

# 계층적 MPSK 신호에 대한 일반화된 BER 성능

정회원 이재윤\*, 윤동원\*, 현광민\*\*, 박상규\*

## Performance of Generalized BER for Hierarchical MPSK Signal

Jaeyoon Lee\*, Dongweon Yoon\*, Kwangmin Hyun\*\*, Sang Kyu Park\* *Regular Members*

### 요 약

본 논문에서는 수신기에서 I/Q 위상 및 진폭 불균형을 갖는 계층적 MPSK(Hierarchical M-ary Phase Shift Keying) 신호에 대해 수치 적분이 필요 없는 정확하고 일반화된 closed-form 형태의 비트 오류 확률(Bit Error Probability) 표현을 유도한다. 새롭게 유도된 비트 오류 확률 표현은 간결한 형태의 일반화된 식으로 되어 있어 다양한 환경으로의 적용이 용이하다. 뿐만 아니라, 계층적 MPSK를 적용하는 많은 디지털 통신 시스템에서 복조 시 발생할 수 있는 I/Q 불균형들에 의한 시스템 성능 변화에 대하여 정확한 이론적 성능 기준을 제공할 것으로 기대된다.

**Key Word :** Hierarchical MPSK, I/Q Phase Unbalance, I/Q Amplitude Unbalance, BER

### ABSTRACT

In this paper, we present an exact and general expression involving two-dimensional Gaussian Q-functions for the bit error rate (BER) of hierarchical MPSK with I/Q phase and amplitude imbalances over an additive white Gaussian noise (AWGN) channel. First we derive a BER expression for the k-th bit of hierarchical 4, 8, 16-PSK signal constellations when Gray code bit mapping is employed. Then, from the derived k-th bit BER expression, we present the exact and general average BER expression for hierarchical MPSK with I/Q phase and amplitude imbalances. This result can readily be applied to numerical evaluation for various cases of practical interest in an I/Q unbalanced hierarchical MPSK system, because the one- and two-dimensional Gaussian Q-functions can be easily and directly computed using commonly available mathematical software tools.

### I. 서론

계층적 변조(Hierarchical Modulation)는 데이터의 중요도에 따라 신뢰도를 다르게 하여 전송하는 방법으로<sup>[1]</sup>, 가장 중요한 정보는 모든 수신기에서 수신될 수 있도록 하고 덜 중요한 정보는 전파 환경이 더 좋거나 더 좋은 RF 수신 장비를 가진 수신기에서 수신될 수 있도록 하기위해 고안된 방법이다<sup>[2]</sup>. 이러한 계층적 변조는 현재 유럽 전기통신 표준 협회(ETSI)에서 유럽 지상파 디지털 방송

(DVB-T) 및 유럽 디지털 위성 방송(DVB-S)에서 표준으로 채택하여 사용되고 있으며<sup>[3-6]</sup>, 이에 따라 계층적 변조 방식 중 PSK(Phase Shift Keying) 계열과 QAM(Quadrature Amplitude Modulation) 계열의 계층적 변조방식, 즉 계층적 MPSK(Hierarchical MPSK : H-MPSK)와 계층적 MQAM (Hierarchical MQAM : H-MQAM)에 대한 정확한 비트 오류율(Bit Error Rate : BER)에 대한 연구가 많이 진행되어 왔다.

디지털 통신 시스템의 수신 성능은 기본적으로

\* 한양대학교 전자통신컴퓨터공학부 (dwyoony@hanyang.ac.kr),

\*\* 원주대학교 정보통신과 (kamihyun@korea.com)

논문번호 : KICS2006-04-184, 접수일자 : 2006년 4월 22일, 최종논문접수일자 : 2006년 9월 8일

AWGN(Additive White Gaussian Noise)에 의하여 저하된다. 그러나 실제 시스템에서는 부정확한 위상 천이기로 인한, 즉, 정확히 90도를 천이 시키지 못하여 발생하는 I/Q 위상 불균형과 I와 Q축에서의 서로 다른 필터 손실로 인한 진폭 불균형, 그리고 수신된 반송파와 반송파 추적 루프에 의하여 발생한 반송파 간의 차이, 즉 위상 오류 등의 다양한 요소로 인하여 성능 저하가 발생한다. 최근 Alouini가 계층적 MPSK의 정확한 비트 오류 확률을 파울라 함수(Fawula function)<sup>[7]</sup>을 이용한 순환(recursive) 알고리즘으로 유도하여 나타내었다<sup>[2]</sup>. 그러나 Alouini의 정확한 비트 오류 확률 표현식은 I/Q 위상 및 진폭 불균형 요소 등을 고려하지 않은 이상적인 수신기에 대하여 수식을 유도한 것이기 때문에 실제 수신기 구현 시 나타날 수 있는 요소들로 인한 비트 오류 확률의 성능 변화를 알 수 없다. 뿐만 아니라, 수치적분을 필요로 하기 때문에 closed-form이라 할 수 없다.

최근 들어 두 축 간의 상관관계를 직접 정량적으로 해석하여 한 신호 점에서의 오류 확률 분석을 2차원 결합 가우시안 Q-함수(2-dimensional joint Gaussian Q-function)의 표현으로 간편히 할 수 있는 방법<sup>[8]</sup>이 도출되었고, 또한 이 방법을 이용하여 I/Q 불균형을 고려한 uniform MPSK의 정확하고 일반화된 BER 표현이 유도되었다<sup>[9]</sup>. 따라서 본 논문에서는 [8]에서 유도된 2차원 결합 가우시안 Q-함수와 [9]에서 사용한 각 비트에 대하여 요구되는 위상 값들의 규칙적인 패턴을 찾아내어 이를 일반화함으로써 정확하고 일반화된 BER 표현을 얻는 방법을 사용하여, I/Q 위상 및 진폭 불균형 등의 비이상적인 수신 시스템으로 인해 발생하는 불균형 성분을 갖는 H-MPSK 시스템에 대하여 수치적분이 필요 없는 일반화된 새로운 비트 오류 확률 식을 유도한다. 또한 유도한 식의 결과를 분석하여 본 논문에서 고려한 성능 저하 요인이 디지털 통신 시스템의 비트 오류 성능에 미치는 영향에 대하여 알아본다.

## II. 시스템 모델

### 2.1 H-MPSK 변조 방식

H-MPSK에서는 먼저 우선 순위가 높은 HP(High Priority) 비트를 MSB(Most Significant Bit)에 할당한다. 이는 +1 과 -1에 신호점 배치를 이루게 되어 BPSK 구조를 갖는다. 그 다음 낮은 순위의 비트들은 차례로 다음 비트 위치들에 할당된다.

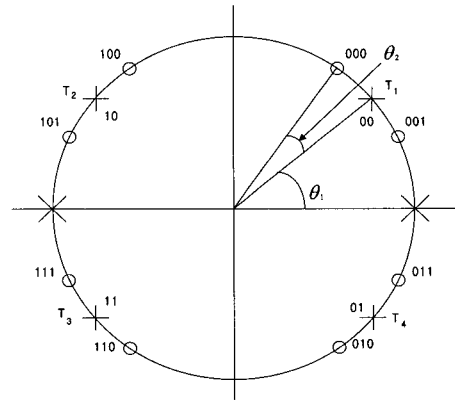


그림 1. H-8PSK 신호점 배치도

즉, 두 번째 우선순위를 갖는 비트는 두 번째 비트에 할당되고(QPSK 신호 배치를 이룬다), 세 번째 우선순위를 갖는 비트는 그 다음 비트에 할당된다. 마지막의 우선순위가 가장 낮은 비트는 LSB(Last Significant Bit)에 배치된다. 따라서 이렇게 배치된 신호점들은 H-MPSK 구조로 2/4/8/16.../MPSK의 신호 배치를 이루게 된다<sup>[2]</sup>.

그림 1에는 H-8PSK의 신호점 배치도를 나타내었다. 최우선 순위의 HP비트는 원점을 기준으로 좌, 우 평면의 위치를 결정하게 되며(그림 1에서 x), 두 번째 순위의 비트는 이 BPSK 배치위에 QPSK 신호 배치를 이루게 하고(그림 1에서 +), 마지막 가장 낮은 순위의 LP 비트는 QPSK 신호 배치를 중심으로 다시 8-ary PSK 신호 배치를 이루게 되어, 최종적으로 그림 1과 같은 성상도를 가지게 된다. 여기서  $\theta_1$ 과  $\theta_2$ 는 신호의 중요도에 따라 변화 될 수 있다. 그림 1에서 보듯이  $\theta$ 는 계층 구조를 이루고 있다. 그림 1에서 x는 첫 번째 계층으로 가상의 BPSK 신호 배치를 이룬다.  $2\theta_1$ 는 제 2 계층으로 BPSK 신호점을 중심으로 가상의 QPSK 신호점간의 위상각을 나타내며,  $2\theta_2$ 는 세 번째 마지막 계층으로 8-PSK에서 실제로 전송되는 신호점간의 위상각을 나타낸다<sup>[2]</sup>. 여기서 각 신호점들은 그레이(Gray) 부호화되었다고 가정하였다.

### 2.2 두 위상 각 사이의 한 영역에 대한 한 신호 점의 오류 확률 표현

본 논문에서는 그림 2에서와 같이 I/Q 축간 불완전한 위상 직교와 I축, Q축의 서로 다른 필터 이득 값 등의 불균형한 수신기 성분으로 인하여 수신 신호가 변화된 H-MPSK에 대한 비트 오류 확률

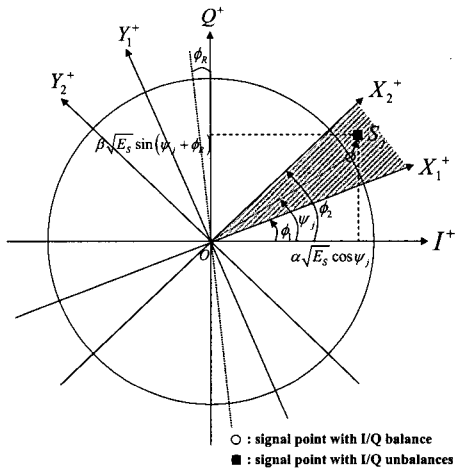


그림 2. I-Q 위상 불균형과 I-Q 진폭 불균형 존재 시 계층적 PSK의 한 신호점에 대한 두 위상각 사이의 영역

표현을 유도하기 위하여 최근 도출된 두 축 간의 상관관계를 직접 정량적으로 해석하여 한 신호점에서의 오류 확률 분석을 2차원 결합 가우시안 Q-함수(2-dimensional joint Gaussian Q-function)의 표현으로 나타낸 다음 식을 사용한다<sup>[8]</sup>.

$$\begin{aligned}
 P_{r-j}\{\phi_1 \leq \Omega \leq \phi_2\} &= P_{r-j}\{\angle X_1^+ O X_2^+\} \\
 &= P_{r-j}\{Y_1 \geq 0, Y_2 \leq 0\} \\
 &= Q\left(-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{\text{Var}[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{\text{Var}[Y_2]}}; -\rho_{Y_1 Y_2}\right)
 \end{aligned} \quad (1)$$

이때 각각의 필요한 통계치들은 다음과 같이 주어진다.

$$\left\{ \begin{aligned}
 E[Y_i] &= \sqrt{E_s} (\beta \cos \phi_i \sin(\psi_j + \phi_R) - \alpha \sin \phi_i \cos \psi_j), i = 1, 2 \\
 \text{Var}[Y_i] &= \sigma^2 (\alpha^2 \sin^2(\phi_i) + \beta^2 \cos^2(\phi_i) - \alpha \beta \sin \phi_i \sin(2\phi_i)), i = 1, 2 \\
 \rho_{Y_1 Y_2} &= \frac{\text{COV}[Y_1 Y_2]}{\sqrt{\text{Var}_{Y_1 Y_2}}} \\
 &= \frac{\sigma^2 (\alpha^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \beta^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2)}{\sqrt{\text{Var}_{Y_1 Y_2}}} \\
 &\quad - \frac{\sigma^2 \alpha \beta \sin \phi_R \sin(\phi_1 + \phi_2)}{\sqrt{\text{Var}_{Y_1 Y_2}}}
 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

여기서,  $\text{Var}_{Y_1 Y_2} = \text{Var}[Y_1] \text{Var}[Y_2]$  이고,  $Y_i (i=1, 2)$ 는 결정 영역 경계를 나타내는  $X_i (i=1, 2)$  축과 수직이 되는 축이며,  $E_s$ 는 심볼

에너지,  $\psi_j (j=0, 1, 2, \dots, M-1)$ 는 전송된 신호의 위상이다. 이때  $\alpha$ 는 I축 필터로 인한 이득이고,  $\beta$ 는 Q축 필터로 인한 이득이며, 이득 비(Gain Ratio :  $r$ )와 이득 불균형(Gain Unbalance :  $\epsilon$ ) 다음과 같다<sup>[10]</sup>.

$$r = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \epsilon = r - 1 \quad (3)$$

또한,  $\phi_R$ 은 I축과 Q축 사이의 위상 불균형의 정도를 나타내는 위상각이고,  $\rho_{IQ} = \sin \phi$ 는 I축과 Q축 간 상관계수를 나타낸다<sup>[11]</sup>.

위 식 (2)에서 알 수 있듯이 H-MPSK의 한 신호점에 대하여 한 결정 영역에 들어갈 확률을 구하기 위해서는 위에서 정의된 파라미터들( $\alpha, \beta, \sqrt{E_s}, \phi_R$ ) 외에 그 신호점의 위상각( $\psi_j$ )과 결정 영역 경계를 나타내는 두  $X_i (i=1, 2)$ 축에 대한 I축으로부터의 위상각인 항상 쌍을 이루는  $\phi_1, \phi_2$ 를 알아야 한다. 이러한 위상각들은 신호점마다 그리고 각 결정영역마다 다르다. 따라서 본 논문에서는 이러한 위상각들을 모든 신호점에서 구한 후 일반화시켜 일반화된 H-MPSK의 비트 오류 확률 식을 유도한다.

### III. H-MPSK의 정확한 BER 계산

본 논문에서는 일반화된 정확한 BER 계산식을 유도하기 위하여 먼저 H-4PSK와 H-8PSK, 그리고 H-16PSK에 대한 각 비트별 오류 성능 계산 방법을 살펴본 후, 일반화된 식으로 유도한다.

#### 3.1 H-4PSK

그림 2에는  $\theta = [\theta_1]$ 를 갖는 I/Q 위상 및 진폭 불균형이 존재할 경우의 H-4PSK의 신호점 성상도를 나타내었다. 그림 2에서 볼 수 있듯이 I/Q 위상 및 진폭 불균형이 존재하면 신호점 성상도가 변하여, 신호점간 거리가 신호점마다 다르게 변하기 때문에, 각 비트별 성능은 서로 다르게 변화한다. 위 시스템 모델에서 살펴보았듯이 각 비트별로 오류 확률을 구하기 위해서는 각 해당 신호점의 위상각( $\psi_j$ )과 그 신호점에 대한 결정영역 경계의 두 위상각의 쌍( $\phi_1, \phi_2$ )을 알아야 한다. 먼저, 모든 신호점의 위상각은 각 비트에 따라서 달라지는 것이 아니므로 다음과 같이 위상 벡터( $\Psi_{H-4PSK}$ )로 표현할 수 있다.

$$\Psi_{H-4PSK} = [\psi_0 \psi_1 \dots \psi_{M-1}] \quad (4)$$

$$= [\theta_1 \pi - \theta_1 \pi + \theta_1 2\pi - \theta_1]$$

또한, 결정영역 경계의 두 위상각은 각 신호점의 비트마다 다르기 때문에 다음과 같이 구해야 한다. 본문에서는 가장 왼쪽 비트를 첫 번째 비트, 즉, MSB로 한다.

3.1.1 첫 번째 비트(k=1)

첫 번째 비트에 따른 결정영역 경계에 대한 두 위상각은 결정 영역이 직교 축이기 때문에 모든 신호점(s<sub>j</sub>, j=0, 1, 2, 3)에 대하여 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\begin{cases} \phi_1 = (\pi/2), \text{ for } j = 0, 3 \\ \phi_2 = (3\pi/2), \text{ for } j = 0, 3 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \phi_1 = (3\pi/2), \text{ for } j = 1, 2 \\ \phi_2 = (5\pi/2), \text{ for } j = 1, 2 \end{cases}$$

3.1.2 두 번째 비트(k=2)

두 번째 비트에 따른 결정영역 경계에 대한 두 위상각은 결정 영역이 동상 축이기 때문에 모든 신호점(s<sub>j</sub>, j=0, 1, 2, 3)에 대하여 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\begin{cases} \phi_1 = (\pi), \text{ for } j = 0, 1 \\ \phi_2 = (2\pi), \text{ for } j = 0, 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \phi_1 = (0), \text{ for } j = 2, 3 \\ \phi_2 = (\pi), \text{ for } j = 2, 3 \end{cases}$$

따라서 각 신호점에서의 비트별 오류 확률표현은 식 (5)와 (6)의 위상각을 식 (2)에 각각 대입하면 식 (1)로부터 2차원 가우시안 Q-함수 표현으로 얻을 수 있다.

3.2 H-8PSK

그림 3에는  $\theta = [\theta_1 \theta_2]$ 를 갖는 I/Q 위상 및 진폭 불균형이 존재할 경우의 H-8PSK의 신호점 성상도를 나타내었다. H-4PSK에서 확인하였듯이 I/Q 위상 및 진폭 불균형이 존재하면 신호점 성상도가 변하여 각 비트별 성능이 서로 다르게 변화한다.

H-8PSK의 각 비트별 오류 확률은 H-4PSK에서와 같은 방법으로 구할 수 있으며, 오류 확률을 구하는데 있어 필요한 H-8PSK의 위상벡터 ( $\Psi_{H-8PSK}$ )는

$$\Psi_{H-8PSK} = [\psi_0 \psi_1 \dots \psi_{M-1}] \quad (7)$$

$$= [\theta_1 - \theta_2 \theta_1 + \theta_2 \pi - \theta_1 - \theta_2 \pi - \theta_1 + \theta_2 \pi + \theta_1 - \theta_2 \pi + \theta_1 + \theta_2 2\pi - \theta_1 - \theta_2 2\pi - \theta_1 + \theta_2]$$

이고, 각 신호점에서의 비트별 결정영역 경계에 대한 두 위상각의 쌍( $\phi_1, \phi_2$ )은 다음과 같다.

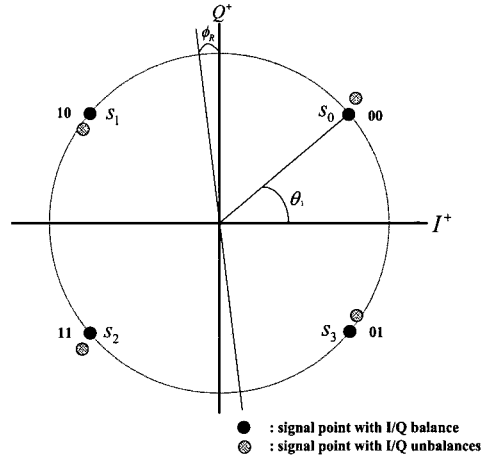


그림 3. H-4PSK의 신호점 성상도

3.2.1 첫 번째 비트(k=1)

첫 번째 비트에 따른 결정영역 경계에 대한 두 위상각은 H-4PSK에서와 같이 결정 영역이 직교 축이기 때문에 모든 신호점(s<sub>j</sub>, j=0, 1, ..., 7)에 대하여 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\begin{cases} \phi_1 = (\pi/2), \text{ for } j = 0, 1, 6, 7 \\ \phi_2 = (3\pi/2), \text{ for } j = 0, 1, 6, 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1 = (3\pi/2), \text{ for } j = 2, 3, 4, 5 \\ \phi_2 = (5\pi/2), \text{ for } j = 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad (8)$$

3.2.2 두 번째 비트(k=2)

두 번째 비트에 따른 결정영역 경계에 대한 두 위상각도 H-4PSK에서와 같이 결정 영역이 동상 축이기 때문에 모든 신호점(s<sub>j</sub>, j=0, 1, ..., 7)에 대하여 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\begin{cases} \phi_1 = (\pi), \text{ for } j = 0, 1, 2, 3 \\ \phi_2 = (2\pi), \text{ for } j = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \text{ for } j = 4, 5, 6, 7 \quad (9)$$

3.2.3 세 번째 비트(k=3)

세 번째 비트에 따른 결정영역 경계에 대한 두 위상각은 한 신호점의 세 번째 비트에 대하여 두 개의 오류결정영역이 존재하기 때문에 구하고자 하는 위상각의 쌍(φ<sub>1</sub>, φ<sub>2</sub>)도 두 개가 존재한다. 따라서 그 위상각을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \pi - \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi + \theta_1 \\ 2\pi - \theta_1 \end{pmatrix}, \text{ for } j = 0, 3, 4, 7$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi - \theta_1 \\ \pi + \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\pi - \theta_1 \\ 2\pi + \theta_1 \end{pmatrix}, \text{ for } j = 1, 2, 5, 6 \quad (10)$$

여기서 식 (10)에서 모든 신호점에 대한 결정경계 위상각 쌍(φ<sub>1</sub>, φ<sub>2</sub>)의 수는 각 비트 오류 확률 식을 2차원 가우시안 Q-함수로 표현하는데 있어 필요한 Q-함수의 개수를 나타낸다. 따라서 세 번째 비트의 오류 확률은 모든 신호점마다 두 개(l=2)의 2차원 가우시안 Q-함수로 나타낼 수 있다. 여기서 l은 [10]에서와 같이 2차원 가우시안 Q-함수의 수를 나타낸다.

결론적으로, H-8PSK 각 신호점에서의 비트별 오류 확률표현은 식 (8),(9),(10)의 위상각을 식 (1), (2)에 각각 대입하면 2차원 가우시안 Q-함수 표현으로 얻을 수 있다.

3.3 H-16PSK

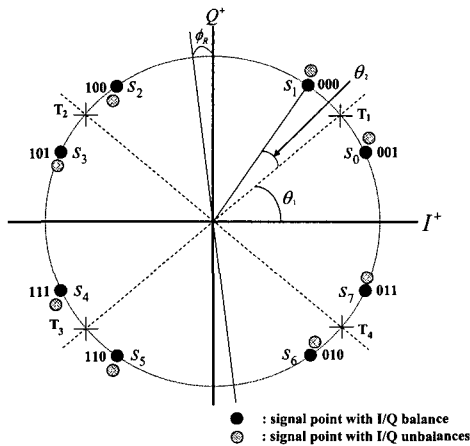


그림 4. 계층적 8-PSK의 신호점 성상도

그림 4에는 θ = [θ<sub>1</sub> θ<sub>2</sub> θ<sub>3</sub>]를 갖는 I/Q 위상 및 진폭 불균형이 존재할 경우의 H-16PSK의 신호점 성상도를 나타내었다. 앞서서와 마찬가지로 I/Q 위상 및 진폭 불균형이 존재하면 신호점 성상도가 변하여 각 비트별 성능이 서로 다르게 변화함을 알 수 있다.

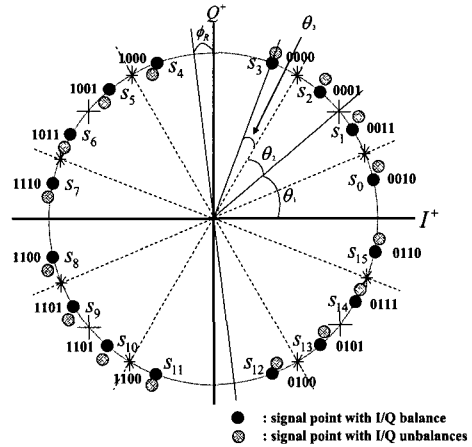


그림 5. H-16PSK의 신호점 성상도

H-16PSK의 각 비트별 오류 확률을 구하기 위해 필요한 위상벡터(Ψ<sub>H-16PSK</sub>)는

$$\begin{aligned} \Psi_{H-16PSK} &= [\psi_0 \psi_1 \dots \psi_{M-1}] \\ &= [\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 \quad \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 \quad \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ &\quad \pi - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 \quad \pi - \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 \quad \pi - \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 \quad \pi - \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ &\quad \pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad \pi + \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 \quad \pi + \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 \quad \pi + \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 \\ &\quad \pi + \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 \quad \pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad 2\pi - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 \quad 2\pi - \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 \\ &\quad 2\pi - \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 \quad 2\pi - \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 \quad 2\pi - \theta_1 + \theta_2 + \theta_3] \end{aligned} \quad (11)$$

이고, 각 신호점에서의 비트별 결정영역 경계에 대한 두 위상각(φ<sub>1</sub>, φ<sub>2</sub>)은 H-4PSK와 H-8PSK에서와 같이 구할 수 있고, 그 결과는 다음과 같다.

3.3.1 첫 번째 비트(k=1)

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{pmatrix}, \text{ for } j = 0, 1, 2, 3, 12, 13, 14, 15$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\pi/2 \\ 5\pi/2 \end{pmatrix}, \text{ for } j = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \quad (12)$$

3.3.2 두 번째 비트( $k=2$ )

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}, \text{ for } j=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \text{ for } j=8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \quad (13)$$

3.3.3 세 번째 비트( $k=3$ )

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \pi - \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi + \theta_1 \\ 2\pi - \theta_1 \end{pmatrix}, \text{ for } j=0, 1, 6, 7, 8, 9, 14, 15$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi - \theta_1 \\ \pi + \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\pi - \theta_1 \\ 2\pi + \theta_1 \end{pmatrix}, \text{ for } j=2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13 \quad (14)$$

3.3.4 세 번째 비트( $k=4$ )

네 번째 비트에 따른 결정영역 경계에 대한 두 위상각은 한 신호점의 네 번째 비트에 대하여 네 개의 오류결정영역이 존재하기 때문에 구하고자 하는 위상각 쌍( $\phi_1, \phi_2$ )도 네 개( $l=4$ )가 존재한다. 따라서 그 위상각을 구하면 다음과 같고,

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi - \theta_1 - \theta_2 \\ \pi - \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi + \theta_1 - \theta_2 \\ \pi + \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\pi - \theta_1 - \theta_2 \\ 2\pi - \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}, \text{ for } j=0, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 + \theta_2 \\ \pi - \theta_1 - \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi - \theta_1 + \theta_2 \\ \pi + \theta_1 - \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi + \theta_1 + \theta_2 \\ 2\pi - \theta_1 - \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\pi - \theta_1 + \theta_2 \\ 2\pi + \theta_1 - \theta_2 \end{pmatrix}, \text{ for } j=1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14 \quad (15)$$

네 번째 비트의 오류 확률은 모든 신호점마다 네 개의 2차원 가우시안 Q-함수로 나타낼 수 있다.

결론적으로, H-16PSK 각 신호점에서의 비트별 오류 확률 표현은 식 (13), (14), (15)의 위상각을 식 (1), (2)에 대입하여 2차원 가우시안 Q-함수 표현으로 얻을 수 있다.

3.4 일반화된 H-MPSK의 BER 표현

위에서 살펴본 계층적 4, 8, 16PSK의 각 비트에 대한 오류 확률 표현을 M과 k에 대하여 일반화시키기 위해서는 가장 중요한 파라미터들인 모든 신호점에 대한 위상각( $\psi_j, j=0, 1, \dots, M-1$ )과 결정영역 경계의 두 위상각 쌍( $\phi_1, \phi_2$ )을 구하는 식의 일반화가 이루어져야 한다. 먼저  $\psi_j$ 와  $\phi_1, \phi_2$ 를 구하는 식을 얻기 위해 위의 결과들을 종합하여 어떤

파라미터 값들에 대해 한 위상각을 발생시키는 함수( $G_{-phase}$ )를 다음과 같이 정의 한다.

$$G_{-phase}(x, y, \theta) = \pi \left( \left\lfloor \frac{4y}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2y}{x} \right\rfloor \right) + \sum_{i=1}^{\log_2 x - 1} \theta_i \cdot (-1)^{\left\lfloor \frac{4y}{2^{\log_2 x + 1 - i}} \right\rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{1}{i} \right\rfloor} \quad (16)$$

따라서 위 식 (16)을 이용하면, 우리가 원하는 계층적 2/4/.../M-PSK에서의 모든 신호점에 대한 위상각은 M, j,  $\theta$  등의 파라미터에 따라 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\psi_j = G_{-phase}(M, j, \theta) \quad (17)$$

또한 결정영역 경계에 대한 위상각 쌍을 일반화시키기 위하여 위 식 (5)-(6), (8)-(10), (12)-(15)를 살펴보면 다음과 같이 k에 따라 일반화시킬 수 있다.

3.4.1  $k=1$  일 때

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2C)\pi/2 \\ (3+2C)\pi/2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

3.4.2  $k=2$  일 때

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+C)\pi \\ (2+C)\pi \end{pmatrix} \quad (19)$$

3.4.3  $k \geq 3$  일 때

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{-phase}(2^{k-1}, 2n+C, \theta) \\ G_{-phase}(2^{k-1}, 2n+C+1, \theta) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$n=0, 1, 2, \dots, M-1$$

여기서  $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{\log_2 M - 1}]$  이고, l은 2차원 가우시안 Q-함수의 수를 나타낸다. 또한, C 값은 j번째 심볼에서 해당 비트 값(0 혹은 1)을 나타내는 것으로,  $j=0, 1, 2, \dots, M-1$ 에 따라 다음 식에서 구할 수 있다.

$$C = \begin{cases} \nu, & k \neq 3 \\ \bar{\nu}, & k = 3 \end{cases}, \quad \nu = \text{mod} \left( \left\lfloor \frac{\text{mod}(M-1-j+2^{\log_2 M - 2}, M)}{2^{N-k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, 2 \right) \quad (21)$$

여기서,  $\bar{\nu}$ 는  $\nu$ 의 보수이며,  $\text{mod}(A, B)$  값은 A를 B로 나눈 나머지를 갖는다.

### 3.5 H-MPSK의 평균 BER 표현

H-MPSK에 대한 일반화된 평균 BER 표현은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$P(e) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\log_2 M} P_b(k) \quad (22)$$

여기서  $P_b(k)$ 는

$$P_b(k) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{l-1} Q \left( \frac{E[Y_1]}{\sqrt{\text{Var}[Y_1]}}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{\text{Var}[Y_2]}}; -\rho_{Y_1 Y_2} \right) \quad (23)$$

이고,  $E[\cdot]$ 와  $\text{Var}[\cdot]$ 을 구하는데 필요한 두 파라미터, 모든 신호점에 대한 위상각 ( $\psi_j, j=0, 1, \dots, M-1$ )과 결정 영역 경계에 대한 위상각 쌍( $\phi_1, \phi_2$ )은 식 (17)-(20)과 같다. 또한 각 비트의 오류 확률을 표현하는데 필요한 2차원 가우시안 Q-함수의 개수를 나타내는  $l$ 은 비트 순서 값  $k$ 에 대하여  $2^{k-2+\lfloor \frac{1}{k} \rfloor}$  값을 갖는다[9]. 따라서 첫 번째  $\sum$ 는 모든 신호점에 대한 합을, 두 번째  $\sum$ 는 한 신호점에서의 2차원 가우시안 Q-함수들의 합을 나타낸다.

## IV. 수치적 결과 및 분석

본 논문에서는 세 가지 관점에서 결과 식에 대한 비교, 분석을 수행한다. 첫 번째는 기존 논문과의 결과 비교 관점이고, 두 번째는 수신기에서 I/Q 불균형을 고려한 경우와 그렇지 않은 경우에 대한 H-MPSK의 성능 비교 관점이다. 마지막으로 세 번째는 위상 불균형과 진폭 불균형에 대한 독립적인 결과 비교 관점이다.

먼저 그림 6에는 첫 번째 관점인 수신기의 비이상성을 고려하지 않았을 경우의 본 논문 최종 식인 식(22), (23)을 이용한 결과와 기존의 결과[2]를 비교하여 나타내었으며, 그림을 통하여 두 결과가 정확히 일치함을 알 수 있다.

그림 7은 두 번째 관점인 Uniform 16-PSK와 H-16PSK, 그리고 수신기에서 I/Q 불균형이 고려된 H-16PSK의 각 비트별 오류 확률 성능을 비교하여

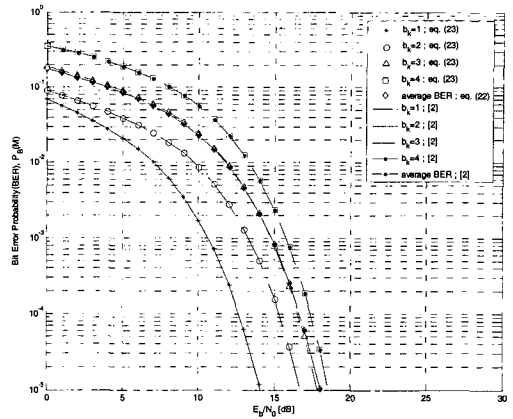


그림 6. 식 (22), (23)의 결과와 기존 논문 [2]의 결과와의 비교

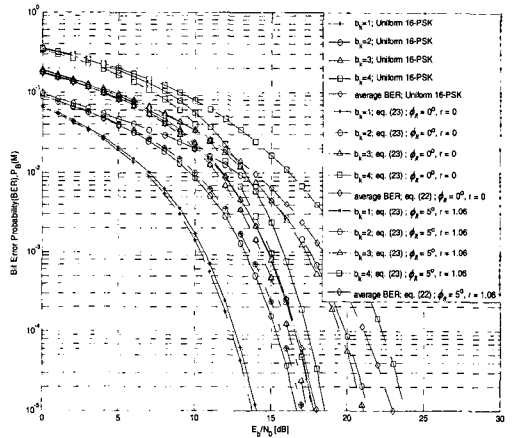


그림 7. Uniform 16-PSK와 H-16PSK, 그리고 I/Q 위상 및 진폭 불균형이 고려된 H-16PSK의 각 비트별 오류 확률 성능 비교

나타낸 것이다. H-16PSK는  $\theta = [\theta_1 \theta_2 \theta_3] = [\pi/4.2 \pi/8.6 \pi/17.6]$ 일 때의 결과이며, I/Q 불균형은  $\phi_R = 5^\circ$ ,  $r = \alpha/\beta = 1.06$ 을 고려하였다. 그림에서 계층적 변조로 인하여 H-16PSK의 성능이 첫 번째, 두 번째 비트에 대해서는 향상되고 그 외 비트와 평균오류확률 성능에서는 저하됨을 볼 수 있다. 또한 수신기가 완벽하지 못할 경우에는 첫 번째 비트만 성능이 향상되고, 평균비트오류확률 성능 관점에서 전체적으로 성능 저하가 발생함을 알 수 있다. 마지막 관점을 위하여 그림 8과 9에는 H-16PSK에서 I/Q 불균형을 갖는 수신기 고려 시 위상 불균형으로 인한 성능 변화와 진폭 불균형으로 인한 성능 변화를 나타내었다. 먼저 그림 8은  $\phi_R = 0^\circ, 3^\circ, 5^\circ$ 일 때 위상 불균형으로 인한

H-16PSK의 각 비트 별 성능 변화를 나타낸 것으로, 첫 번째 비트의 성능은 변화가 없고, 나머지 비트들의 성능과 평균비트오류확률 성능은 위상 불균형이 심해질수록 점점 성능이 저하함을 알 수 있다. 그림 9은  $r=1.0, 1.06, 1.2$ 로 하여 진폭 불균형이 존재할 경우 H-16PSK의 각 비트 별 성능 변화를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이  $r$  값이 점점 증가하면, 즉 진폭 불균형의 정도가 심해질수록 첫 번째 비트의 성능은 조금 향상되지만 나머지 비트들의 성능은 점점 저하되어감을 알 수 있다.

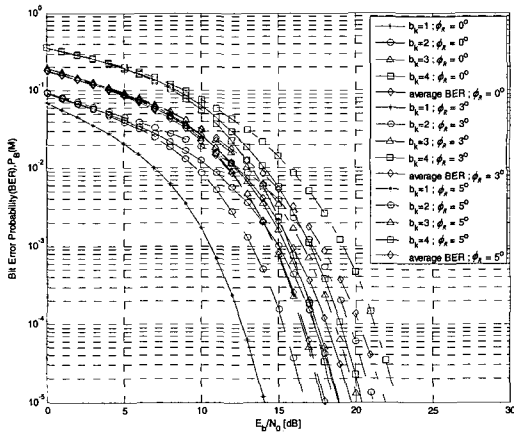


그림 8. 위상 불균형이 고려된 H-16PSK의 각 비트별 오류 확률 성능

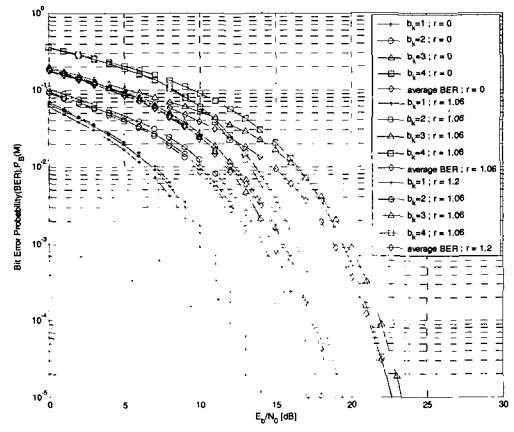


그림 9. 진폭 불균형이 고려된 H-16PSK의 각 비트별 오류 확률 성능

### V. 결론

최근에 결정 변수의 어느 특정 영역에 분포할 확률이 두 축 간의 상관관계를 정량적인 규명으로 인

하여 2차원 결합 가우시안 Q-함수 형태로 표현할 수 있는 방법이 제시되었고, 본 논문에서는 이러한 2차원 결합 가우시안 Q-함수를 이용하여 H-MPSK의 비트 오류 확률에 대한 수치적 적분 문제를 해결함과 동시에 I/Q 위상 및 진폭 불균형을 고려한 각 비트에 대한 오류 확률을 간단히 구할 수 있는 일반화된 closed-form 형태의 오류 확률 식을 유도하였다. I/Q 위상 및 진폭 불균형을 고려하지 않았을 경우, 유도한 식의 결과는 기존의 결과와 정확히 일치하였으며, I/Q 위상 및 진폭 불균형을 고려하였을 경우, 수신기 비이상적 성분인  $\phi_B, r$  값을 변화시켜가며 각 비트별 오류 성능을 비교한 결과, 첫 번째 비트를 제외한 모든 비트의 성능이 저하됨을 알 수 있었으며 비이상적 성분의 값이 커질수록 동일한 오류 성능을 만족하기 위하여 요구되는 신호 에너지가 점점 증가함을 알 수 있었다. 이러한 비트 오류 확률 식의 결과는 H-MPSK를 적용하는 많은 시스템으로의 적용이 용이할 뿐만 아니라, 성능 저하 요소를 고려한 시스템의 성능 분석 시 정확한 이론적 성능 기준을 제공할 것으로 기대된다.

### 참고 문헌

- [1] T. Cover, "Broadcast channels," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-18, pp. 2-14, Jan. 1972.
- [2] P. K. Vitthaladevuni and M. S. Alouini, "Exact BER Computation of Generalized Hierarchical PSK Constellations," IEEE Trans. Commun., vol. 51, no. 12, pp. 2030-2037, Dec. 2003.
- [3] European Standard 1997, "Digital Video Broadcasting; Framing structure, channel coding and modulation for terrestrial television," European Standard EN300 744 V1.1.2 (1997-08), ETSI, Aug. 1997.
- [4] "DVB-T standard: ETS 300 744, Digital Broadcasting Systems for Television, Sound and Data Services: Framing Structure, Channel Coding and Modulation for Digital Terrestrial Television," ETSI Draft, vol. 1.2.1, no. EN300 744, 1999-1.
- [5] "Digital Video Broadcasting; Second generation framing structure, channel coding and modulation systems for Broadcasting, Interactive Services, News Gathering and other broadband satellite applications," European Telecommunications Standards Institute EN 302 307 v1.1.1



[6] "Digital Video Broadcasting (DVB) User guidelines for the second generation system for Broadcasting, Interactive Services, News Gathering and other broadband satellite applications (DVB-S2)," European Telecommunications Standards Institute TR 102 376 v1.1.1

[7] R. F. Pawula, S. O. Rice and J.H. Roberts, "Distribution of the phase angle between two vectors perturbed by Gaussian noise," IEEE Trans. Commun., vol. 30, pp. 1828-1841, Aug. 1982.

[8] S. Park and D. Yoon, "An alternative expression for the symbol error probability of MPSK in the presence of I/Q unbalance," IEEE Trans. Commun., vol. 52, issue 12, pp. 2079-2081, Dec. 2004.

[9] 이재윤, 윤동원, 현광민, 박상규, "I/Q 위상 불균형을 고려한 Uniform MPSK의 일반화된 BER 성능 분석," 한국통신학회 논문지, vol. 31, No. 3, 2006. 3.

[10] James K. Caver and Maria W. Liao, "Adaptive Compensation for Imbalance and Offset Losses in Direct Conversion Transceivers," IEEE Trans. Veh. Technol., vol. 42, no. 4, pp. 581-588, Nov., 1993.

[11] M. K. Simon and D. Divsalar, "Some new twists to problems involving the Gaussian probability integral," IEEE Trans. Commun., vol. 46, pp. 200-210, Feb. 1998

[12] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series: U.S. Department of Commerce, 1982.

[13] Visual Numerics, Inc., IMSL C Numerical Library (CNL) User's Guides, version 5.5, retrieved from: <http://www.vni.com/products/imsl/docum entation /index.html>, 2003.

이재윤 (Jaeyoon Lee)

정회원



2002년 2월 : 대전대학교 정보통신공학과 공학사  
 2004년 2월 : 대전대학교 정보통신공학과 공학석사  
 2004년 3월~현재 : 한양대학교 전자통신컴퓨터공학과 박사과정  
 <관심분야> 디지털 통신, OFDM 시스템

윤동원 (Dongweon Yoon)

정회원



1989년 2월 : 한양대학교 전자통신공학과 공학사  
 1992년 2월 : 한양대학교 전자통신공학과 공학석사  
 1995년 8월 : 한양대학교 전자통신공학과 공학박사  
 1995년 3월~1997년 8월 : 동서대학교 정보통신공 학과 조교수  
 1997년 9월~2004년 2월 : 대전대학교 정보통신공학과 부교수  
 2004년 3월~현재 : 한양대학교 전자통신컴퓨터공학부 부교수  
 <관심분야> 디지털 통신, 무선통신

현광민 (Kwangmin Hyun)

정회원



1989년 2월 : 한양대학교 전자통신공학과 공학사  
 1995년 2월 : 한양대학교 전자통신공학과 공학석사  
 2004년 8월 : 한양대학교 전자통신전공학과 공학박사  
 1989년~1994년 : (주) 대우통신  
 1995년~1996년 : (사) 고등기술연구원  
 1997년~2001년 : (주) 케이엠더블유  
 2004년~2005년 : 인텔 코리아  
 2005년~ 현재: 국립원주대학교 정보통신과 전임강사  
 <관심분야> 디지털통신, 이동통신, 통신신호처리

박상규 (Sang Kyu Park)

정회원



1974년 2월 : 서울대학교 전기공학과 공학사  
 1980년 5월 : 듀크대학교 전기공학과 공학석사  
 1987년 1월 : 미시건대학교 전기공학과 공학박사  
 1987년 3월~현재 : 한양대학교 전자통신컴퓨터공학부 교수  
 <관심분야> 디지털 통신, 확산대역통신, MIMO, OFDM 시스템