한국소음진동공학회논문집 제 16 권 제 9 호, pp. 982~989, 2006.

복합적층 회전원판의 응력 및 진동 해석

Stress and Vibration Analysis of Rotating Laminated Composite Disks

구 교 남†

Kyo-Nam Koo

(2006년 8월 7일 접수 ; 2006년 8월 30일 심사완료)

Key Words : Critical Speed(임계속도), Vibration(진동), Composite Materials(복합재료), Rotating Disk(회전원판), Cross-ply Laminate (직교적층), Failure Analysis(파손해석)

ABSTRACT

The centrifugal force acting on a rotating disk creates the in-plane loads in radial and circumferential directions. Application of fiber reinforced composite materials to the rotating disk can satisfy the demand for the increment of its rotating speed. However, the existing researches have been confined to lamina disks. This paper deals with the stress and vibration analysis of rotating laminated composite disks. The maximum strain theory for failure criterion is applied to determine the strength of the laminate disk from which the maximum allowable speed is obtained. Dynamic equation is formulated in order to calculate the natural frequency and critical speed for rotating laminated disks. The Galerkin method is applied to obtain the series solution. The numerical results are given for the cross-ply laminated composite disks.

1. 서 론

환형판(annular disk) 또는 원판(circular disk)은 산업기기에서 매우 다양한 형태로 사용되고 있다. 그 응용사례로는 원형 전기톱, 터빈, 브레이크 디스크 등 전통적인 산업기계뿐만 아니라 최근 하드 디스크, CD-ROM(compact disk), DVD-ROM(digital versatile disk) 등의 정보저장기기 등을 들 수 있다. 특히 취급하는 정보량이 증가함에 따라 정보 전달속도를 높이기 위해 이들 정보저장기기에 들어가는 디스크의 회전속도의 증가도 급격하게 이루어지고 있다. 그러나 기존의 광학 정보저장장치는 이미 임계속도 이상에서 사용되고 있어 설계나 재료의 변화를 요구하고 있다. 최근 들어 차세대 대용량 홀로그램 저장장치인 HDDS(holographic digital data storage)의 실용화에 대한 연구가 활발하다. 일본기업 Optware는 HSSD의 일종인 HVD(holographic versatile disk)에 영상을 기록하고 재생하는데 성공했다고 발표했다[1]. 일반적인 예측에 의하면 일반 CD의 제원과 같은 HVD 1장에 1 테라 바이트(TB)까지 저장이 가능하므로 전통적인 자기나 광학 기록매체의 벽을 뛰어넘는 획기적인 기술이다. HVD는 신호 다중화(multiplexing) 기술과 홀로그래피 재료 기술뿐만 아니라 기계적으로 동적 안정성과 치수 안정성이 요구된다. 한편 섬유강화 복합재료는 섬유방향으로 탄성계수가 매우 클 뿐만 아니라 열팽창계수가 매우 작으므로 회전 원판의 진동특성과 치수안정성 향상에 좋은 재료라고 볼 수 있다.

회전하는 등방성 원판의 진동특성은 1920년대 이후 비교적 많이 연구되어 왔다[2~7]. 그러나 복합재 회전원판에 대한 연구는 극히 미미한 실정이다.

† 책임저자 ; 정회원, 울산대학교 항공우주공학과
E-mail : knkoo@mail.ulsan.ac.kr
Tel : (052)259-1261, Fax : (052)259-1682

Ghosh는[8] 회전하는 극직교 이방성 원판(polar orthotropic disk)의 횡진동에 열응력이 미치는 영향을 살펴보았다. 그는 회전원판의 임계속도를 구하였으며 열응력에 의한 파괴 회전속도도 구하였으나 직교이방성이나 회전속도에 따른 진동특성에 대한 연구결과는 제시하지 않았다. Son 등은[9, 10] 횡하중과 열하중을 받는 이방성 원판이 회전할 때 횡전단 변형과 회전관성을 고려하여 진동문제에 대한 유한요소 정식화를 수행하고 회전하는 직교이방성 원판에 적용하였다. 그러나 그들이 계산한 예제는 폴리카보네이트(polycarbonate) 층과 알루미늄 층으로 이루어진 등방성 적층 원판이었다. 최근 들어 Koo는[11] 섬유강화 복합재료를 회전하는 CD에 적용하여 반경강화 원판과 원주강화 원판의 정적강도에 대한 최대 허용회전수를 계산하였다. 또한 극직교 이방성 회전원판의 동적 방정식을 정식화하고 급수해를 이용하여 회전시의 고유진동수 변화를 살펴보고 임계속도를 구하였다.[12, 13] 극직교 이방성 회전원판의 동적 방정식을 회전하는 CD, DVD와 같은 광학저장 디스크에 적용한 결과 임계속도를 크게 증가시킬 수 있음을 확인하였다.

현재까지의 연구의 결과에 의하면 복합재료를 회전원판에 적용하면 그 강도와 안정성 등과 같은 기계적 특성이 월등히 향상됨을 확인할 수 있었다. 또한 금속재 원판에 비해 구동에너지를 줄일 수 있다는 장점이 있다. 그러나 지금까지의 연구는 모두 단층으로 이루어진 원판에 대한 연구였다. 그러나 단층으로 이루어진 원판의 경우 기지(matrix)의 파손이 매우 낮은 응력에 발생할 수 있으므로 섬유의 높은 강도를 이용하지 못 할 수 있다. 따라서 일반 복합재료 구조물에서 사용되는 방법과 마찬가지로 회전원판도 적층판으로 구성하여 그 기계적 특성을 살펴볼 필요가 있다.

이 연구에서는 지금까지 연구된 바 없는 복합적층 회전원판의 강도해석과 진동해석을 수행하였다. 적층원판의 회전에 의해 발생하는 응력분포식을 극좌표계에서 유도하였다. 이로부터 최대변형률 이론을 적용하여 파손을 판정하므로써 정적강도에 대한 최대 허용회전수를 구하였다. 적층원판의 임계속도를 구하기 위해 지배방정식의 정식화를 수행하였으며 급수해를 구하기 위해 갤러킨 방법을 적용하였다. 해석에 사용된 원판은 대칭 직교적층판으로 $[0/90]_S$ 적층순서를 가지며 유리섬유강화 복합재료(glass giber-reinforced plastic : GFRP)와 탄소섬유강화 복합재료(carbon fiber-reinforced plastic : CFRP)에 대한 해석결과를 제시하였다.

2. 지배방정식과 일반해

2.1 적층원판의 구성방정식

복합적층 원판은 Fig. 1과 같이 반경강화(radially reinforced) 원판과 원주강화(circumferentially rein-forced) 원판을 적층하여 구성할 수 있다.

복합적층판(laminate)을 이루고 있는 직교이방성 단층(lamina)의 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}, \text{ 또는} \tag{1.1}$$

$$\{\sigma\}_{1,2}=[Q]_{1,2}\{\varepsilon\}_{1,2} \tag{1.2}$$

여기서 $[Q]_{1,2}$ 의 성분은 다음과 같다.

$$Q_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\quad Q_{12}=\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\quad Q_{66}=G_{12},\quad \frac{\nu_{12}}{E_1}=\frac{\nu_{21}}{E_2} \tag{2}$$

Fig. 2와 같이 반경에 대해 반시계방향으로 정의된 섬유각 β를 갖는 단층에 대해 (r,θ) 극좌표계에서 응력-변형률을 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{rr} & Q_{r\theta} & Q_{rs}\\ Q_{r\theta} & Q_{\theta\theta} & Q_{\theta s}\\ Q_{rs} & Q_{\theta s} & Q_{ss}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{r\theta}\end{Bmatrix}, \text{ 또는} \tag{3.1}$$

$$\{\sigma\}_{r,\theta}=[Q]_{r,\theta}\{\varepsilon\}_{r,\theta} \tag{3.2}$$

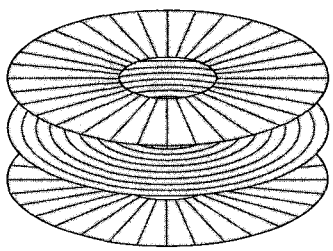

Fig. 1 composite laminate disk

식 (3)에서 고전적층판 이론을 이용하면 변형률은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r^0\\ \varepsilon_\theta^0\\ \gamma_{r\theta}^0\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\chi_r\\ \chi_\theta\\ \gamma_{r\theta}\end{Bmatrix} \tag{4}$$

여기서 상첨자 0은 디스크 중립면에서의 변형률을 뜻하고 $\{\chi\}$는 곡률을 의미한다.

식 (4)에 주어진 변형률을 이용하면 대칭적층 원판의 단위길이당 평면력 $\{N\}$과 모멘트 $\{M\}$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}N_r\\ N_\theta\\ N_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{rr} & A_{r\theta} & A_{rs}\\ A_{r\theta} & A_{\theta\theta} & A_{\theta s}\\ A_{rs} & A_{\theta s} & A_{ss}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r^0\\ \varepsilon_\theta^0\\ \gamma_{r\theta}^0\end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

$$\begin{Bmatrix}M_r\\ M_\theta\\ M_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{rr} & D_{r\theta} & D_{rs}\\ D_{r\theta} & D_{\theta\theta} & D_{\theta s}\\ D_{rs} & D_{\theta s} & D_{ss}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi_r\\ \chi_\theta\\ \chi_{r\theta}\end{Bmatrix} \tag{5.2}$$

여기서 인장강성 행렬 $[A]$와 굽힘강성 행렬 $[D]$의 성분은 다음과 같이 정의된다.

$$A_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}Q_{ij}\,dz \tag{6.1}$$

$$D_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}Q_{ij}z^2dz \tag{6.2}$$

2.2 회전에 의한 하중 및 변형률

이 연구에서는 0도 층과 90도 층으로 이루어진 직교적층판만을 다루며 이 경우에 수직변형과 전단변형사이의 연성(coupling)이 없어지므로 회전에 의한 초기하중 $\{\overline{N}\}$와 변형률 $\{\overline{\varepsilon}\}$은 식 (5.1)로부터 다음과 같이 표현된다.

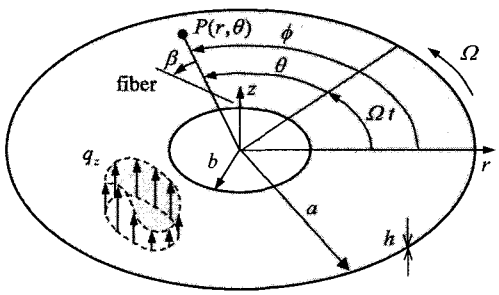

Fig. 2 Coordinates and geometry of rotating disk

$$\begin{Bmatrix}\overline{N}_r\\ \overline{N}_\theta\\ \overline{N}_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{rr} & A_{r\theta} & 0\\ A_{r\theta} & A_{\theta\theta} & 0\\ 0 & 0 & A_{ss}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{\varepsilon}_r\\ \overline{\varepsilon}_\theta\\ \overline{\gamma}_{r\theta}\end{Bmatrix} \tag{7}$$

축대칭 변형에 대한 면내 변형률을 고려하면 평면력은 다음과 같이 된다.

$$\overline{N}_r=A_{rr}\frac{\partial\overline{u}_r}{\partial r}+A_{r\theta}\frac{\overline{u}_r}{r} \tag{8.1}$$

$$\overline{N}_\theta=A_{r\theta}\frac{\partial\overline{u}_r}{\partial r}+A_{\theta\theta}\frac{\overline{u}_r}{r} \tag{8.2}$$

$$\overline{N}_{r\theta}=A_{ss}\left(\frac{\partial\overline{u}_\theta}{\partial r}-\frac{\overline{u}_\theta}{r}\right) \tag{8.3}$$

Fig. 2와 같이 일정한 회전수 Ω로 회전하는 원판의 r-방향으로의 평형방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$-\frac{\partial(r\overline{N}_r)}{\partial r}-\frac{\partial\overline{N}_{r\theta}}{\partial\theta}+\overline{N}_\theta=\rho\Omega^2r^2 \tag{9}$$

여기서 ρ는 원판의 밀도이다. 회전수가 일정하면 $\overline{N}_{r\theta}=0$이고 축대칭 문제가 되므로 식 (8)을 식 (9)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 코시-오일러 (Cauchy-Euler) 방정식 형태로 정리된다.

$$r^2\frac{d^2\overline{u}_r}{dr^2}+r\frac{d\overline{u}_r}{dr}-\mu^2\overline{u}_r=-\frac{\rho h\Omega^2r^3}{A_{rr}} \tag{10}$$

여기서 $\mu^2=A_{\theta\theta}/A_{rr}$

식 (10)의 해는 $\mu^2=9$인 경우에는 특이해지므로 $\mu^2=9$와 $\mu^2\neq9$인 경우에 대해 각각 경계조건을 적용하여 구한다. $r=b$에서 고정되고 $r=a$에서 자유인 경계조건은 다음과 같다.

$$\overline{u}_r(b)=0,\quad \overline{N}_r(a)=0 \tag{11}$$

식 (11)의 경계조건을 적용하면 식 (10)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{u}_r(r)=\frac{\rho h\Omega^2}{kA_{rr}}\frac{C_1r^\mu+C_2r^{-\mu}-r^3g(r)}{(\mu+\nu)(a/b)^\mu+(\mu-\nu)(b/a)^\mu} \tag{12}$$

여기서

$$\nu = A_{r\theta}/A_{rr}$$

$$C_1 = \{\delta_{\mu 3} + (3+\nu)g(a)\}a^3 b^{-\mu} + (\mu-\nu)g(b)a^{-\mu}b^3$$

$$C_2 = \{\delta_{\mu 3} + (\mu+\nu)g(a)\}a^{\mu} b^3 - (3+\nu)g(b)a^3 b^{\mu}$$

$$\begin{cases} k = 9-\mu^2, \ \delta_{\mu 3} = 0, \ g(r) = 1 \ \text{for} \ \mu^2 \neq 9 \\ k = 6, \ \delta_{\mu 3} = 1, \ g(r) = \ln(r) \ \text{for} \ \mu^2 = 9 \end{cases}$$

식 (12)를 식 (8)에 대입하면 $\overline{N}_r$과 $\overline{N}_\theta$를 구할 수 있으며, 이를 이용하여 원판의 변형률은 다음 식을 이용해 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \overline{\varepsilon}_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\theta} \\ A_{r\theta} & A_{\theta\theta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \overline{N}_r \\ \overline{N}_\theta \end{Bmatrix} \tag{13}$$

응력과는 달리 변형률은 두께방향에 따라 일정한 값을 가지므로 각 단층에서의 섬유방향과 횡방향의 변형률은 식 (13)의 결과로부터 변환하여 구할 수 있다.

2.3 진동방정식 및 해법

적층원판이 Ω의 속도로 회전할 때, 회전좌표계 (r, θ)에 대해 z-방향으로의 동적 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$D_{rr}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2\frac{\partial^3 w}{r\partial r^3}\right) + D_{\theta\theta}\left(\frac{\partial^4 w}{r^4\partial\theta^4} + 2\frac{\partial^2 w}{r^4\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 w}{r^2\partial r^2} + \frac{\partial w}{r^3\partial r}\right) + 2(D_{r\theta} + 2D_{ss})\left(\frac{\partial^4 w}{r^2\partial r^2\partial\theta^2} - \frac{\partial^3 w}{r^3\partial r\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 w}{r^4\partial\theta^2}\right) - \frac{\partial}{r\partial r}\left(\overline{N}_r\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\overline{N}_\theta\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right) + \rho h\frac{\partial w^2}{\partial t^2} = q_z \tag{14}$$

여기서 q_z는 단위면적당 작용하는 하중이다.

고정좌표계에 대한 자유진동 해는 식 (14)에서 분포하중 $q_z = 0$으로 하고 조화운동으로 가정하여 얻을 수 있다. 변형의 축 대칭성을 이용하여 다음과 같이 해를 가정한다.

$$w = R(r)e^{in\theta}e^{i\omega t} \tag{15}$$

식 (15)를 식 (14)에 대입하고 근사해를 $R(r) = \sum_{k=1}^{N} q_k f_k(r)$로 가정하여 갤러킨(Galerkin)방법을 적용하면 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$([K^b] + \Omega^2[K^\Omega] - \omega^2[M])\{q\} = \{0\} \tag{16}$$

여기서 $[K^b]$은 휨에 의한 강성행렬, $[K^\Omega]$는 회전에 의한 강성행렬, $[M]$은 질량행렬이다. 반경방향으로의 함수 $f_k(r)$는 참고문헌 (12)에서와 같은 직교함수를 사용한다.

식 (16)의 고유치는 운동좌표계 (r, θ)에 대한 고유진동수이며 고정좌표계 (r, ϕ)에 대한 고유치는 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_{mn} = \omega_{mn} \pm n\Omega \tag{17}$$

여기서 $\omega_{mn} + n\Omega$와 $\omega_{mn} - n\Omega$는 각각 전진파와 후진파의 진동수이며 m과 n은 각각 절원과 절선의 개수를 나타낸다. 후행파의 진동수가 원판의 회전수와 같아질 때 즉 $\omega_{mn} = n\Omega$일 때 회전속도는 임계속도 Ω_{cr}로 정의된다. 원판이 임계속도에서 회전할 때, 감쇠가 전혀 없다면 외부의 정적인 횡하중에 의해 원판의 운동은 발산하게 된다.

3. 계산결과 및 검토

앞서 유도된 결과를 광학 저장장치와 같은 제원을 갖는 원판에 적용하였으며 기하학적인 제원은 다음과 같다.

$$b = 15 \text{ mm}, \ a = 60 \text{ mm}, \ h = 1.2 \text{ mm}$$

Table 1에는 이 연구에서 사용된 재료들의 물성치를 나타낸다. PC는 폴리카보네이트(polycarbonate)로 기존의 CD의 재료이고, GFRP는 전형적인 유리섬유강화 복합재료인 E-glass/Epoxy로 선택하였으며 CFRP는 탄소섬유강화 복합재료로 T300/N5208을 선택하였다. Table 1에서 하첨자 1과 2는 각각 섬유방향과 섬유에 수직한 방향을 뜻하며 X와 Y는 1과 2방향으로의 인장강도를 의미한다.

3.1 정적강도

회전에 의해 발생한 면내하중에 대한 적층원판의 정적강도를 구하기 위해 $[0/90]_S$ 원판의 변형률 분

포를 구하였다. Fig. 3과 Fig. 4에는 GFRP로 구성된 $[0/90]_S$ 원판의 반경변형률 ε_r과 원주변형률 ε_θ의 분포를 제시하였다. 여기서 회전수 Ω의 단위는 rad/s이다. 먼저 Fig. 3에 제시된 반경변형률 ε_r을 살펴보면 [0]인 원판은 반경강화 원판에 해당되며 등방성 원판과 비슷한 분포를 갖는다. [90]인 경우는 원주강화 원판에 해당되어 반경변형률 또는 응력을 기지만으로 감당해야 하므로 파손이 빨리 발생할 수 있다. $[0/90]_S$ 원판의 ε_r 분포는 중간 반경부근에서 약간 큰 값을 갖는 것을 제외하고는 [0] 원판의 경우와 매우 유사한 분포를 갖는다. $[0/90]_S$ 원판은 $[90/0]_S$ 원판과 같은 변형률 분포를 가지므로 구분하여 제시하지 않았다. Fig. 4에 제시된 $[0/90]_S$ 원판의 ε_θ도 ε_r와 마찬가지로 [0] 원판과 유사한 분포를 가지며 외경 부근에에서 변형률의 증가가 크게 나타나고 있다.

GFRP에 비해 가벼우면서 강성과 강도가 우수한 CFRP 적층 원판의 반경변형률 ε_r과 원주변형률 ε_θ의 분포를 Fig. 5와 Fig. 6에 제시하였다. GFRP 원판에서와 마찬가지로 $[0/90]_S$ 원판의 변형률 분포는 [0] 원판과 유사하게 나타나고 있다.

Fig. 3 ~ Fig. 6에 제시된 변형률 분포를 가지고 최대변형률 이론(maximum strain theory)을 적용하여 최대 허용 회전수를 구하여 Table 2에 제시하였다. [0] 원판과 [90] 원판은 기지와 섬유 중 어느 하나가 파손될 때 최종파손으로 판정하였으며 $[0/90]_S$ 원판은 어느 한 층의 섬유가 파손될 때 최종파손으로 판정하였다. 최대 응력 이론을 이용한 참고문헌 (11)의 결과에 비해 최대 변형률 이론을 적용한 최대 허용 회전수가 약간 높게 평가 되었다.

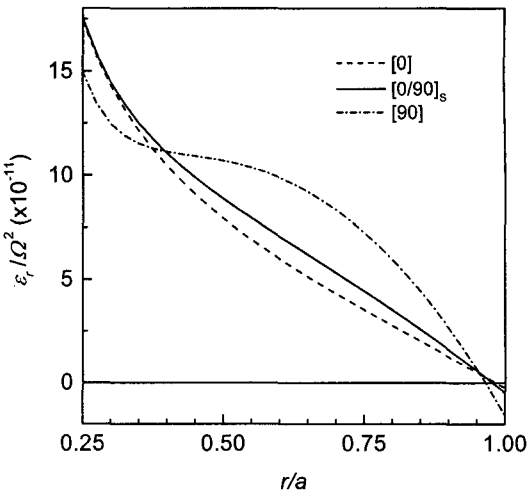

Fig. 3 Radial strain of GFRP laminate disk

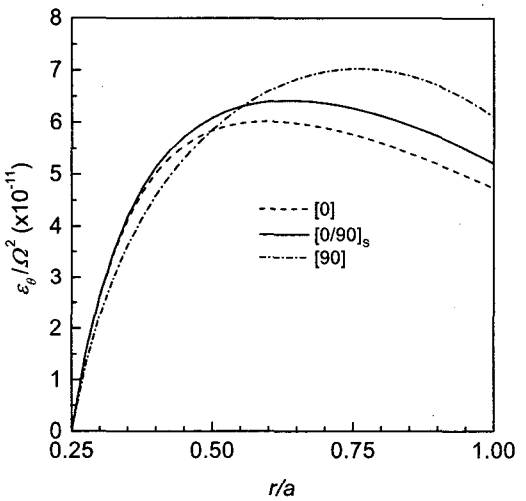

Fig. 4 Circumferential strain of GFRP laminate disk

Table 1 Material properties

Properties	PC	GFRP	CFRP
E_1	2.2 GPa	38.6 GPa	181.0 GPa
E_2	2.2 GPa	8.27 GPa	10.3 GPa
G_{12}	0.846 GPa	4.14 GPa	7.17 GPa
ν_{12}	0.30	0.26	0.28
ρ	1220 kg/m^3	1800 kg/m^3	1600 kg/m^3
X	54.9 MPa	1062 MPa	1500 MPa
Y	54.9 MPa	31 MPa	40 MPa

Table 2 Maximum rotating speeds based on maximum tensile strain

Material		Max. rotating speed	Failure mode
Polycarbonate		46,344 rpm	Radial failure
GFRP	[0]	75,347 rpm	Matrix failure
	[90]	47,768 rpm	Matrix failure
	$[0/90]_S$, $[90/0]_S$	105,172 rpm	Fiber failure @ 0°
CFRP	[0]	139,252 rpm	Fiber failure
	[90]	105,311 rpm	Matrix failure
	$[0/90]_S$, $[90/0]_S$	135,432 rpm	Fiber failure @ 0°

GFRP [90/0]s 적층원판의 경우 [0], [90]의 단층원판 보다 비해 상당히 높은 허용회전수를 갖는 나타냈으나 CFRP [0/90]s 적층원판의 경우는 [0] 원판 보다 약간 낮은 허용회전수를 나타냈다. 그 이유는 GFRP 단층 원판은 [0], [90] 원판 모두 기지 파손으로 최대 허용회전수가 결정되는 반면에 CFRP [0] 원판은 섬유 파손으로 최대 허용회전수가 결정되기 때문이다.

3.2 적층원판의 진동특성 및 임계속도

$[0/90]_S$ 원판과 $[90/0]_S$ 원판의 인장강성 $[A]$는 같지만 이들의 굽힘강성 $[D]$는 다르다. 적층원판의 진동특성은 굽힘강성에 큰 영향을 받으므로 두 적층순서에 따른 진동해석을 수행하였다.

GFRP 적층원판의 속도에 따른 고유진동수를 Fig. 7과 Fig. 8에 나타내었다. 원판이 회전하지 않을 때 (0,0) (0,1) (0,2) 모드와 같은 저차 모드에서 $[0/90]_S$ 원판이 $[90/0]_S$ 원판보다 큰 고유진동수를 갖는 반면에 (0,3) (0,4) (0,5) 모드와 같은 고차 모드에서는 반대로 나타나고 있다. 이는 저차 모드는 D_{rr}의 크기, 고차 모드는 $D_{\theta\theta}$의 크기에 보다 큰 영향을 받기 때문이라고 판단된다. $[0/90]_S$ 원판의 임계 모드는 (0,3) 모드이며 이때 임계속도는 15,293 rpm이다. 반면에 $[90/0]_S$ 원판의 임계모드는 (0,2)

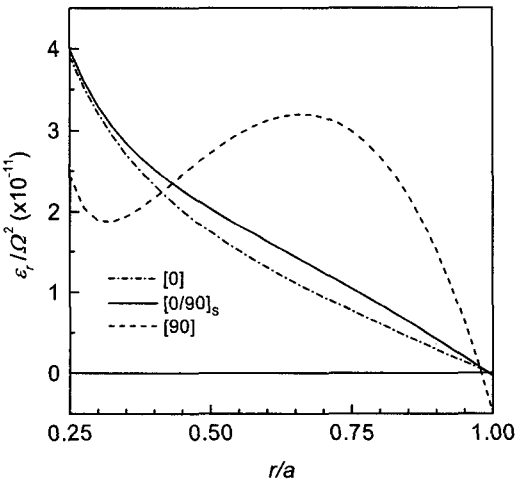

Fig. 5 Radial strain of CFRP laminate disk

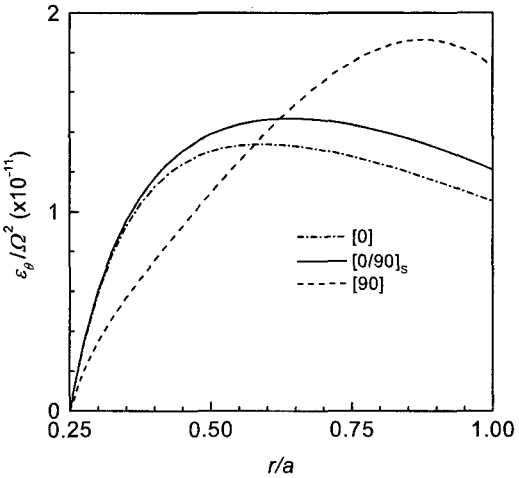

Fig. 6 Circumferential strain of CFRP laminate disk

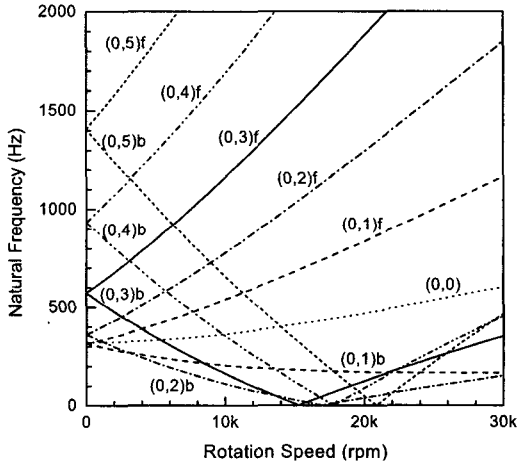

Fig. 7 Frequency-speed diagram for $[0/90]_S$ GFRP disk

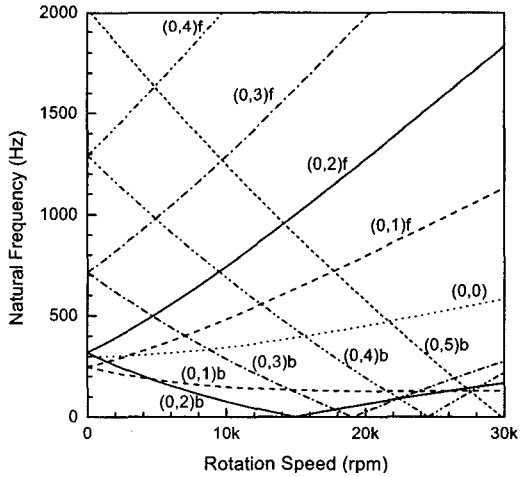

Fig. 8 Frequency-speed diagram for $[90/0]_S$ GFRP disk

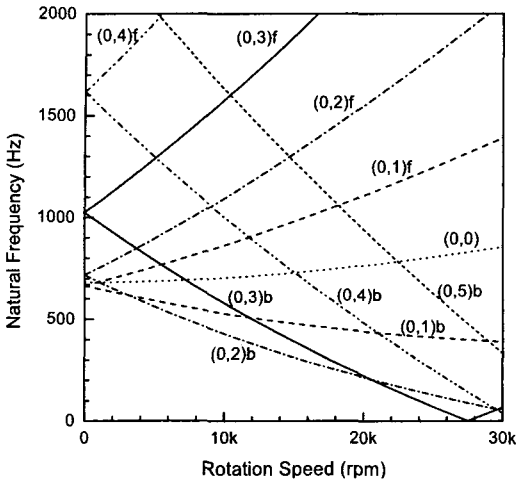

Fig. 9 Frequency-speed diagram for $[0/90]_S$ CFRP disk

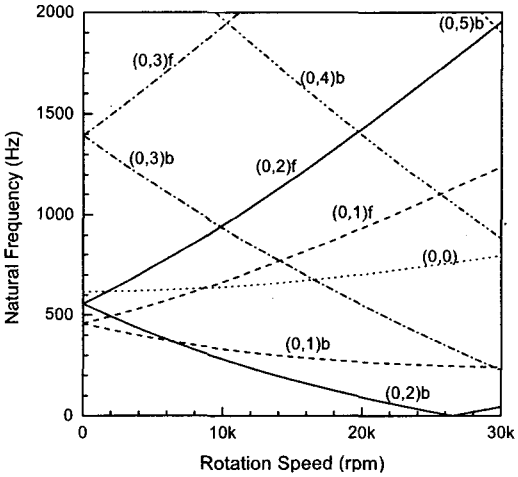

Fig. 10 Frequency-speed diagram for $[90/0]_S$ CFRP disk

모드이며 임계속도는 약 14,975 rpm이다. $[0/90]_S$ 원판의 임계속도가 크게 나타나고 있으나 $[90/0]_S$ 원판보다 그다지 크게 나타나고 있지 않다. 그 이유는 앞서 설명한 바와 같이 (0,3) 모드는 $D_{\theta\theta}$ 값에 크게 영향을 받으며 $[0/90]_S$ 원판의 $D_{\theta\theta}$ 값이 상대적으로 작기 때문이라고 판단된다.

Fig. 9와 Fig. 10에는 회전수에 따른 CFRP 원판의 고유진동수를 나타내었다. 원판이 회전하지 않을 때 CFRP 원판의 고유진동수는 GFRP 원판보다 크게 나타나고 있으며 모드별 진동수의 특성은 GFRP 원판과 유사하게 나타나고 있다. 임계모드도 GFRP

Table 3 Critical speeds and modes

Disk		Critical speed(rpm)	Critical mode
Polycarbonate		7,060	(0,2)
GFRP	[0]	12,529	(0,3)
	[90]	18,462	(0,2)
	$[0/90]_S$	16,979	(0,2)
		15,293	(0,3)
	$[90/0]_S$	14,975	(0,2)
		19,092	(0,3)
CFRP	[0]	19,106	(0,4)
	[90]	40,218	(0,2)
	$[0/90]_S$	33,783	(0,2)
		27,528	(0,3)
	$[90/0]_S$	26,520	(0,2)
		30,944	(0,3)

원판과 마찬가지로 $[0/90]_S$ 원판은 (0,3) 모드로 $[90/0]_S$ 원판은 (0,2) 모드로 나타나고 있다.

적층순서에 따른 임계속도와 임계모드를 Table 3에 정리하였다. $[0/90]_S$와 $[90/0]_S$ 적층원판은 경우는 최소 임계속도를 굵은체로 표시하였다. [0] 원판, $[0/90]_S$ 원판과 같이 D_{rr} 값이 큰 경우에는 (0,3) 모드 이상에서 임계모드가 나타나고 있다. 반면에 [90] 원판, $[90/0]_S$ 원판 같이 $D_{\theta\theta}$ 값이 큰 경우에는 (0,2) 모드가 임계모드가 되고 있음을 확인할 수 있다. 또한 복합재료 원판의 경우 [90] 원판이 가장 큰 임계속도를 갖는 것으로 나타났다. 그리고 $[0/90]_S$ 원판과 $[90/0]_S$ 원판은 비슷한 임계속도를 가지나 $[0/90]_S$ 원판이 약간 큰 임계속도를 갖는다.

일반적으로 단층 구조는 상대적으로 작은 정적강도에 의해 권장되지 않으나 Table 2와 Table 3에서 알 수 있듯이 [90] 원판은 가장 큰 임계속도를 가지며 이 임계속도는 회전에 의해 발생한 면내하중이 제한하는 허용회전수보다 작게 나타나므로 가장 높은 운용회전수를 갖은 결과를 주고 있다.

4. 결 론

이 연구에서는 단층으로 구성된 복합재료 회전원판이 갖는 단점을 보완하기 위해 복합적층 회전원판

의 응력 및 진동해석을 수행하였다. 회전하는 적층 원판의 응력분포식을 극좌표계에서 유도하였다. 응력분포식을 파손해석과 횡진동 해석에 이용하였다. 파손판정을 위해 최대변형률 이론을 적용하였으며 진동해석은 캘러킨법을 적용하여 고유진동수와 임계속도를 구하였다.

해석에 사용된 원판은 대칭 직교적층판으로 $[0/90]_S$와 $[90/0]_S$의 적층순서를 갖는 GFRP와 CFRP에 대한 해석을 수행하였다. 파손해석 결과 GFRP 직교적층 원판은 단층원판에 비해 월등히 향상된 회전강도를 갖는 반면 CFRP 직교적층 원판은 단층원판과 유사한 회전강도를 갖는다. 적층원판의 임계속도는 원주방향과 반경방향의 휨강성의 비의 크기에 따라 큰 영향을 받는다. 임계 모드는 D_{rr} 값이 큰 경우에는 (0,3) 모드로 나타나는 반면에 $D_{\theta\theta}$ 값이 큰 경우에는 (0,2) 모드로 나타난다.

이 연구결과가 다양한 형태의 회전원판의 경량화와 고속화에 활용될 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

(1) http://www.optware.co.jp/english/index tech.htm

(2) Lamb, H. and Southwell, R. V., 1921, "The Vibration of a Spinning Disk", Proceedings of the Royal Society, Vol. 99, pp. 272~280.

(3) Barash, S. and Chen, Y., 1972, "On the Vibration of a Rotating Disk", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 39, pp. 1143~1144.

(4) Tobias, S. A. and Arnold, R. N., 1957, "The Influence of Dynamic Imperfections on the Vibrations of Rotating Disks", Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Vol. 171, pp. 669~690.

(5) Mote, C. D. Jr., 1967, "Natural Frequencies in Annuli with Induced Thermal Membrane Stresses", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Vol. 89, pp. 611~618.

(6) Iwan, W. D. and Moeller, T. D., 1976, "The Stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 43, pp. 485~490.

(7) Kirkhope, J. and Wilson, G. J., 1976, "Vibration and Stress Analysis of Thin Rotating Discs Using Annular Finite Elements", Journal of Sound and Vibration, Vol. 44, No. 4, pp. 461~474.

(8) Ghosh, N. C., 1985, "Thermal Effect on the Transverse Vibration of High Speed Rotating Anisotropic Disk", Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 543~548.

(9) Son, H., Kikuchi, N., Ulsoy A. G. and Yigit A. S., 2000, "Dynamics of Prestressed Rotating Anisotropic Plates Subject to Transverse Loads and Heat Sources, Part I: Modelling and Solution Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 236, No. 3, pp. 457~485.

(10) Son, H., Kikuchi, N., Ulsoy A. G. and Yigit A. S., 2000, "Dynamics of Prestressed Rotating Anisotropic Plates Subject to Transverse Loads and Heat Sources, Part II: Application to a Specially Orthotropic Disk", Journal of Sound and Vibration, Vol. 236, No. 3, pp. 457~485.

(11) Koo, K. N., 2005, "In-plane Stress Analysis of Rotating Composite Disks", Journal of the Korean Society for Composite Materials, Vol. 18, No. 4, pp. 8~13.

(12) Koo, K. N., 2006, "Vibration Analysis and Critical Speeds of Rotating Polar Orthotropic Disks, Part I: Formulation and Solution Method", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 2, pp. 169~175.

(13) Koo, K. N., 2006, "Vibration Analysis and Critical Speeds of Rotating Polar Orthotropic Disks, Part II: Analysis Results", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 3, pp. 247~254.