한국소음진동공학회논문집 제 16 권 제 9 호, pp. 958~963, 2006.

변화하는 강성/감쇠를 갖는 계가 조화력을 받을 때의 운동

Motion of a System with Varying Stiffness/Damping Subject to Harmonic Force

이 건 명† · 박 오 철*

Gun-Myung Lee and O-Cheol Park

(2006년 7월 4일 접수 ; 2006년 8월 16일 심사완료)

Key Words : Force Frequency Shifting(가진주파수 이동), Low Frequency Shaker(저주파 가진기), Time Varying Damper(가변 댐퍼), Difference Frequency(차 주파수), Rotational Mode(회전모드), Frequency Component(주파수성분)

ABSTRACT

The motion of a system composed of a plate, constant springs and varying dampers is considered when the system is subject to harmonic force. Letting the frequencies of harmonic force and damper variation f_1 and f_2, respectively, the displacement at the center of the plate has the strongest component at frequency f_1. The angular displacement of the plate has strong components at $f_1 - f_2$ and the natural frequency of the rotational mode of the system. If these two frequencies coincide, the plate oscillates with almost single frequency and a large amplitude. These results can be applied to development of a moment shaker with low frequencies.

1. 서 론

빌딩, 탑, 다리와 같이 고유진동수가 낮은 대형 구조물의 동적 거동을 실험적으로 고찰하기 위하여 이들 구조물에 저주파수의 가진력을 제공하는 가진기가 필요하다. 이러한 가진기로 불평형질량(out-of-balance mass)을 이용한 가진기[1,2]와 서보 유압 가진기[3]가 주로 사용되고 있다.

한편 저주파수의 가진력 제공을 위한 새로운 형태의 가진기가 제안되었으며 이 가진기는 가진주파수 이동(force frequency shifting)현상을 이용하고 있다[4~6]. Fig. 1과 같이 구조물에 가진력 $F = F_0 \sin w_1 t$ 가 작용하고, 이 가진력의 작용점이 $s = s_0 + r \sin w_2 t$ 와 같이 구조물을 따라 앞뒤로 이동하면 이 구조물에는 두 개의 주파수 w_1과 w_2의 차$(w_1 - w_2)$와 합$(w_1 + w_2)$의 주파수를 갖는 일반화 힘(generalized force)이 작용하여 구조물을 가진하게 된다. 따라서 일반적인 불평형질량 가진기를 사용하여 이 가진기를 앞뒤로 움직이고, 두 개의 주파수를 조절함으로써 원하는 저주파수의 가진력을 얻을 수 있다. 그러나 이 방법에서는 가진기를 가진력의 방향과 직교하는 방향으로 왕복운동시켜야 하는 불편한 점이 있다.

가진기를 움직이지 않고 가진주파수 이동현상을 구현할 수 있는 가진기가 Fig. 2와 같이 제안되었다[7]. 이 가진시스템은 판과 여러 개의 스프링, 댐퍼로 이루어져 있다. 불평형질량 가진기로부터 주파수 w_1의 가진력이 판의 중앙에 작용하고, 임의의 한 순간에는 한 쌍의 스프링과 댐퍼만이 활동적이다. 즉 이 한 쌍의 스프링과 댐퍼만이 유한한 스프링상수와 감쇠계수를 갖고, 나머지 스프링과 댐퍼는 영의 계수를 갖는다. 활동적인 스프링과 댐퍼가 판을 따라서

† 책임저자 ; 정회원, 경상대학교 기계항공공학부
E-mail : gmlee@gnu.ac.kr
Tel : (055)751-5313, Fax : (055)757-5622
* 경상대학교 대학원 기계공학과

w_2의 주파수로 변화하면 스프링력과 감쇠력은 w_2의 주파수로 판을 따라 움직이게 되고, 구조물에는 두 주파수의 차인 w_1-w_2의 주파수를 갖는 일반화 힘이 작용하는 것이 확인되었다.

이 논문에서는 이러한 가진시스템의 운동을 이해하기 위하여 Fig. 3과 같이 두 개의 스프링과 댐퍼를 갖는 좌우 대칭의 간단한 시스템을 고려하였다. 이 가진시스템에서 다음의 세 가지 경우에 대하여 판의 운동을 고찰하였다.

(i) 스프링상수가 일정하고, 감쇠계수가 변화하는 경우

(ii) 감쇠계수가 일정하고, 스프링상수가 변화하는 경우

(iii) 스프링상수와 감쇠계수가 함께 변화하는 경우

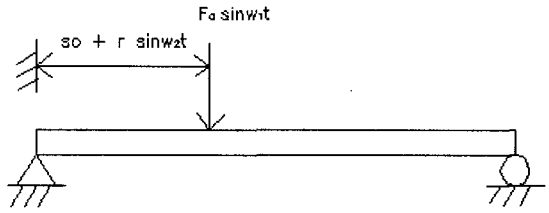

Fig. 1 Force frequency shifting with a reciprocating shaker

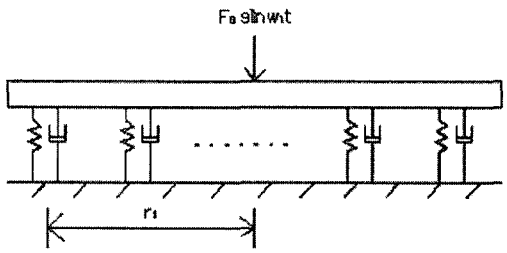

Fig. 2 A shaker composed of a plate, springs and dampers

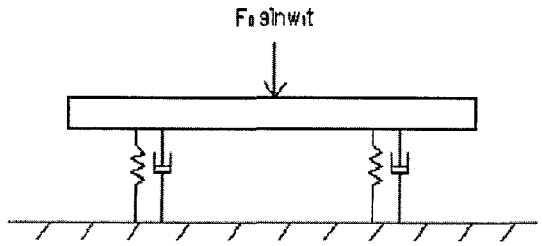

Fig. 3 A two-spring-damper system

2. 운동의 해석

이 시스템의 거동을 쉽게 해석하기 위하여 판은 변형이 없는 강체로 가정하고, 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$m\ddot{x} + \sum_i c_i\dot{x} + \sum_i c_i r_i\dot{\theta} + \sum_i k_i x + \sum_i k_i r_i\theta = F_0 \sin w_1 t \tag{1}$$

$$J\ddot{\theta} + \sum_i c_i r_i\dot{x} + \sum_i c_i r_i^2\dot{\theta} + \sum_i k_i r_i x + \sum_i k_i r_i^2\theta = 0 \tag{2}$$

이 식에서 m, J, x, θ, F_0, k_i, c_i, r_i 는 각각 판의 질량과 관성모멘트, 판 중심의 수직 변위와 판의 회전 변위, 가진력의 진폭, 각 스프링과 댐퍼의 스프링상수와 감쇠계수, 그리고 판의 질량 중심으로부터의 거리를 나타낸다. 한 쌍의 스프링과 댐퍼는 판 위의 동일 지점에 부착되어 있다고 가정한다.

이 시스템에서 두 개의 스프링의 스프링상수가 k로 동일하고 감쇠가 없을 때, 이 시스템의 운동방정식은 비연성화(decoupled)되고, 두 개의 고유진동수는 각각 병진모드와 회전모드의 고유진동수, w_{nd}와 w_{nr}이 되며 이들 고유진동수는 다음과 같이 구하여진다.

$$w_{nd} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$w_{nr} = \sqrt{\frac{k\sum r_i^2}{J}} \tag{3}$$

2.1 스프링상수가 일정하고 감쇠계수가 변화하는 경우

이 가진시스템에서 스프링의 스프링상수는 일정하고, 댐퍼의 감쇠계수는 시간에 따라서 변화하는 경우를 고찰하였다.

감쇠계수는 다음 식에서 나타낸 바와 같이 부드럽게 변화하도록 하였다.

$$c(t) = c_{\max}(0.42 - 0.5\cos wt + 0.08\cos 2wt) \tag{4}$$

위 식은 신호처리에 사용되는 Blackman 윈도우[8]를 나타내는 식이나 이 식을 채용한 특별한 이유는 없다. Fig. 4는 이 시스템에서 두 개의 댐퍼가 교대로 활동적이 되도록 감쇠계수가 변화하는 모습을 보이고 있다.

이 시스템의 운동을 해석하기 위하여 시뮬레이션을 수행하였다. 시스템의 운동방정식 (1), (2)를 주어진 시스템 매개변수와 외력에 대하여 Matlab을 사용하여 풀어서 판 중심의 수직변위 x와 회전변위 θ를 구하고, 이 시간데이터를 Fourier 변환하여 주파수성분을 구하였다. 사용된 시스템의 매개변수들은 $m = 30\,\mathrm{kg}$, $J = 100\,\mathrm{kgm}^2$, $k = 3.5\times10^4$ N/m, $c_{\max}=1\times10^3$ Ns/m, $r_1 = 1/3$ m, $f_1 = w_1/2\pi = 12$ Hz, $F_0=1000$ N이었고, $f_2 = w_2/2\pi$를 변화시켜가며 수치해석을 반복하였다. 이 때 f_2는 댐퍼의 개폐주파수로서 만약 $f_2=10$ Hz라면 댐퍼가 초당 10번씩 개폐됨을 의미한다.

Fig. 5와 6은 각각 $f_2=9$ Hz일 때의 x와 θ의 주파수성분을 보이고 있다. x의 주파수성분은 6, 7.56, 12, 24, 30 Hz에서 피크를 보이고 있는데 이 주파수는 각각 $2f_2-f_1$, 병진모드의 고유진동수 $f_{nd}=w_{nd}/2\pi$, f_1, $4f_2-f_1$, $2f_2+f_1$에 해당한다. 이 성분 중 f_1 성분이 가장 우세하며 다음으로 $2f_2-f_1$ 성분이 강하고, f_{nd}, $2f_2+f_1$ 성분의 순이었다. θ의 주파수성분은 1.38, 3, 15, 21 Hz에서 피크를 보이고 있는데 이 주파수는 각각 회전모드의 고유진동수 $f_{nr}=w_{nr}/2\pi$, f_1-f_2, $3f_2-f_1$, f_1+f_2에 해당하며 이 중 f_{nr} 성분과 f_1-f_2 성분이 우세하였다.

f_2를 변화시켰을 때 앞에서 관찰한 현상은 변화하지 않았다. 특별한 경우로 f_1-f_2와 회전모드의 고유진동수 f_{nr}이 일치하는 경우 θ의 주파수성분은 Fig. 7에서 보이는 것처럼 두 개의 피크가 합쳐져서 하나로 되고, 다른 주파수성분은 거의 나타나지 않았다. 즉 θ는 거의 한 주파수성분만을 갖는다. 이 때 스프링이 연결된 점에서의 수직변위 $x_1=x+r_1\theta$를 구하여 그 주파수성분을 Fig. 8에 나타내었다. 이 그림으로부터 x_1의 주파수성분은 f_1-f_2 성분이 가장 우세하여 x_1은 거의 하나의 주파수를 갖는 사인파형으로 변화함을 알 수 있다.

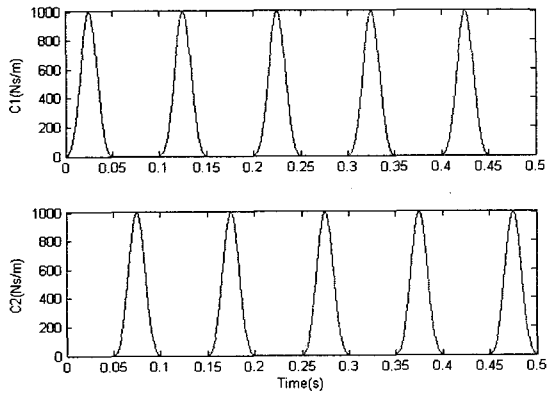

Fig. 4 Variation of the damping constants for a two-spring-damper system

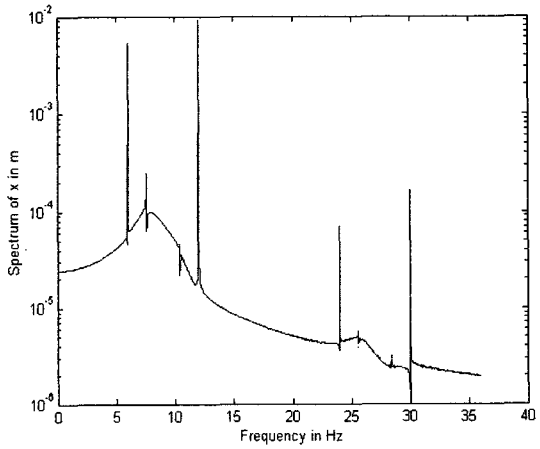

Fig. 5 Frequency spectrum of the displacement at the center of the plate

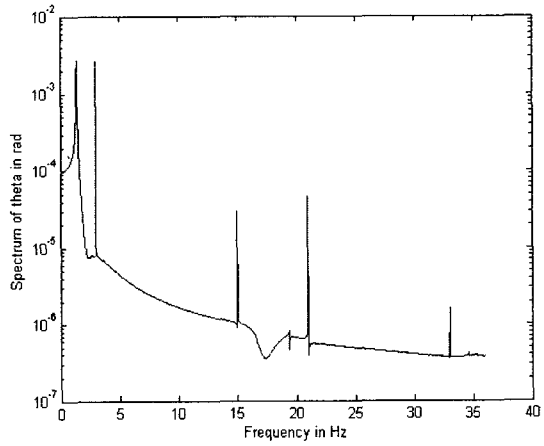

Fig. 6 Frequency spectrum of the angular displacement of the plate

f_2를 변화시켜가며 θ의 최대 주파수성분을 구하고, 이를 Fig. 9에 나타내었다. 이 그림을 관찰하면 θ의 최대 주파수성분은 $f_2 = 10.6$ Hz 부근에서 급격히 증가하여 $f_1 - f_2$가 회전모드의 고유진동수와 일치할 때 최대가 된다. 한편 f_2가 f_1과 같은 12 Hz에서는 θ의 진폭이 시간이 지남에 따라 점점 작아져 영에 수렴한다. 이로 말미암아 $f_2 = 12$ Hz에서 θ의 최대 주파수성분이 매우 작게 나타난다.

감쇠계수의 최대값 $c_{\max}$을 변화시켜가며 f_2에 대한 θ의 최대 주파수성분의 변화를 그래프로 나타내었을 때 Fig. 9와 유사한 결과를 얻었다. $f_1 - f_2 = f_{nr}$일 때 얻어지는 θ의 최대 주파수성분과 감쇠계수의 관계를 Fig. 10에 나타내었다. 이 그림으로부터 $c_{\max}$가 증가함에 따라 θ의 최대 주파수성분은 급격히 증가하여 최고점에 도달한 후 완만하게 감소하는 것을 볼 수 있다. 현재 고려하고 있는 시스템에서 이 최고점에 대응하는 감쇠계수는 약 11,500 Ns/m 이며, 이 값은 Fig. 3을 1자유도계로 간주할 때 감쇠비 3.97에 해당하는 값이다.

이상의 결과로부터 $f_1 - f_2$가 회전모드의 고유진동수와 일치하도록 함으로써 판을 $f_1 - f_2$의 주파수로 큰 진폭의 요동운동을 하게 할 수 있다. 판의 이러한 운동으로 인하여 스프링과 감쇠기가 설치된 기초에는 주파수 $f_1 - f_2$의 모멘트가 작용하게 되므로

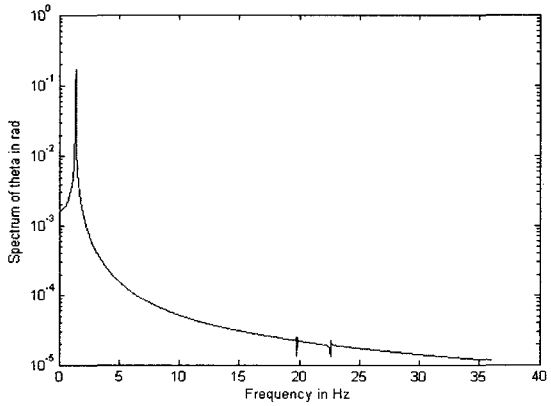

Fig. 7 Frequency spectrum of the angular displacement when the difference frequency coincides with the natural frequency of the rotational mode

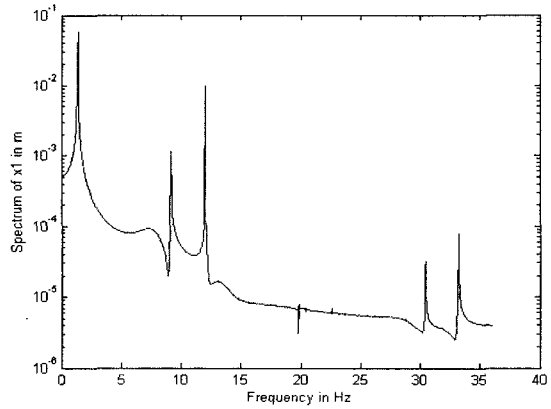

Fig. 8 Frequency spectrum of the displacement at the point where a spring and a damper are connected

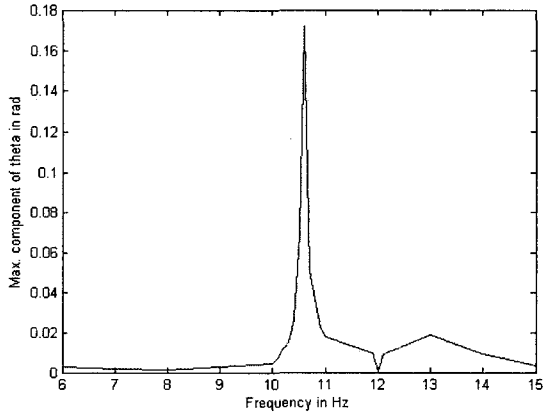

Fig. 9 Variation of the maximum frequency component of the angular displacement with frequency f_2

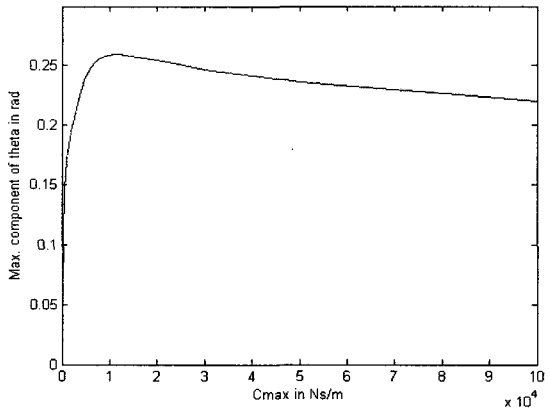

Fig. 10 Variation of the maximum frequency component of the angular displacement with the damping constant $c_{\max}$

이 시스템은 모멘트가진기로 사용될 수 있다. 또한 f_1과 f_2의 차이를 작게 함으로써 얼마든지 저주파의 모멘트를 얻을 수 있다. 실제로 이러한 저주파 모멘트가진기를 제작할 때 유일한 어려운 점은 가변 댐퍼를 제작하는 일이다. 그러나 자기 또는 전기 유변유체(rheological fluid)를 사용한 가변 댐퍼[9]가 이미 상용화되었으므로 이러한 형태의 저주파 모멘트가진기는 쉽게 제작될 수 있을 것으로 기대한다.

2.2 감쇠계수가 일정하고 스프링상수가 변화하는 경우

Fig. 3과 같은 시스템에서 감쇠계수가 일정하고, 스프링상수가 식 (4)와 같이 변화하는 경우를 고려하였다. 앞 절에서와 같은 매개변수들의 값을 사용하여 시뮬레이션을 수행하고, 판의 수직변위 x와 회전변위 θ의 주파수성분을 구하였다. Fig. 11과 12는 각각 $f_2=9$ Hz일 때의 x와 θ의 주파수성분을 보이고 있다. f_2를 변화시켜가며 x와 θ의 주파수성분을 관찰하였을 때 x에서 f_1 성분이 가장 우세하였으며 그 크기는 f_2의 값에 무관하게 거의 일정하였다. 다음으로 $2f_2-f_1$, $2f_2+f_1$, $4f_2-f_1$성분이 우세하였다.

θ에서는 f_2의 값에 따라 f_1-f_2성분과 0.6~0.66 Hz 성분 중의 하나가 가장 강하였고, 그 외에 f_1+f_2, $3f_2-f_1$ 성분이 존재하며 그 크기순은 일정하지 않았다. 이러한 결과는 2.1절에서 감쇠계수가 변화하는 경우에 $f_{nr}=1.40$ Hz 성분이 발생하는 대신에 0.6~0.66 Hz 성분이 발생하는 것 외에는 2.1절에서 관찰한 결과와 유사하다.

따라서 0.6~0.66 Hz 성분의 발생 원인에 대하여 고찰하였다. 이 시스템에서 스프링상수 k는 Fig. 13에서 보이는 것처럼 시간에 따라 변화한다. 이 스프링상수의 시간에 대한 평균값을 계산하면 $\bar{k}=0.21k_{\max}$이 되고, 이 값을 식 (3)의 k에 대입하면 회전모드의 고유진동수 $f_{nr}=0.64$ Hz를 얻는다. 따라서 0.6~0.66 Hz 성분은 이 시스템의 f_{nr}성분이라고 결론지을 수 있다.

f_2를 변화시켜가며 θ의 최대 주파수성분을 구하고, 이를 그래프로 나타내었을 때 Fig. 9와 유사한 결과를 얻었다. 즉 $f_1-f_2=f_{nr}$을 만족하는 f_2에서 최대값을 나타내었다. 그러나 이 최대값은 스프링상수가 일정한 경우의 최대값에 비하여 매우 작아서 약 13 % 수준이었다. 이 결과로부터 판의 회전변위의

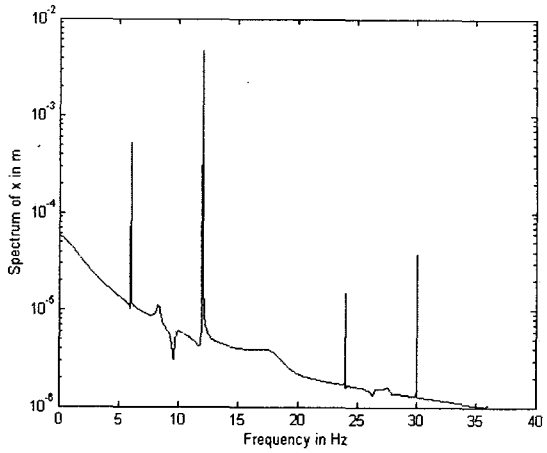

Fig. 11 Frequency spectrum of the displacement at the center of the plate for case (ii)

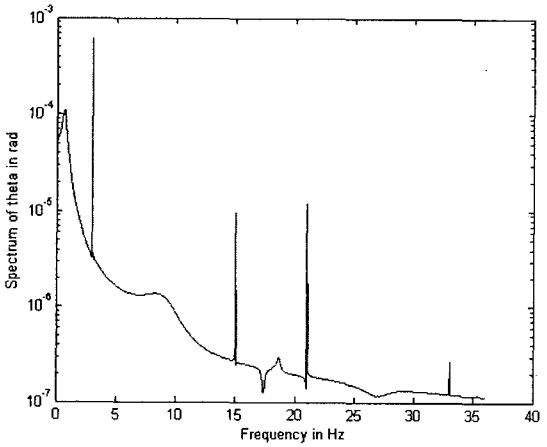

Fig. 12 Frequency spectrum of the angular displacement of the plate for case (ii)

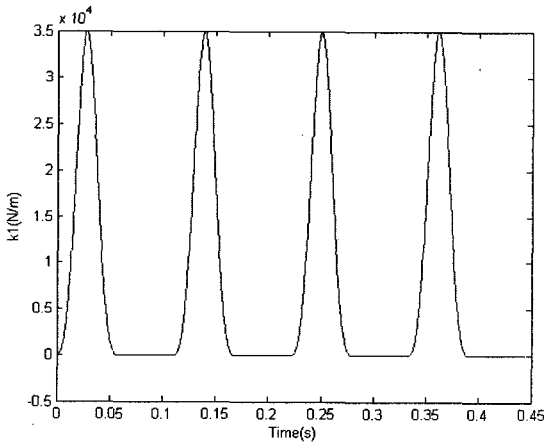

Fig. 13 Variation of the spring constant for case (ii)

진폭을 크게 하기 위해서는 스프링상수가 변화하는 경우보다는 스프링상수는 일정하고 감쇠계수가 변화하는 경우가 바람직함을 알 수 있다.

2.3 스프링상수와 감쇠계수가 함께 변화하는 경우

스프링상수와 감쇠계수가 식 (4)에서와 같이 함께 변화하는 경우를 고려하였다. 이 때의 수치해석 결과는 2.2절의 결과와 대체로 유사하였다. 차이점은 x가 2.2절의 결과보다 많은 주파수성분을 가지고 있어서 작기는 하지만 f_2-f_{nr}, f_2+f_{nr} 성분을 지니고 있었다.

3. 결 론

이 논문에서는 판, 일정한 스프링상수를 갖는 스프링, 그리고 가변 댐퍼로 이루어진 시스템이 조화력을 받을 때의 거동을 해석하였다. 조화력의 주파수가 f_1이고, 가변 댐퍼의 변화 주파수가 f_2일 때, 판의 수직변위의 주파수성분은 f_1성분이 가장 우세하며 그 크기는 f_2의 값에 무관하게 거의 일정하였다. 다음으로 $2f_2-f_1$ 성분이 강하였다. 판의 회전변위의 주파수성분은 회전모드의 고유진동수 성분과 f_1-f_2 성분이 우세하였다. 회전모드의 고유진동수와 f_1-f_2가 일치하면 회전변위는 이 주파수에서 큰 주파수성분을 갖고, 다른 주파수성분은 매우 미약하였다. 그리고 회전변위의 최대 주파수성분은 이 주파수에서 최대가 되어 판의 운동은 거의 한 주파수로 큰 폭으로 요동하는 운동이 된다.

댐퍼의 감쇠계수가 일정하고 스프링상수가 변화하는 경우에도 유사한 결과가 관측되었다. 이 경우의 회전모드의 고유진동수는 변화하는 스프링상수의 시간에 대한 평균값을 사용함으로써 구하여 진다.

후 기

이 연구는 산업자원부 지방기술혁신사업(RTI04-01-03) 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

(1) Bachmann, H., 1995, "Vibration Problems in Structures-Practical Guidelines", Birkhauser Verlag, Basel.

(2) Stoessel, J. C., et al., 1987, "High Level Vibration Tests Using a 2-kiloton Eccentric Mass Vibrator", Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, pp. 166~171.

(3) Pietrzko, S. and Cantieni, R., 1996, "Modal Testing of a Steel/Concrete Composite Bridge with a Servo-hydraulic Shaker", Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, pp. 91~98.

(4) Koss, L. L., 1999, "Force Frequency Shifting for Structural Excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 219, pp. 223~237.

(5) Koss, L. L., 1996, "Fluctuating Moment Shaker for Frequency Shifting and Structural Excitation", Proceedings of the 3rd International Conference of Motion and Vibration Control, pp. 258~261.

(6) Koss, L. L, He, Y. Y. and Wang, X., 1997, "Bridge and Beam Response to Harmonic Spatial and Time Loads", Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference, pp. 901~904.

(7) Lee, G.-M., Koss, L. L. and Lee, J.-S., 2003, "Development of a Low Frequency Vibration Shaker Using Force Frequency Shifting", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 4, pp. 274~280.

(8) Manual, 1992, "Signal Processing Toolbox - For Use with MATLAB", MathWorks, Inc.

(9) Weiss, K. D., et al., 1993, "High Strength Magneto- and Electro-rheological Fluids", SAE Technical Paper Series 932451, pp. 425~430.