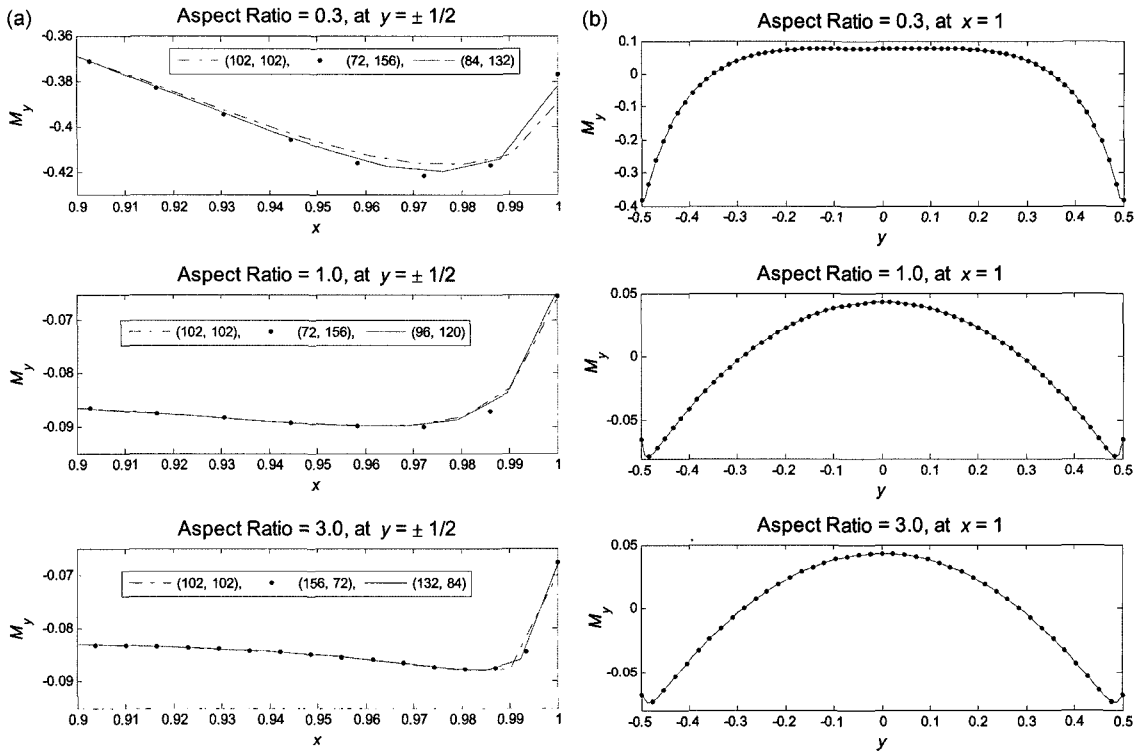


Fig. 8. (a) Computed moments in the neighborhood of the free edge by use of the optimal number of grid points (uniform load case), (b) Computed moments along the free edge by use of the optimal number of grid points (uniform load case).

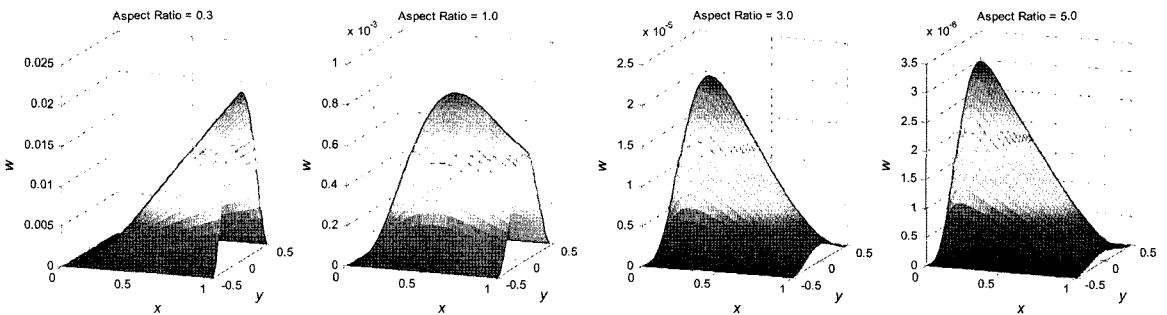


Fig. 9. Computed displacements of a rectangular plate with three edges clamped the other free under unit triangular load by present finite difference method (133×85 grid points).

상이한 변장비를 갖는 판에 최대 크기 1인 등변분포하중이 작용한 경우 수치해의 수렴을 분석하기 위해 격자점의 개수에 따른 결과를 Fig. 11에 나타내었다.

그림은 모멘트의 변화가 가장 큰 자유단 부근의 y 모멘트를 나타낸 것으로 등분포하중의 경우(Fig. 8a)와 비교할 때 크기나 변화율이 상대적으로 작다. 이로부터 등변분포하중의 경우에도 변장비 0.3에는 격자수 (84, 132)를, 변장비 1.0에는 (96, 120)를 그리고 변장비 3.0의 경우에는

(132, 84)를 최적 격자수로 각각 설정하였다.

각 변장비에 대해 설정된 최적 격자수를 이용한 계산으로부터 최대 크기의 x 모멘트가 발생하는 $y=0$ 에서의 분포를 Fig. 12에 나타내었다.

최대 크기의 x 모멘트에 대한 등변분포의 특징은 크기가 상대적으로 작고 변장비가 작을수록 최대값은 $x=0$ 쪽으로 이동이 뚜렷하다. 변장비가 커지면 $x=1$ 부근의 변화율은 거의 없어 편평하며 그 구역이 점차 확장된 것을 보인다.

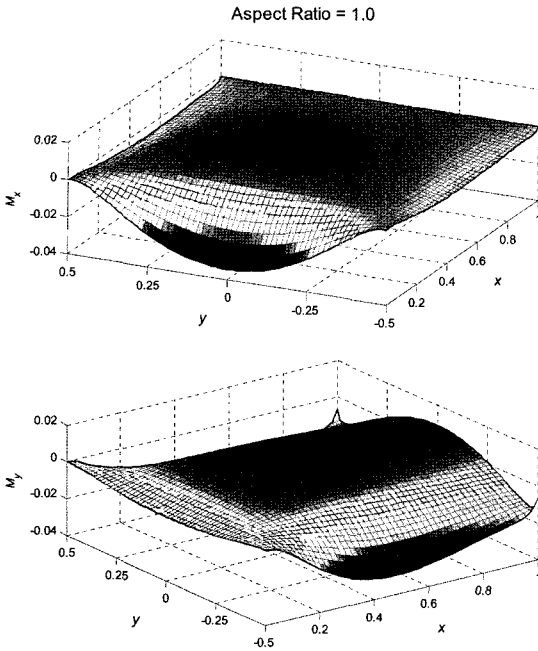


Fig. 10. Computed bending moments of a rectangular plate with three edges clamped the other free under unit triangular load by present finite difference method (97×121 grid points).

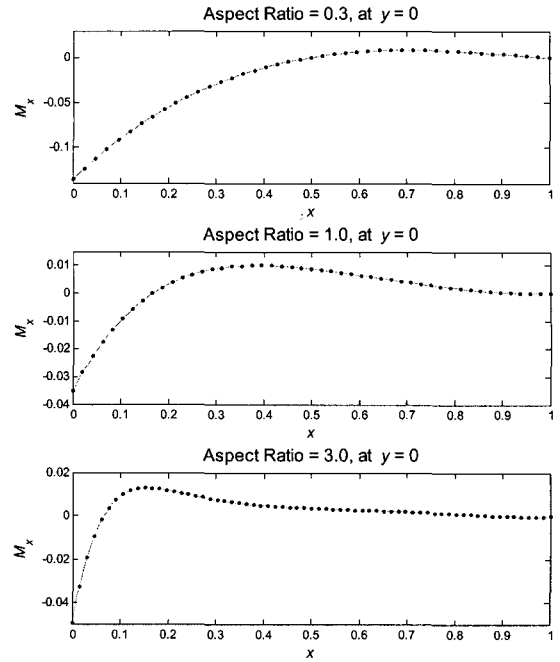


Fig. 12. Computed moments along latitudinal center line by use of the optimal number of grid points (triangular load case).

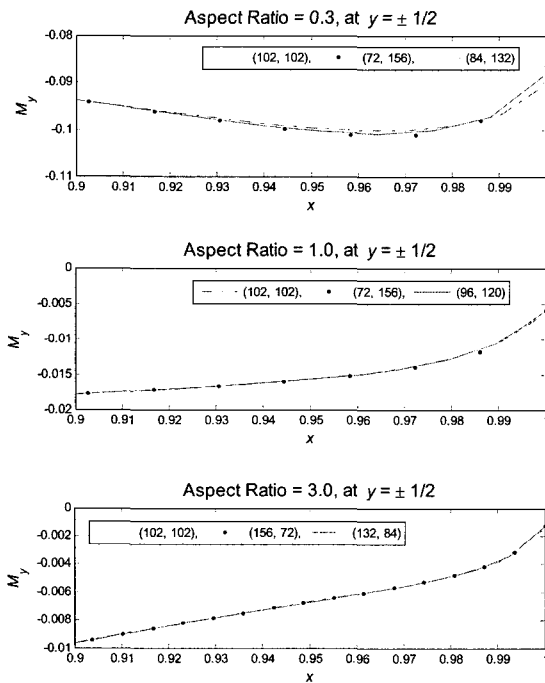


Fig. 11. Computed moments in the neighborhood of the free edge by use of the various grid points (triangular load case).

각 변장비에 대해 설정된 최적 격자수를 이용한 계산으로부터 최대 크기의 y 모멘트가 발생하는 $y=\pm 1/2$ 에서의 분포를 Fig. 13에 나타내었다.

최대 크기의 y 모멘트에 대한 등변분포의 특징은 크기가 상대적으로 작고 변장비가 클수록 $x=1$ 부근에서의 분포는 등분포의 경우와 현저하게 다르다. 그 이유는 자유단으로 갈수록 작용하는 하중의 크기가 작아져 자유단에서 0의 값을 가지기 때문인 것으로 분석된다. 변장비가 큰 3의 경우에는 자유단에서 y 모멘트는 거의 0까지 증가하는 형태를 보인다.

Fig. 14는 자유단에서 y 모멘트의 x 방향 분포를 나타내며 Fig. 8b의 등분포와 비교할 때 자유단과 고정단의 교점부근에서 뚜렷한 최소값의 분포를 보이고 있다.

본 절에서 행한 수치실험을 토대로 각 변장비에 대해 구한 최적 격자수를 사용하여 휨 모멘트를 계산하고 그 가운데 x 방향 6등분 y 방향 4등분 격자점(Fig. 15)에서 구한 휨 모멘트 값을 Table 2에 정리하였다.

표에는 서(2006)가 제시한 해석해와 비교를 위해 나타내었다. 자유단을 제외하면 해석해와 유한 차분해는 거의 같은 값을 보이거나 해석해는 자유단에서 주어진 x 모멘트가

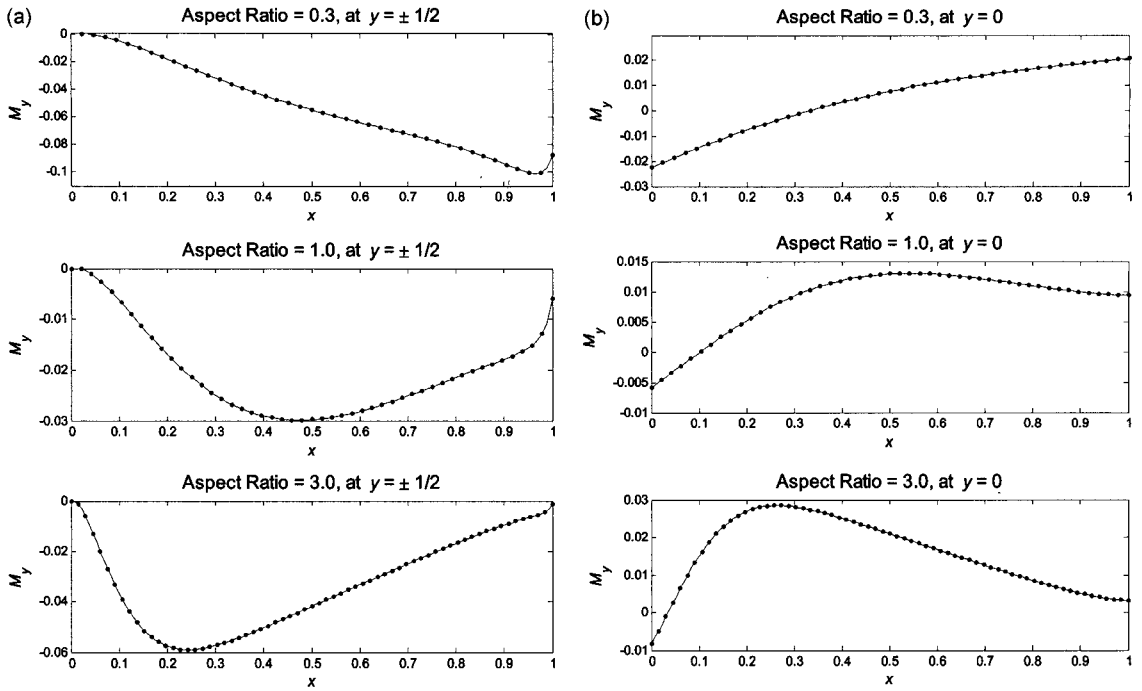


Fig. 13. (a) Computed moments along upper and lower edges by use of the optimal number of grid points (triangular load case), (b) Computed moments along latitudinal center line by use of the optimal number of grid points (triangular load case).

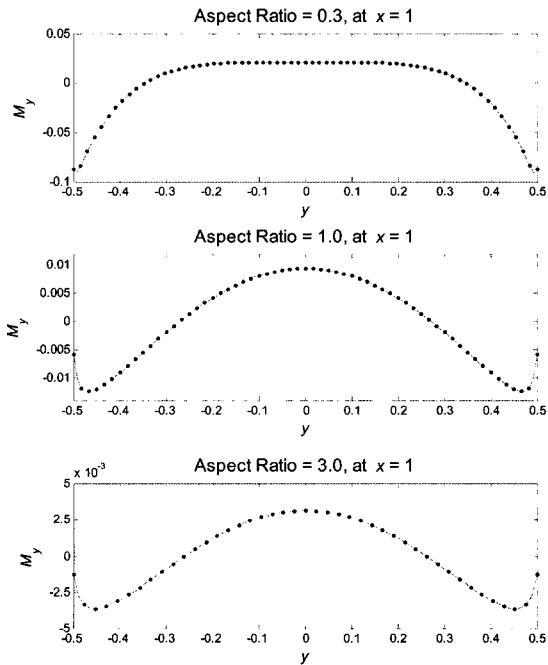


Fig. 14. Computed moments along the free edge by use of the optimal number of grid points (triangular load case).

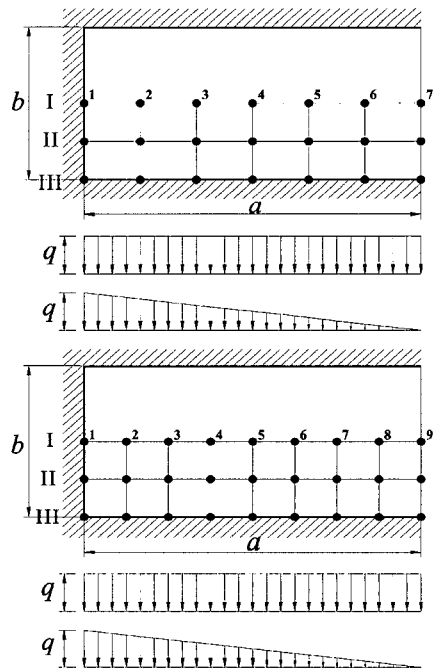


Fig. 15. Grid points used in the table for bending moment computation of a rectangular plate with three edges clamped the other free.

Table 2. (continued). (c) Bending moment results of a rectangular plate with three edges clamped the other free(Aspect ratio 3.0).

		Point	1	2	3	4	5	6	7	
Uniform load	M_x	I	해석해	-0.0565	0.0137	0.0089	0.0070	0.0069	0.0066	0.0003
			차분해	-0.0567	0.0138	0.0087	0.0070	0.0070	0.0066	0.0000
		II	해석해	-0.0340	0.0066	0.0029	0.0018	0.0017	0.0015	0.0000
			차분해	-0.0343	0.0067	0.0028	0.0018	0.0018	0.0015	0.0000
		III	해석해	0.0000	-0.0112	-0.0138	-0.0139	-0.0139	-0.0138	-0.0141
			차분해	0.0000	-0.0111	-0.0138	-0.0139	-0.0139	-0.0138	0.0000
	M_y	I	해석해	-0.0094	0.0308	0.0412	0.0418	0.0416	0.0414	0.0432
			차분해	-0.0094	0.0307	0.0412	0.0418	0.0416	0.0414	0.0432
		II	해석해	-0.0057	0.0099	0.0107	0.0105	0.0104	0.0103	0.0105
차분해	-0.0057		0.0100	0.0107	0.0105	0.0104	0.0103	0.0104		
III	해석해	0.0000	-0.0669	-0.0828	-0.0836	-0.0835	-0.0826	-0.0846		
	차분해	0.0000	-0.0667	-0.0831	-0.0835	-0.0833	-0.0828	-0.0680		
Triangle load	M_x	I	해석해	-0.0492	0.0126	0.0064	0.0036	0.0021	0.0007	0.0000
			차분해	-0.0493	0.0127	0.0063	0.0035	0.0022	0.0007	0.0000
		II	해석해	-0.0301	0.0063	0.0023	0.0009	0.0004	0.0000	0.0000
			차분해	-0.0305	0.0064	0.0021	0.0009	0.0005	0.0000	0.0000
		III	해석해	0.0000	-0.0090	-0.0092	-0.0070	-0.0047	-0.0024	-0.0007
			차분해	0.0000	-0.0090	-0.0092	-0.0070	-0.0046	-0.0024	0.0000
	M_y	I	해석해	-0.0082	0.0245	0.0274	0.0209	0.0139	0.0073	0.0032
			차분해	-0.0082	0.0245	0.0273	0.0209	0.0139	0.0073	0.0031
		II	해석해	-0.0050	0.0083	0.0073	0.0052	0.0034	0.0017	0.0003
차분해	-0.0051		0.0083	0.0072	0.0052	0.0035	0.0017	0.0002		
III	해석해	0.0000	-0.0543	-0.0551	-0.0419	-0.0279	-0.0141	-0.0040		
	차분해	0.0000	-0.0541	-0.0554	-0.0419	-0.0278	-0.0143	-0.0012		

15 terms in the analytical solution and (132×84) grid points in FD are used.

0인 조건을 만족하지 않고 특히 판의 상하단에서 자유단으로 갈수록 y 모멘트 값의 차이가 두드러진다. 본 절에서 설명한 바와 같이 판의 고정단과 자유단의 교점부근에서 y 모멘트는 매우 특이한 분포를 보이며 x 방향으로 6등분한 경우 이 모멘트의 최소값은 나타낼 수 없으며 단지 자유단에서의 y 모멘트 계산값이 표에 제시되었다. 이러한 점을 고려하면 표에 제시된 해석해는 이 교점부근에서 모멘트 분포의 평균적인 추이를 나타낸 것이라 할 수 있다.

한편 유한 차분법의 해는 구성 격자점의 수에 따라 계산값이 차이가 있음을 보였고 다양한 수치실험을 통해 수렴을 분석하였지만 기억용량의 제약과 특이한 분포로 인해 이들의 정확성에 대한 추가 연구가 필요한 것으로 판단된다.

5. 결 론

판에 외력이 작용할 때 발생하는 휨 모멘트는 판의 배근설계에 입력 자료로 사용되며 구조물의 안전한 설계를 위해 기준서에 무차원화한 휨 모멘트의 값이 수록되어있다(해양수산부, 1999). 판에 작용하는 등분포하중과 등변

분포하중에 의한 휨 모멘트를 유한 차분법으로 계산하고 격자수에 따른 수치해의 수렴을 분석하였다.

유한 차분법의 수치해는 판의 변장비, x 와 y 방향의 격자점의 수에 따라 변하며 격자점을 최대 11,520개까지 사용하여 해를 구하였고 변장비에 따른 최적 격자수를 제시하였다. 본 수치해는 Levy형 해석해와 달리 자유단의 x 모멘트 경계조건을 만족하며 자유단과 고정단의 교점부근에서는 특이한 모멘트 분포를 보인다. 이러한 분포는 서(2006)가 제시한 해석해에서도 볼 수 있지만 본 수치해에서는 보다 안정하고 특이한 분포형태를 보여 준다.

항만 및 어항설계 기준에 수록된 등분포하중과 등변분포하중에 의한 Levy형 해석해의 무차원 휨 모멘트 값과 본 결과를 비교하였으며 특이한 분포를 보이는 자유단과 그 부근을 제외하면 두 값은 동일한 것으로 나타났다. 다만 해석해는 이 교점부근에서 모멘트 분포의 평균적인 추이를 나타낸 것이라 할 수 있으며 제시된 수치해의 정확성을 비교하기 위한 추가 연구가 필요한 것으로 판단된다. 그리고 국내와 일본 기준서에 제시된 $y=\pm 1/2$ 에서의 y 모멘트는 계산상의 오류가 있음을 밝힌다.

감사의 글

본 논문은 한국해양연구원의 자체연구사업항만구조물 설계자동화 프로그램 기술이전 활성화의 연구지원에 의해 수행된 연구결과입니다.

참고문헌

서승남 (2006). 등방성 직사각형의 3변 고정 1변 자유 얇은 판성판에 대한 기존 해석해의 분석. 한국토목학회논문집, 26(1A), 117-132.
해양수산부 (1999). 항만 및 어항 설계기준.

日本港灣協會 (1988). 港灣の施設の技術上の基準同解説. 堀井修身, 本 浩司 (1968). 解析法による版の曲げモメント値表, 港灣技術資料, No. 43, 運輸省 港灣技術研究所.
Reddy, J.N. (1999). Theory and Analysis of Elastic Plates. Taylor & Francis, Philadelphia, PA.
Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. (1959). Theory of Plates and Shells. 2nd ed., McGraw-Hill Inc., Singapore.
Ventsel, E. and Krauthammer, T. (2001). Thin Plates and Shells - Theory, Analysis, and Applications. Marcel Dekker, Inc., New York, NY.

Received June 1, 2006

Accepted September 15, 2006