한국소음진동공학회논문집 제 16 권 제 9 호, pp. 912~918, 2006.

연성강성 효과를 고려한 회전하는 다중 블레이드 시스템의 굽힘진동 해석

Bending Vibration Analysis of Rotating Multi-blade Systems Considering the Coupling Stiffness Effect

임 하 성* · 권 성 훈** · 유 홍 희†

Ha Seong Lim, Sung Hun Kwon and Hong Hee Yoo

(2006년 5월 19일 접수 ; 2006년 8월 30일 심사완료)

Key Words : Bending Vibration Analysis(굽힘진동 해석), Multi-blade(다중 블레이드), Coupling Stiffness Effect(연성강성 효과), Cantilever Beams(외팔보), Natural Frequency(고유진동수), Mode Shapes(모드형상), Critical Angular Speed(임계 각속도), Critical Hub Radius Ratio(임계 축 반경비)

ABSTRACT

A modeling method for the vibration analysis of rotating multi-blade systems considering the coupling stiffness effect is presented in this paper. Blades are assumed as cantilever beams and the coupling stiffness effect originates from disc or shroud between blades. As the angular speed, hub radius ratio, and the coupling stiffness vary, the natural frequencies of the system vary. Numerical results show that the coupling stiffness is very important to estimate the natural frequencies. Along with the natural frequencies, associated mode shapes, critical angular speed, and critical hub radius ratio are obtained through the analysis.

1. 서 론

회전하는 주기적 순환 구조물의 형태를 가진 공학적 예제로 터빈 블레이드, 헬리콥터 회전익 터보엔진의 휀 등을 들 수 있다. 이러한 순환 구조물들은 기준 축을 중심으로 외팔보 형태의 블레이드들로 구성되어 있으며 기준 축 혹은 측판의 강성으로 인하여 블레이드에 영향을 미치게 된다. 이로 인해 단일 블레이드와 동적 특성이 달라지며 블레이드간의 연성효과로 인해 고유진동특성이 변화하게 된다. 따라서 이러한 순환 구조 시스템의 적절한 설계를 위해 그 동적특성을 정확히 예측할 수 있는 해석방법이 요구된다.

회전하는 구조물의 동특성 변화에 관한 연구는 Southwell의 연구를[1] 기원으로 하고 있다. 그는 외팔보의 회전에 따른 고유진동수 변화를 계산할 수 있는 모델을 제시하였다. 그 후 Schilhansl은[2] 회전 외팔보의 굽힘진동 방정식을 유도하고 이에 Ritz방법을 적용하여 Southwell방정식의 정확성을 확보하였다. 1970년대에 들어와 전산기의 본격적 사용에 힘입어 운동방정식을 고유치 문제로 변환하여 진동해석을 하려는 수치적인 방법[3] 이 등장하였으며 이러한 방법은 고유진동수를 더 정확하게 구할 수 있다는 것 외에 모드형상도 구할 수 있다는 장점을 갖는다. 그 후 인장방향 변형변수를 사용하는 진동해석을 위한 모델링 방법도 등장하였다[4,5]. 또한 블레이드에 관한 진동 해석에 관한 많은 양의 문헌이 발

† 책임저자; 정회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02)2220-0446, Fax : (02)2293-5070
* 정회원, 한양대학교 대학원 기계공학과
** 정회원, 한양대학교 대학원 기계공학과

표되고 있으며 블레이드뿐 아니라 패킷으로 구성된 블레이드 디스크에 관한 연구도[6,7] 진행되고 있다. 그러나 이러한 연구들은 대게 단일 외팔보 진동특성 연구에 초점이 맞춰져 있으며 블레이드와 같은 다중 보구조물에 대한 연구는 단일 외팔보에 관한 연구에 비해 상당히 드문 편이다.

이 논문에서는 블레이드를 외팔보로, 디스크 혹은 측판의 연성효과를 스프링으로 가정하여 각 블레이드 간에 연결된 연성스프링의 강성 및 위치 등을 고려한 다중 블레이드 폐쇄계 시스템의 운동방정식을 유도하였다. 이를 바탕으로 최종적으로 개방계 시스템인 6개 블레이드로 이루어진 패킷 시스템에 관한 진동특성을 연구하는데 목적을 두었다. 이 연구는 참고문헌 (5)에 제시된 굽힘진동 해석에 관한 모델링을 토대로 블레이드 간의 연성, 연성스프링의 위치, 블레이드 길이에 대한 축반경비, 회전각속도 등에 의한 진동특성 변화를 종합적으로 조사하였다는 점에 그 고유성을 갖는다.

2. 운동방정식

이 절에서는 복합변형 변수를 이용하여 단일 블레이드의 운동방정식을 유도한 참고문헌 (4, 5)를 참조하여 구한 다중 블레이드 폐쇄계의 운동방정식 유도과정을 간략히 소개하기로 한다.

Fig. 1은 폐쇠계 시스템으로 다중 블레이드의 형상이며 탄성변위들의 의미와 기준 좌표계를 나타내고 있다. $\hat{a}_1$과 $\hat{a}_2$는 기준계(reference frame) A에 부착된 서로 수직인 단위 벡터를 나타내며, x는 보의 고정점 O로부터 변형 전 임의점 P_0까지의 거리를, k는 보 구조물 사이의 연성스프링 강성을, a는 연성스프링의 연결된 위치를, $\vec{u}^{<n>}$는 n번째 블레이드의 탄성변위를, $s^{<n>}$는 임의 질점의 위치에서 블레이드가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 모드방법을 이용해 상미분 운동방정식을 유도하기 위해 $s^{<n>}$와 $u_2^{<n>}$를 다음과 같이 근사화한다.

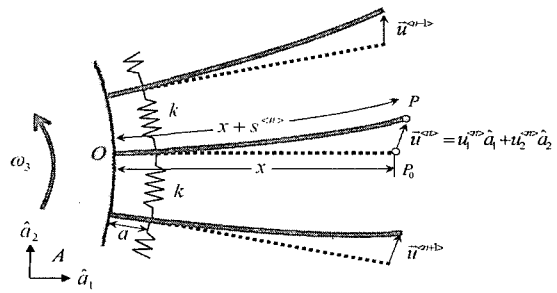


Fig. 1 Configuration of multi-blades as closed system

$$s^{<n>}(x,t)=\sum_{i=1}^{\mu_1}\phi_{1i}(x)q_{1i}^{<n>}(t) \tag{1}$$

$$u_2^{<n>}(x,t)=\sum_{i=1}^{\mu_2}\phi_{2i}(x)q_{2i}^{<n>}(t) \tag{2}$$

여기서 ϕ_{1i}와 ϕ_{2i}는 인장방향과 굽힘방향의 모드함수들이고, $q_{1i}^{<n>}$와 $q_{2i}^{<n>}$는 시간의 함수인 일반좌표들이며, μ_1과 μ_2는 일반좌표의 수이다. 반경 r인 강체축 A가 $\vec{a}_3$방향으로 속력 ω_3로 회전할 때 A의 각속도와 P점의 속도는 다음과 같이 구해진다.

$$\vec{\omega}^A=\omega_3\hat{a}_3 \tag{3}$$

$$\vec{v}^P=[v_1+\dot{u}_1-\omega_3u_2]\hat{a}_1+[v_2+\dot{u}_2+\omega_3(x+u_1)]\hat{a}_2 \tag{4}$$

$u_1^{<n>}$은 $s^{<n>}$와 $u_2^{<n>}$로 표시되어야 하며 이를 위해 다음의 근사화된 관계식이 사용된다.

$$s^{<n>}=u_1^{<n>}+\frac{1}{2}\int_0^{l^{<n>}}\left(\frac{\partial u_2^{<n>}}{\partial\sigma}\right)^2d\sigma \tag{5}$$

Kane의 방법을[10] 따른 운동방정식은 다음과 같다.

$$\int_0^l\rho\left(\frac{\partial\vec{v}^P}{\partial\dot{q}_i}\right)\cdot\frac{d\vec{v}^P}{dt}dx+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0 \tag{6}$$

여기서 l과 ρ는 보의 길이와 보의 단위길이당 질량을 나타내며, U는 보의 인장 및 굽힘에 의한 탄성에너지, 연성스프링의 의한 탄성에너지로 다음과 같이 표현된다.

$$U^{<n>}=\frac{1}{2}\int_0^{l^{<n>}}\left[EA\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2dx+EI\left(\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}\right)^2dx\right]$$

$$+\frac{1}{2}k\left[u_2^{<n>}(a)-u_2^{<n-1>}(a)\right]^2 \qquad (7)$$
$$+\frac{1}{2}k\left[u_2^{<n+1>}(a)-u_2^{<n>}(a)\right]^2$$

여기서 E는 영의계수, A는 보의 단면적, I는 보의 2차 면적 모멘트를 나타낸다. 회전하는 다중 블레이드 폐쇄계 시스템의 운동방정식은 이상의 과정을 종합하여 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1}\left[m_{ij}^{11}\ddot{q}_{1j}^{<n>}-\omega_3^2 m_{ij}^{11}q_{1j}^{<n>}+k_{ij}^{S}q_{1j}^{<n>}\right]$$
$$-\sum_{j=1}^{\mu_2}\left[2\omega_3 m_{ij}^{12}\dot{q}_{2j}^{<n>}+\dot{\omega}_3 m_{ij}^{12}q_{2j}^{<n>}\right] \qquad (8)$$
$$=-\left(\dot{v}_1-\omega_3 v_2\right)P_{1i}+\omega_3^2 Q_{1i}$$
$$(i=1,\cdots,\mu_1)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2}\left[m_{ij}^{22}\ddot{q}_{2j}^{<n>}+\left\{k_{ij}^{B}-\left(\dot{v}_1-\omega_3 v_2\right)k_{ij}^{GA}\right.\right.$$
$$\left.+\omega_3^2 k_{ij}^{GB}-\omega_3^2 m_{ij}^{22}\right\}q_{2j}^{<n>}$$
$$\left.-k\left(k_{ij}^{C}q_{2j}^{<n-1>}-2k_{ij}^{C}q_{2j}^{<n>}+k_{ij}^{C}q_{2j}^{<n+1>}\right)\right]$$
$$+\sum_{j=1}^{\mu_1}\left[2\omega_3 m_{ij}^{21}\dot{q}_{1j}^{<n>}+\dot{\omega}_3 m_{ij}^{21}q_{1j}^{<n>}\right] \qquad (9)$$
$$=-\left(\dot{v}_2+\omega_3 v_1\right)P_{2i}-\dot{\omega}_3 Q_{2i}$$
$$(i=1,\cdots,\mu_2)$$

여기서

$$m_{ij}^{ab}=\int_0^l \rho\phi_{ai}(x)\phi_{bj}(x)dx$$
$$k_{ij}^{S}=\int_0^l EA\phi_{1i}'(x)\phi_{1j}'(x)dx$$
$$k_{ij}^{B}=\int_0^l EI_{zz}\phi_{2i}''(x)\phi_{2j}''(x)dx$$
$$k_{ij}^{GA}=\int_0^l \rho(l-x)\phi_{2i}'(x)\phi_{2j}'(x)dx \qquad (10)$$
$$k_{ij}^{GB}=\int_0^l \frac{\rho}{2}\left(l^2-x^2\right)\phi_{2i}'(x)\phi_{2j}'(x)dx$$
$$k_{ij}^{C}=\phi_{2i}(x)\phi_{2j}(x)$$
$$P_{ai}=\int_0^l \rho\phi_{ai}(x)dx$$
$$Q_{ai}=\int_0^l \rho x\phi_{ai}(x)dx$$

3. 진동방정식

회전 외팔보의 경우 인장방향 모드에 의한 진동수는 굽힘모드에 의한 진동수에 비해 훨씬 높다. 따라서, 이 두 방향 모드들은 서로 거의 간섭 효과를 가지지 않는다는 가정하에, 식 (9)만을 사용하여 굽힘 진동해석을 실시한다.

Fig. 2에서 반경이 r이고 회전 각속도 Ω인 축에 부착된 6개 블레이드의 경우 기준점 0의 속도벡터의 $\hat{a}_1$과 $\hat{a}_2$방향 스칼라 구성요소는 $v_1=0$, $v_2=r\Omega$가 되며 이와 인장방향 운동에 의한 간섭효과를 무시하는 가정을 이용하여, 회전각속도가 일정한 정상상태에 관한 식 (9)를 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2}\left[m_{ij}^{22}\ddot{q}_{2j}^{<n>}+\left\{k_{ij}^{B}+\Omega^2\left(rk_{ij}^{GA}+k_{ij}^{GB}-m_{ij}^{22}\right)\right\}q_{2j}^{<n>}\right.$$
$$\left.-k\left(k_{ij}^{C}q_{2j}^{<n-1>}-2k_{ij}^{C}q_{2j}^{<n>}+k_{ij}^{C}q_{2j}^{<n+1>}\right)\right]=0 \qquad (11)$$

식 (11)을 무차원화된 진동방정식으로 변환시키기 위해 다음과 같은 무차원 매개변수 및 변수들을 정의한다.

$$\tau\equiv\frac{t}{T},\quad \xi\equiv\frac{x}{l},\quad \theta\equiv\frac{q}{l},\quad \delta\equiv\frac{r}{l},\quad \alpha\equiv\frac{a}{l}$$
$$\gamma=\Omega T,\quad \beta=\frac{kl^3}{EI_{zz}},\quad T=\sqrt{\frac{\rho l^4}{EI_{zz}}} \qquad (12)$$

식 (12)를 이용하여 식 (13)과 같은 무차원 진동방정식을 구할 수 있다.

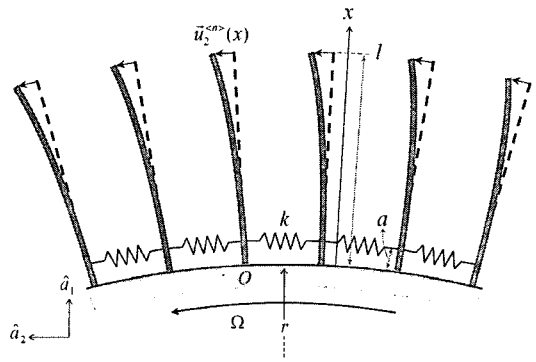


Fig. 2 A packet system containing six blades

$$\sum_{j=1}^{\mu}\Big[M_{ij}\ddot{\theta}_j^{<n>}+\Big\{K_{ij}^{B}+\gamma^2\Big(\delta K_{ij}^{GA}+K_{ij}^{GB}-M_{ij}\Big)\Big\}\theta_j^{<n>}$$
$$-\beta\Big(K_{ij}^{C}\theta_j^{<n-1>}-2K_{ij}^{C}\theta_j^{<n>}+K_{ij}^{C}\theta_j^{<n+1>}\Big)\Big]=0 \quad (13)$$

여기서

$$M_{ij}=\int_0^1 \varphi_i(\xi)\varphi_j(\xi)\,d\xi$$
$$K_{ij}^{B}=\int_0^1 \varphi_{i,\xi\xi}(\xi)\varphi_{j,\xi\xi}(\xi)\,d\xi$$
$$K_{ij}^{GA}=\int_0^1 (1-\xi)\varphi_{i,\xi}(\xi)\varphi_{j,\xi}(\xi)\,d\xi \quad (14)$$
$$K_{ij}^{GB}=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-\xi^2)\varphi_{i,\xi}(\xi)\varphi_{j,\xi}(\xi)\,d\xi$$
$$K_{ij}^{C}=\varphi_i(\alpha)\varphi_j(\alpha)$$

φ_j는 ϕ_j와 동일한 함수값을 가지나 ξ의 함수이며, $\ddot{\theta}_j$은 θ_j의 τ에 관한 2차 미분을 나타낸다.

식 (13)으로부터 Fig. 2와 같은 6개 블레이드로 구성된 개방계 시스템의 진동방정식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{\theta}\}+[K]\{\theta\}=\{0\} \quad (15)$$

여기서

$$[M]=\begin{bmatrix} M_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_{ij}\end{bmatrix}_{6\times 6}$$
$$[K]=\begin{bmatrix} [K^{12}] & 0 & 0 \\ 0 & [K^{34}] & 0 \\ 0 & 0 & [K^{56}]\end{bmatrix}_{6\times 6}$$
$$[K^{12}]=\begin{bmatrix} K_{ij}+\beta K_{ij}^{C} & -\beta K_{ij}^{C} \\ -\beta K_{ij}^{C} & K_{ij}+2\beta K_{ij}^{C}\end{bmatrix} \quad (16)$$
$$[K^{34}]=\begin{bmatrix} K_{ij}+2\beta K_{ij}^{C} & -\beta K_{ij}^{C} \\ -\beta K_{ij}^{C} & K_{ij}+2\beta K_{ij}^{C}\end{bmatrix}$$
$$[K^{56}]=\begin{bmatrix} K_{ij}+2\beta K_{ij}^{C} & -\beta K_{ij}^{C} \\ -\beta K_{ij}^{C} & K_{ij}+\beta K_{ij}^{C}\end{bmatrix}$$

$$K_{ij}=K_{ij}^{B}+\gamma^2\Big(\delta K_{ij}^{GA}+K_{ij}^{GB}-M_{ij}\Big)$$

모드 해석을 위하여 열벡터 $\{\theta\}$를 다음과 같이 나타낸다.

$$\{\theta\}=e^{j\lambda\tau}\{\eta\} \quad (17)$$

여기서 λ는 고유진동수이고 $\{\eta\}$는 모드형상을 나타내는 모드벡터이다. 식 (17)을 식 (15)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\lambda^2[M]\{\eta\}=[K]\{\eta\} \quad (18)$$

이 식 (18)을 이용하여 모드 해석을 수행할 수 있다.

4. 수치해석

수치해석을 위해 굽힘방향 변위의 가상모드(assumed modes)들로는 고정된 외팔보의 굽힘진동모드들을 사용하였으며 5개의 모드들을 이용하였다. 이 논문의 방법에 의해 구해진 수치해석 결과들의 정확성과 신뢰성을 검증하기 위해서는 비교할 수 있는 이전 연구결과가 필요하나 그러한 이전 연구결과들을 발견할 수가 없었으므로 회전하지 않는 다중 블레이드 시스템의 진동 특성을 구한 참고문헌 (9)의 결과들을 이용해 제한적으로 본 방법의 정확성과 신뢰성을 검증하였다. Table 1은 5개 모드를 사용한 3개의 외팔보 시스템의 결과로 총 15개 고유진동수를 구할 수 있었으며 3개씩 그룹을 이루는 걸 알 수 있다. 이 표는 제시된 방법에 의한 결과가 참고문헌 (9)의 결과와 거의 일치하는 것을 알 수 있다. 이와 같은 비교 연구를 바탕으로 이 연구는 6개 외팔보로 구성된 개방계 시스템에 대해 수치해석을 수행하였고 이때 6개의 고유진동수로 구성된 5개 set의 결과를 얻을 수 있었다. Table 2는 각 set들의 첫 번째로 나타나는 고유진동수로서 이는 단일 외팔보에서의 고유진동수 값과 같고 Fig. 4에서 첫 번째로 나타나는 모드형상임을 알 수 있다. 이는 물리적으로 이에 해당하는 고유진동수에 6개의 보가 항상 같이 움직이는 현상이라 볼 수 있다. 이러한 시스템의 각 set의 첫 번째 고유진동수는 강성 β에 따라 변하지 않았지만 블레이드 구조물이 폐쇄계 시스템일 경우

강성 β가 증가함에 따라 첫 번째 고유진동수들이 증가하는 걸 알 수 있었다.

Fig. 3은 고유진동수가 회전각속도에 따라 변화되는 것을 보여주며, 가장 낮은 6개의 고유진동수로 이루어진 첫 번째 set의 결과이다. 여기서 외팔보의 각속도가 증가함에 따라 고유진동수는 증가하는 것을 알 수 있는데 이러한 현상은 일반적으로 잘 알려진 사실이다. 또한 $\delta=0$일 때 첫 번째 set의 고유진동수들이 무차원 회전각속도와 일치하는 임계 각속도의 위치를 보여주고 있으며 이는 공진현상을 야기시키는 중요한 사항이다. Table 3은 연성강성에 따른 임계각속도의 변화로서 3.878에서 5.247의 각속도 구간에서 존재하는 걸 알 수 있었다. 또한 $\delta=1$ 이상일 경우 이러한 임계 각속도가 존재 하지 않았으며 이로부터 어느 값 이상의 δ에선 임계 각속도가 존재하지 않음을 추론할 수 있었다.

Table 1 Comparison of the natural frequencies ($\alpha=0.1$, $\beta=10$, $\gamma=0$)

No.		Natural frequencies	
		Present	Ref. (9)
First set	1st.	3.517	3.517
	2nd.	3.519	3.519
	3rd.	3.521	3.521
Second set	4th.	22.039	22.039
	5th.	22.05	22.05
	6th.	22.061	22.061
Third set	7th.	61.707	61.707
	8th.	61.731	61.731
	9th.	61.755	61.755

Table 2 Opened system vs. closed system

No.	Natural frequencies		
	Opened ($\beta=10$)	Closed	
		($\beta=10$)	($\beta=10^5$)
First set (1st)	3.516	3.516	4.117
Second set (7th)	22.035	22.036	25.866
Third set (13th)	61.697	61.701	72.748
Fourth set (19th)	120.902	120.907	144.061
Fifth set (25th)	199.86	199.865	267.521

Table 3 Critical angular speed versus the increase of coupling stiffness

Coupling stiffness, β	Critical angular speed	
	Lower	Upper
1	3.878	3.879
10^2	3.878	3.96
10^5	3.878	5.236
2×10^5	3.878	5.247

Table 4 Hub radius versus the increase of coupling Stiffness

Coupling stiffness, β	Hub radius ratio	
	Lower	Upper
1	0.6061	0.6261
10^2	0.4505	0.6261
10^5	0.4377	0.6261
2×10^5	0.4377	0.6261

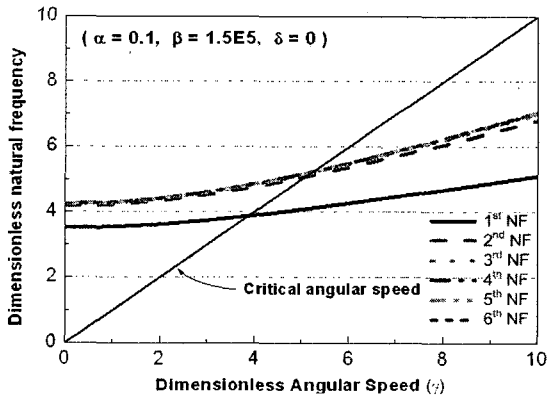
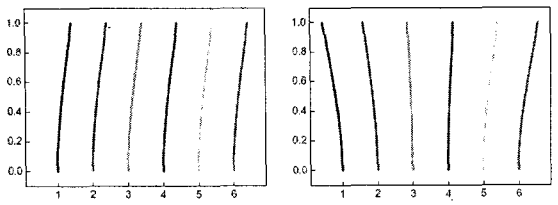


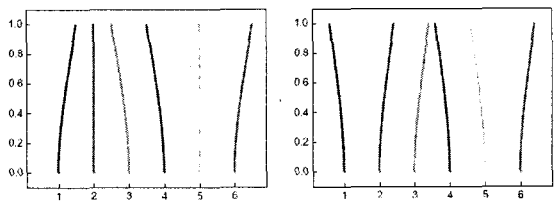
Fig. 3 First set of natural frequency variation vs. angular speed

Table 5 Natural frequencies versus the increase of coupling stiffness ($\alpha=0.1$, $\delta=1$, $\gamma=3$)

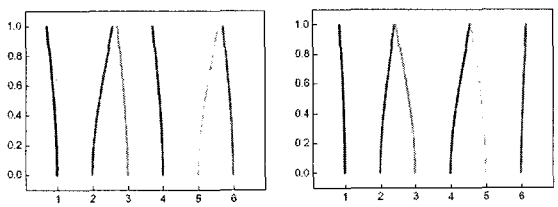
Coupling stiffness, β	Natural frequencies	
	Lower	Upper
1	5.291	5.291
10^2	5.291	5.342
10^5	5.291	6.061
2×10^5	5.291	6.066
10^6	5.291	6.071



(a) 1st mode shape (b) 2nd mode shape

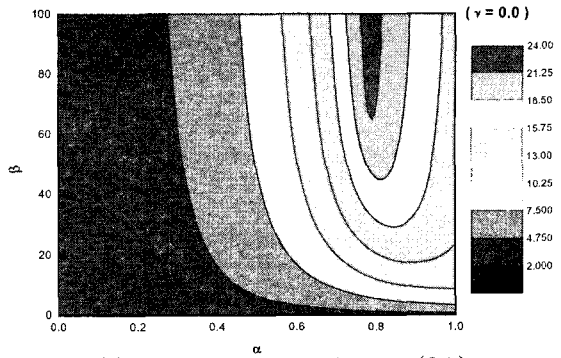


(c) 3rd mode shape (d) 4th mode shape

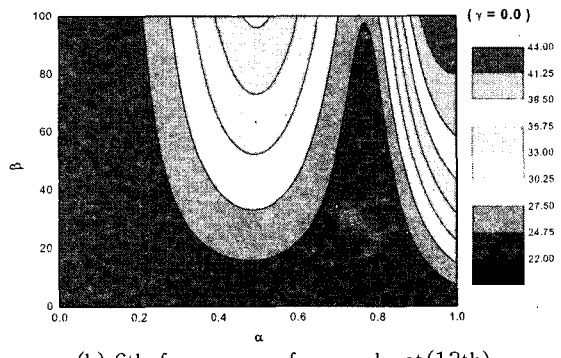


(e) 5th mode shape (f) 6th mode shape

Fig. 4 First set of mode shapes



(a) 6th frequency of first set(6th)



(b) 6th frequency of second set(13th)

Fig. 5 Frequency variations versus the coupling stiffness and position

Table 4는 β의 증가에 따라 임계 축 반경비의 구간을 알 수 있었으며 큰 연성값을 가질 경우 임계 축 반경비의 구간이 0.438과 0.626값으로 수렴하는걸 알 수 있었다. 따라서 δ가 0.438이상에선 임계 축 반경비가 존재하지 않음을 알 수 있었다. Table 5에선 β값이 증가함에 따라 첫 번째 set의 가장 낮은 고유진동수는 변화가 없었으며 가장 높은 고유진동수가 약 6.07 Hz의 값을 가진다는 걸 알 수 있었다.

Fig. 5는 $\gamma = 0$일 때 연성강성 β와 연성강성의 위치 α의 변화에따른 고유진동수 변화로서 첫 번째와 두 번째 set의 가장 높은 진동수인 6, 13번째 고유진동수의 결과이다. 각 set들의 가장 낮은 진동수의 경우 β와 α에 대해 변화가 없었으며 가장 높은 진동수를 알아봄으로써 이 시스템의 고유진동수 범위를 예측할 수 있겠다.

5. 결 론

이 논문에서는 연성효과를 고려한 회전하는 다중 블레이드의 진동특성을 예측하기 위해 진동방정식을 유도하였으며 이를 토대로 6개 블레이드로 구성된 패킷 시스템의 모델링 방법을 제시하였다. 이를 이용하여 해석 결과를 도출한 뒤 기존의 수치해석 결과와 비교함으로써 이 논문에서 제시된 방법의 신뢰성과 정확성을 제한적으로 검증할 수 있었다. 또한 회전시 블레이드 간의 연성효과로 인해 정지시보다 고유 진동수가 증가하는 것을 확인하였다. 그리고 연성강성의 크기와 위치에 따른 고유진동수의 변화 경향을 살펴보았다. 이 같은 현상은 연성강성, 회전 각속도 및 축 반경이 바뀜에 따라 시스템 전체의 강성이 달라지고 결과적으로 고유진동 특성 변화로 연계되기 때문에 발생한다. 더불어 임계 각속도와 임계 축 반경비의 존재를 확인하였으며 연성강성이 커짐에 따라 임계 각속도는 증가하며 임계 축 반경비는 감소하는 것을 알 수 있었다. 이 논문에서 제시된 방법은 디스크 혹은 측판의 강성 효과를 고려한 블레이드 구조설계 시 유용하게 사용될 수 있으며 관련 연구 분야에 쉽게 이해되고 응용될 수 있으리라 판단된다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades", British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766.

(2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam", J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, 25, pp. 28~30.

(3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams", J. Sound and Vibration, Vol. 56, pp. 175~185.

(4) Yoo, H. H., 1991, "A Linear Dynamic Modeling Using Hybrid Deformation Variables for Rotating Structures", KSAS, Vol. 19, No. 3, pp. 32~39.

(5) Yoo, H. H., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Enginering, Vol. 8, No. 5, pp. 765~774.

(6) Singh, M. and Schiffer, D., 1982, "Vibrational Characteristics of Packeted Bladed Discs", ASME Paper No. 82-DET-137.

(7) Dello, J., 1987, "Frequency Evaluation of a Steam Turbine Bladed Disk", Turbomachinery International Magazine, Jan., Fab.

(8) Cornwell, P. J. and Bendiksen, O. O., 1989, "Localization of Vibrations in Large Space Reflectors", AIAA Journal, Vol. 27, No. 2, pp. 219~226.

(9) Pierre, C. and Cha, P. D., 1989, "Strong Mode Localization in Nearly Periodic Disordered Structures", AIAA Journal, Vol. 27, No. 2, pp. 227~241.

(10) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics : Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y.