

논문 2006-43SP-5-7

복소수 웨이블릿과 베르누이-가우스 모델을 이용한 잡음 제거

(Noise Removal Using Complex Wavelet and Bernoulli-Gaussian Model)

엄 일 규*, 김 유 신*

(Il Kyu Eom and Yoo Shin Kim)

요 약

영상 및 신호 처리 분야에 일반적으로 사용되는 직교 웨이블릿 변환은 천이에 대한 민감성과 방향성에 대한 선택도가 떨어지기 때문에 성능에 한계를 가지고 있다. 이러한 단점을 극복하기 위해 복소수 웨이블릿 변환이 사용되고 있다. 본 논문에서는 이중 트리 복소수 웨이블릿과 베르누이-가우스 사전 확률분포를 이용한 효과적인 영상 잡음 제거 방법을 제안하고자 한다. 베르누이-가우스 모델에 대한 파라미터를 추정하기 위해 본 논문에서는 두 가지의 간단하고 반복적이지 않은 방법을 제안한다. 베르누이 랜덤 변수로 표현되는 혼합 파라미터를 추정하기 위해서는 가설-검증 기법을 사용한다. 추정된 혼합 파라미터를 이용하여 신호의 분산은 MGML(maximum generalized marginal likelihood) 추정기를 통하여 추정된다. 복소수 웨이블릿 변환을 사용하여 제안 방법과 알려진 잡음 제거 기법과 비교 실험을 수행하였다. 실험결과를 통해 제안 방법이 적은 계산량으로 고주파 성분 많은 영상에 대하여 우수한 잡음 제거 결과를 나타냄을 알 수 있다.

Abstract

Orthogonal wavelet transform which is generally used in image and signal processing applications has limited performance because of lack of shift invariance and low directional selectivity. To overcome these demerits complex wavelet transform has been proposed. In this paper, we present an efficient image denoising method using dual-tree complex wavelet transform and Bernoulli-Gauss prior model. In estimating hyper-parameters for Bernoulli-Gaussian model, we present two simple and non-iterative methods. We use hypothesis-testing technique in order to estimate the mixing parameter, Bernoulli random variable. Based on the estimated mixing parameter, variance for clean signal is obtained by using maximum generalized marginal likelihood (MGML) estimator. We simulate our denoising method using dual-tree complex wavelet and compare our algorithm to well known denoising schemes. Experimental results show that the proposed method can generate good denoising results for high frequency image with low computational cost.

Keywords: 복소수 웨이블릿, 베이스 추정법, 잡음 제거, 베르누이-가우스 모델, 가설-검증 문제

I. 서 론

영상은 획득 및 전송의 과정에서 다양한 요인들에 의한 잡음 때문에 화질의 열화가 발생할 수 있다. 따라서 영상의 잡음 제거는 많은 영상처리 응용 분야에 기본적인 요소이다. 잡음 제거의 목적은 영상의 중요한 부분

을 가능한 많이 보존하는 동시에 잡음을 제거 또는 감소시키는 것이다. 최근 웨이블릿 변환에 근거한 잡음 제거 방법은 잡음 제거에 효율적인 기법으로 보고되고 있다. 웨이블릿 영역에서 잡음의 제거는 잡음에 감염된 웨이블릿 계수의 크기를 감소시킴으로써 이루어진다. 웨이블릿 임계화^[1-2]는 영상의 잡음을 감소시키는 기본적인 기법이다. 이 기법은 잡음을 포함한 웨이블릿 계수는 충분히 감소시키고 중요한 신호를 포함한 웨이블릿 계수는 아주 적게 감소시키거나 변화를 시키지 않는 방법이다.

웨이블릿 계수에 대한 잡음 제거를 위한 방법으로 베

* 정희원, 부산대학교 전자공학과, 컴퓨터 및 정보통신 연구소

(Dept. of Electronics Engineering, Research Institute of Computer, Information, and Communication, Pusan National University)

접수일자: 2006년1월16일, 수정완료일: 2006년8월7일

이지안 추정 방법을 사용할 수 있다. 베이즈안 추정법에서 각 웨이블릿 계수에 대하여 하나의 사전 확률분포(prior)가 할당되며, 원영상과 잡음의 사전 확률분포는 베이즈 잡음 제거에서 아주 중요한 역할을 한다. 잡음에 오염되지 않은 영상에 대한 가장 일반적인 사전 확률분포는 가우시안 모델^[3-5], 일반화된 가우시안 모델(generalized Gaussian distribution: GGD)^[6-7], 가우시안 스케일 혼합 모델(Gaussian scale mixture model)^[8-10], 두개의 분포의 혼합 모델^[11-17] 등이 있다. 웨이블릿 계수의 스케일간 의존을 이용한 사전 확률 모델로는 이변수 가우시안 모델^[18-20], 은닉 마코프 트리(hidden Markov tree: HMT) 모델^[21-25], 마코프 랜덤 필드(Markov random field: MRF)^[26-27] 모델 등이 있다.

두 개의 분포에 대한 혼합 사전 확률분포는 대부분의 웨이블릿을 이용한 응용분야에서 성긴 특성(sparseness)을 고려하기 위해 사용된다. 즉, 하나의 분포는 0에 가까운 값에 집중되어 있고, 나머지 분포는 큰 계수의 가능성이 있기 때문에 넓게 퍼져 있는 모양을 가진다. 위의 두 분포를 혼합하는 파라미터는 일반적으로 베르누이 랜덤 변수가 사용된다. 일반적으로 사용되는 혼합 사전 확률 모델로는 가우시안 혼합 모델^[12,16], 가우시안 분포와 0에서의 점질량 함수(point mass function at zero)^[11,13,15-16]의 혼합 등이 있다. 후자는 가우시안 혼합 모델의 극단적인 경우가 되며 베르누이-가우시안 모델로도 불린다. 위의 모델들은 해석적으로 쉽게 다룰 수 있기 때문에 수학적으로 매우 유용하게 쓰인다. 그러나 파라미터를 추정하는 방법이 쉽지 않다. EM(expectation-maximization) 알고리즘^[21]이 혼합 사전 확률 모델에 대한 파라미터 추정의 한 해가 될 수 있다.

앞서 언급했듯이 베이즈 추정을 이용한 잡음 제거에서 웨이블릿 계수에 대한 사전 확률 모델이 아주 중요한 역할을 수행한다. 한편 어떤 웨이블릿 변환을 사용하는 가도 매우 중요한 문제가 될 수 있다. 일반적으로 사용되는 이산 웨이블릿 변환(discrete wavelet transform: DWT)은 데이터의 수가 영상과 동일하여 적은 계산량으로 잡음 제거를 수행할 수 있다. 그러나 DWT는 천이 불변(shift invariance) 특성을 가지지 못하고, 방향성 정보에 대한 선택도가 떨어지는 단점이 있다. 이는 잡음 제거 등을 비롯한 많은 영상처리 응용분야에 단점으로 작용하고 있다. 이를 보완하기 위해서 많은 계산량에도 불구하고 천이 불변 웨이블릿 또는 간축이 되지 않은(undecimated) 웨이블릿 변환을 사용하

기도 한다. 이러한 변환은 웨이블릿 분해 수준이 높아짐에 따라 데이터량이 지수적으로 증가하기 때문에 계산량에서 많은 부담을 가지고 있다.

최근 Kingsbury는 천이 불변 특성을 거의 유지하면서, 웨이블릿의 방향성에 대한 선택도를 높임과 동시에 적절한 계산량을 유지하는 이중 트리 복소수 웨이블릿 변환(dual-tree complex wavelet transform: DT-CWT)을 제안하였다^[31-32]. DT-CWT는 웨이블릿 분해 수준에 관계없이 4배의 계산량을 가지게 되며, 여섯 방향의 선택도를 가지기 때문에 DWT 보다 우수하며, 천이 불변 웨이블릿 보다 적은 계산량을 가진다. DT-CWT는 잡음 제거, 텍스처 분할 등에 사용되어 좋은 결과를 보이고 있다.

본 논문에서는 DT-CWT를 이용한 영상 잡음 제거 방법을 제안하고자 한다. 웨이블릿 계수에 대한 사전 확률분포로는 베르누이-가우시안 모델을 사용하며 파라미터 추정을 위해서는 MGML(maximum generalized marginal likelihood)^[28-29] 방법 및 가설-검증 기법을 사용한다. 본 논문의 방법은 파라미터 추정을 위해 EM 등과 같은 반복적인 해를 구하는 방법을 사용하지 않는 장점을 가진다. 실험 결과는 본 논문의 방법이 PSNR(peak signal to noise ratio) 측면에서 최신의 잡음 제거 방법보다 우수하거나 경쟁적인 방법임을 보여주고 있다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. II장에서는 복소수 웨이블릿의 정의 및 특성을 살펴보고, III장에서는 베르누이-가우시안 모델을 이용한 베이즈 추정을 기술한다. IV장에서는 제안한 파라미터 추정법을 설명하고 실험 결과를 통하여 제안 방법의 우수성을 V장에서 보이고, VI장에서 결론을 맺는다.

II. 복소수 웨이블릿 변환

WT는 최대로 간축된(maximally decimated) 형태로 다양한 영상처리 응용분야에 사용되고 있다. 이러한 DWT는 원래 영상과 데이터 수가 동일하여 영상 압축 등에 효율적으로 사용되고 있는 반면, 신호 해석이나 신호의 재구성의 응용 분야에서는 앞서 언급한 몇 가지 단점으로 인하여 좋은 성능을 나타내지 못하고 있다.

Kingsbury는 천이 불변 특성을 거의 유지하면서, 웨이블릿의 방향성에 대한 선택도를 높임과 동시에 적절한 계산량을 유지하는 DT-CWT를 제안하였다^[31-32]. 그림 1은 DT-CWT의 구조를 표현하고 있다. 그림 1에서

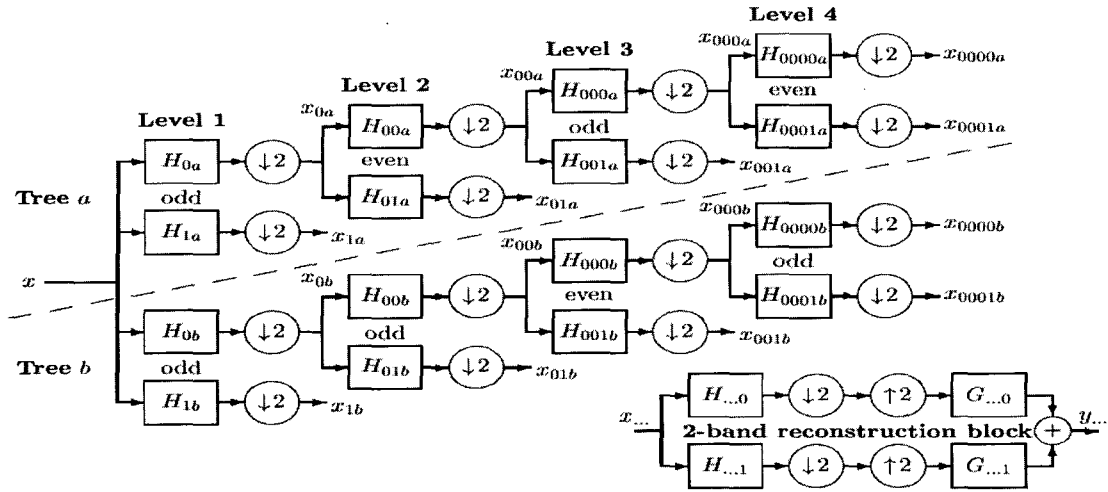


그림 1. 이중 트리 복소수 웨이블릿 변환의 구조
Fig. 1. The structure of dual-tree complex wavelet transform.

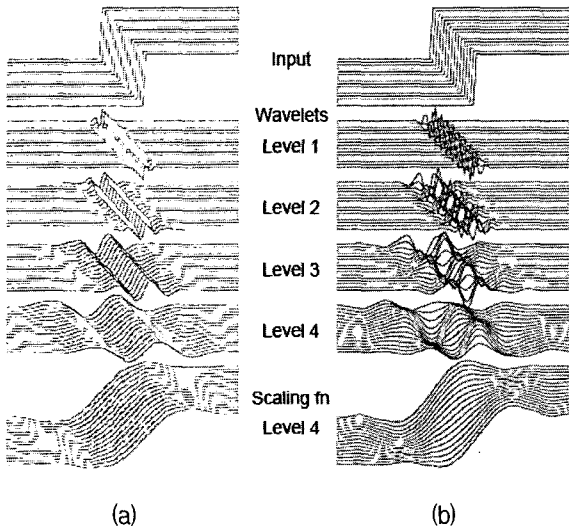


그림 2. DT-CWT의 천이 불변 특성 (a) DT-CWT (b) DWT
Fig. 2. Shift-invariant characteristic of DT-CWT (a) DT-CWT (b) DWT.

볼 수 있는 바와 같이 입력 신호에 대한 DT-CWT는 같은 신호에 대하여 최대 간축된 DWT를 두개 병렬로 구현한다. 트리 a와 트리 b의 필터가 만약 같다면 DT-CWT를 사용하는 장점은 없어지게 된다. 그러나 두 필터가 특별한 방법으로 다르게 사용된다면 트리 a의 신호는 복소수 웨이블릿의 실수 부분이 되고, 트리 b의 신호는 복소수 웨이블릿의 허수 부분이 된다.

그림 2는 계단 모양의 입력을 웨이블릿 변환 하였을 때, 변환의 수준에 따라 변화가 생기는(에지 부분) 위치의 변화를 살펴 본 것이다. 그림 2(a)는 DT-CWT를

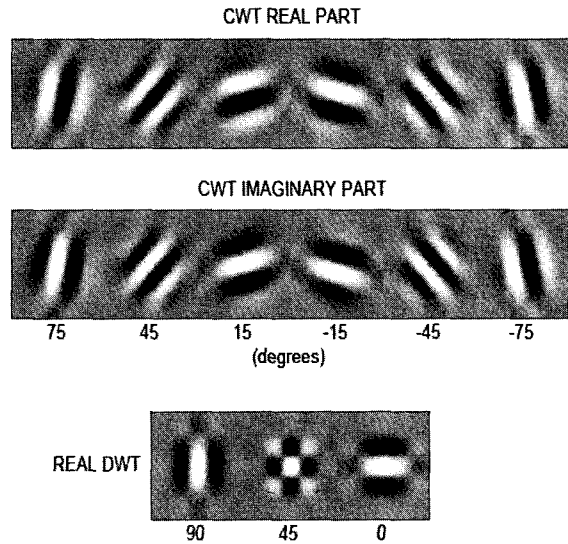


그림 3. DWT와 DT-CWT의 방향 선택도
Fig. 3. Directional selectivity of DWT and DT-CWT/

사용하여 4번 변환한 경우이다. 그림에서 보는 바와 같이 에지 위치에 대한 천이가 거의 일어나지 않음을 알 수 있다. 그림 2(b)는 DWT를 사용한 경우 인데, 에지 위치의 천이가 상당히 일어남을 알 수 있다. 그림 2는 DT-CWT의 천이 불변 특성을 잘 보여주고 있다. 그림 3은 DWT와 DT-CWT의 방향 선택도를 표현하고 있다. DT-CWT는 $\pm 15, \pm 45, \pm 75$ 의 여섯 방향성을 가지며, DWT는 0, 45, 90의 세 개의 방향을 가진다. 그림 3에서 볼 수 있는 바와 같이 DT-CWT가 DWT보다 방향에 대한 선택도가 뛰어남을 알 수 있다. 2차원 영

상에 대한 DT-CWT는 웨이블릿 분해 수준에 관계없이 4배의 계산량을 가지게 되며, 잡음 제거, 텍스처 분할 등에 사용되어 좋은 결과를 보이고 있다.

III. 베르누이-가우스 사전 확률 모델에 대한 베이지 추정법

입력 영상이 평균 0과 분산 σ_n^2 을 가지는 백색 가우스 잡음에 오염되었다고 가정하면 주어진 스케일 및 방향에 대한 웨이블릿 계수는 다음과 같이 표현된다.

$$y_k = w_k + n_k \quad (1)$$

여기서 w_k 는 공간 좌표 k 에서의 웨이블릿 계수이며, n_k 는 평균 0, 분산 σ_n^2 을 가지는 독립적이고 동일하게 분포된 가우시안 확률 밀도함수($N(0, \sigma_n^2)$)에 의한 랜덤 변수이다. 또한 n_k 는 w_k 와 독립적이라고 가정한다. 여기서 웨이블릿 변환의 스케일 및 방향에 대한 첨자에 대하여 모든 기술 과정이 동일하기 때문에 생략한다. 잡음 제거의 목적은 관찰된 y_k 로부터 w_k 를 추정하는 것이 된다.

웨이블릿 계수는 적은 수의 크기가 큰 계수에 대부분의 정보가 저장되어 있다. 이러한 특성을 통계적으로 반영하기 위하여 베르누이-가우시안 확률밀도 함수를 웨이블릿 계수에 대한 사전 확률 모델로 설정할 수 있다. γ_k 를 $\Pr(\gamma_k = 1) = p_k$ 및 $\Pr(\gamma_k = 0) = 1 - p_k$ 를 가지는 베르누이 랜덤 변수라 하고, 웨이블릿 계수에 대한 확률 분포 함수를 다음과 같이 정의 하자

$$\begin{aligned} w_k &= 0 \text{ if } \gamma_k = 0 \\ w_k &\sim N(0, \sigma_k^2) \text{ if } \gamma_k = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

웨이블릿 계수 w_k 에 대한 사전 확률 모델은 식 (2)의 분포의 혼합으로 다음과 같이 표현된다.

$$w_k \sim p_k N(0, \sigma_k^2) + (1 - p_k) \delta(0) \quad (3)$$

여기서 $\delta(0)$ 는 0에서의 점 질량 함수이고, σ_k^2 은 잡음이 없는 웨이블릿 계수의 분산이다. 식 (3)의 사전 확률 모델에 따르면, 모든 웨이블릿 계수 w_k 는 $1 - p_k$ 의 확률로 영이 되거나 p_k 의 확률로 평균이 0이고 분산이

σ_k^2 인 가우시안 분포를 가진다. 확률값 p_k 는 영이 아닌 웨이블릿 계수의 존재 비율을 나타내며, σ_k^2 은 그 계수들의 크기의 척도가 된다.

잡음에 오염된 웨이블릿 계수 y_k 는 다음과 같이 표현된다.

$$y_k \sim p_k N(0, \sigma_k^2 + \sigma_n^2) + (1 - p_k) N(0, \sigma_n^2) \quad (4)$$

L^2 -손실을 사용한 베이지 추정을 사용하여 w_k 에 대한 사후 평균(posterior mean)을 구하면

$$\begin{aligned} E(w_k | y_k) &= E_{\gamma_k | y_k}(w_k | y_k, \gamma_k) \\ &= P(\gamma_k = 1 | y_k) E(w_k | y_k, \gamma_k = 1) \\ &= P(\gamma_k = 1 | y_k) \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + \sigma_n^2} y_k \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $P(\gamma_k = 1 | y_k)$ 은 잡음이 첨가된 웨이블릿 계수 y_k 가 관측되었을 때, 0이 아닌 w_k 가 존재할 확률이다. 즉, y_k 가 순수한 잡음 성분만 있는 지, 웨이블릿 계수 w_k 에 잡음이 첨가되었는지를 확률적으로 나타내는 확률값이다. $P(\gamma_k = 1 | y_k)$ 의 값은 베이지 법칙에 의해서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(\gamma_k = 1 | y_k) &= \frac{P(\gamma_k = 1, y_k)}{P(y_k)} \\ &= \frac{P(y_k | \gamma_k = 1) P(\gamma_k = 1)}{P(y_k | \gamma_k = 0) P(\gamma_k = 0) + P(y_k | \gamma_k = 1) P(\gamma_k = 1)} \\ &= \frac{p_k N(0, \sigma_k^2 + \sigma_n^2)}{(1 - p_k) N(0, \sigma_n^2) + p_k N(0, \sigma_k^2 + \sigma_n^2)} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서 양변을 $(1 - p_k) N(0, \sigma_k^2 + \sigma_n^2)$ 로 나누고

$$\eta_k = \frac{p_k N(0, \sigma_k^2 + \sigma_n^2)}{(1 - p_k) N(0, \sigma_k^2 + \sigma_n^2)} \quad (7)$$

로 두면 $P(\gamma_k = 1 | y_k)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다. 즉,

$$P(\gamma_k = 1 | y_k) = \frac{\eta_k}{1 + \eta_k} \quad (8)$$

그리고 식 (9)의 η_k 는 가우시안 확률밀도 함수 수식

$$L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_k) = \prod_{i=1}^N \left[p_k \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_k^2 + \sigma_n^2)}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2(\sigma_k^2 + \sigma_n^2)}\right) + (1-p_k) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma_n^2}\right) \right] \quad (10)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \operatorname{argmax} = \left\{ \max \prod_{i=1}^N \left[p_k \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_k^2 + \sigma_n^2)}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2(\sigma_k^2 + \sigma_n^2)}\right) + (1-p_k) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma_n^2}\right) \right] \right\} \quad (12)$$

을 대입하여

$$\eta_k = \frac{p_k}{1-p_k} \frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma_k^2 + \sigma_n^2}} \exp\left(\frac{\sigma_k^2 y_k^2}{2\sigma_n^2(\sigma_k^2 + \sigma_n^2)}\right) \quad (9)$$

로 계산할 수 있다. 따라서 식 (5)의 베이즈 추정기는 $\boldsymbol{\theta}_k = \{\sigma_k^2, p_k\}$ 의 파라미터로 정의된다. 잡음의 분산 σ_n^2 은 일반적으로 알고 있다고 가정하거나 강인한 미디언 추정기^[2]로 쉽게 추정될 수 있다. 본 연구에서는 공간 적 응용적 베이즈 잡음 제거 방법을 제안한다. 아울러 파라미터는 가설-검증 기법과 MGML 추정기를 사용하여 추정된다. 즉, 베르누이 랜덤 변수 γ_k 는 가설-검증 기법으로 신호의 분산 σ_k^2 은 MGML 추정법을 이용하여 구해진다.

IV. 파라미터 추정

1. MGML 추정기

주어진 관찰된 영상 y_k 에 대한 우도(likelihood)는 식 (10)과 같이 표현된다. 식 (10)에서 \mathbf{y} 는 y_k 와 y_k 주변을 포함하는 크기 N 을 가지는 정방형 창에 있는 웨이블릿 계수로 이루어진 랜덤 벡터이다. \mathbf{y} 의 각 요소들은 서로 독립적이고 같은 분산을 가진다고 가정한다. 최대 우도(maximum likelihood: ML) 추정값은 식 (10)의 최대값으로 구할 수 있다. 그러나 실질적으로 우도 및 최대값을 구하기 힘들기 때문에 ML 추정값을 구하지 못하는 경우가 많다.

가우스 혼합 모델에 대한 파라미터 추정을 위해 ML 대신 MGML 방법이 제안되었다^[28-29]. 본 논문에서는 잡음이 없는 영상의 분산을 추정하기 위하여 다음과 같은 GML(generalized marginal likelihood)를 사용한다. 즉,

$$L_{GML}(\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\gamma}) = f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\theta}_k) = f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\gamma}; \sigma_k^2) p_k \quad (11)$$

여기서 $\boldsymbol{\gamma}$ 는 γ_k 와 γ_k 주변을 포함하는 크기 N 을 가지는 정방형 창에 있는 웨이블릿 계수로 이루어진 랜덤 벡터이다. 또한 $\boldsymbol{\gamma}$ 의 각 성분은 독립적이라 가정한다. MGML 추정기는 식 (11)의 GML 값을 최대화시켜서 식 (12)와 같이 구할 수 있다. 식 (12)를 이용하여 GML 값을 최대화시키는 파라미터를 구하면 다음과 같다.

$$\hat{p}_k = \frac{N_e}{N}, \hat{\sigma}_k^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^N \gamma_i y_i^2}{N_e} - \sigma_n^2 \right) \quad (13)$$

여기서 $N_e = \sum_{i=1}^N \gamma_i$ 이고, $(g)_+$ 는 $g \geq 0$ 일 때는 g 의 값을 가지고 아닐 경우에는 0의 값을 가지는 함수이다. 식 (13)에서 N_e 는 해석적으로 구해될 수 있는 값이 아니다^[28]. 또한 N_e 는 γ_k 의 값을 구함으로써 추정될 수 있다. 본 논문에서는 가설-검증 기법을 이용하여 γ_k 의 값을 추정하는 방법을 제안하고자 한다.

2. 가설-검증 기법을 이용한 혼합 파라미터의 추정

$X = (X_1, \dots, X_m)$ 를 각각 가우스 분포 $N(0, \sigma^2)$ 를 가지는 랜덤 변수라 하고, 분산을 모른다고 가정한다. 또한 X_1, \dots, X_m 은 각각 독립적인 랜덤 변수이고, 같은 분산을 가진다고 가정한다. 이 때 가설을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$H_0 = \{\sigma_0^2\}, H_1 = \{\sigma_1^2\}, \sigma_1^2 > \sigma_0^2 \quad (14)$$

위와 같은 가설의 검증을 위해서 먼저 분산을 추정하는 것이 필요하다. 분산 σ^2 은 다음과 같이 추정할 수 있다. 즉,

표 1. m 과 α 에 따른 $(\chi_{m,1-\alpha}^2(0))^{-1}$ 의 값.
Table 1. Values of $(\chi_{m,1-\alpha}^2(0))^{-1}$ according to m and α .

	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
$m = 9$	16.92	14.68
$m = 25$	37.65	34.38

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m X_i^2}{m} \quad (15)$$

따라서 $\hat{\sigma}^2 > q$ 의 조건에서 가설 H_0 는 거절된다. 여기서 q 는 주어진 유의수준 α 에 따라 결정되는 상수이다^[30]. q 를 결정하기 위하여 σ_0^2 의 관점에서 $\hat{\sigma}^2 > q$ 인 확률을 구해 보면,

$$\begin{aligned} P_{\sigma_0^2}[\hat{\sigma}^2 > q] &= P_{\sigma_0^2}\left[\frac{\sum_{i=1}^m X_i^2}{m} > q\right] \\ &= P_{\sigma_0^2}\left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{X_i}{\sigma_0}\right)^2 > \frac{mq}{\sigma_0^2}\right] \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)에서 $Y = \sum_{i=1}^m \left(\frac{X_i}{\sigma_0}\right)^2$ 로 두면 Y 값은 가우스 랜덤 변수의 제곱을 더한 값에 어떤 분산을 나눈 꼴이 된다. 이러한 조건을 만족하게 되면 Y 는 $\chi_m^2(0)$ 분포를 가지게 된다^[30]. 따라서 주어진 유의수준 α 에 대하여

$$P[Y > mk/\sigma_0^2] = 1 - P[Y \leq mk/\sigma_0^2] = \alpha \quad (17)$$

로 두면, 다음과 같은 가설 H_0 의 거절 조건을 구할 수 있다.

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^m X_i^2}{\sigma_0^2} \geq (\chi_{m,1-\alpha}^2(0))^{-1} \quad (18)$$

즉, 식 (18)의 조건에서 가설 H_0 는 거절되고 분산값은 σ_1^2 의 범주에 속하게 되고, 반대의 경우 분산값은 σ_0^2 의 범주에 속하게 된다.

본 논문에서는 하나의 웨이블릿 계수에 대하여 공간 적용적인 파라미터를 구하는 방법을 제안하고자 한다. 식 (8)에서 $\gamma_k = 1$ 인 경우 y_k 는 $\sigma_k^2 + \sigma_n^2$ 을 분산으로 하는 가우스 분포를 따르며, $\gamma_k = 0$ 인 경우 y_k 는 잡음 성분만 가지므로 σ_n^2 을 분산으로 하는 가우스 분포를 가진다. 따라서 y_k 와 y_k 를 중심으로 하는 정방형의 이웃 계수를 X 로 정의하고, y_k 의 분산을 추정하여 다음과 같은 가설을 설정할 수 있다.

음 성분만 가지므로 σ_n^2 을 분산으로 하는 가우스 분포를 가진다. 따라서 y_k 와 y_k 를 중심으로 하는 정방형의 이웃 계수를 X 로 정의하고, y_k 의 분산을 추정하여 다음과 같은 가설을 설정할 수 있다.

$$H_0 : \sigma_0^2 = \sigma_n^2, H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_n^2 \quad (19)$$

이때 식 (18)에 의해 다음의 조건에서 가설 H_0 가 거절된다.

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^m y_i^2}{\sigma_n^2} \geq (\chi_{m,1-\alpha}^2(0))^{-1} \quad (20)$$

즉, 가설 H_0 가 거절될 경우 분산은 σ_n^2 보다 크기 때문에 $\hat{\gamma}_k = 1$ 의 값을 가지게 되고, 반대의 경우는 $\hat{\gamma}_k = 0$ 의 값을 가진다. 식 (20)에서 $(\chi_{m,1-\alpha}^2(0))^{-1}$ 은 유의수준 α 에 의해서 결정되는 상수값이다. 표 1은 m 과 α 에 따른 $(\chi_{m,1-\alpha}^2(0))^{-1}$ 의 값의 예를 나타낸 것이다. 이 때의 m 값은 y_k 와 그 주위의 정방형 이웃에 있는 웨이블릿 계수의 수를 나타낸다. $(\chi_{m,1-\alpha}^2(0))^{-1}$ 의 값은 m 과 α 에 따라 통계표에 의해서 구할 수 있다. 유의수준 α 는 가설 검정의 오차를 나타내며 일반적으로 5% 및 10%의 오차 즉, 0.1 또는 0.05의 값을 사용하고 있다.

식 (20)에 의해 추정된 $\hat{\gamma}_k$ 로부터 N_e 의 추정값은 다음과 같이 구할 수 있다. 즉,

$$\hat{N}_e = \sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i \quad (21)$$

또한 p_k 및 σ_k^2 의 추정값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{p}_k = \frac{\hat{N}_e}{N}, \hat{\sigma}_k^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^N \hat{\gamma}_i y_i^2}{\hat{N}_e} - \sigma_n^2 \right)_+ \quad (22)$$

3. 잡음 분산의 추정

많은 잡음 제거 논문에서 잡음의 분산은 알고 있거나 쉽게 추정될 수 있다고 가정하고 있다. 본 논문에서는 잡음의 분산을 강인한 미디언 추정기^[2]로 다음과 같이 추정하여 사용한다.

표 2. Lena 영상에 대한 다양한 잡음 제거 방법의 PSNR 값

Table 2. The PSNR results for several denoising methods with Lena image.

σ_n	10	15	20	25	wavelets
BiShrink ^[19]	35.31	33.64	32.37	31.37	DT-CWT
AdaptShrink ^[6]	-	33.38	32.09	31.08	SI DWT(D8)
WMFSD ^[33]	-	32.72	31.36	30.17	Mallat DWT
GSM ^[9]	35.61	33.90	32.66	31.69	Steerable pyramid
LCHMM ^[24]	35.0	33.0	31.7	30.6	SI DWT (S8)
제안 방법	35.30	33.41	32.06	30.96	DT-CWT

표 3. Barbara 영상에 대한 다양한 잡음 제거 방법의 PSNR 값

Table 3. The PSNR results for several denoising methods with Barbara image.

σ_n	10	15	20	25	wavelets
BiShrink [19]	33.32	31.28	29.77	28.58	DT-CWT
AdaptShrink [6]	-	31.11	29.79	28.30	SI DWT(D8)
WMFSD [33]	-	29.65	27.85	26.57	Mallat DWT
GSM [9]	34.03	31.86	30.32	29.13	Steerable pyramid
LCHMM [24]	33.6	31.4	29.7	28.5	SI DWT (S8)
제안 방법	33.85	31.55	29.97	28.79	DT-CWT

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\text{median}(|y_i|)}{0.6745}, y_i \in \text{subband } HH \quad (23)$$

V. 모의실험

제안된 영상 잡음 제거 방법을 이용하여 표준 영상 (Lena, Barbara:8bpp)에 대하여 모의실험을 하였다. 가우스 백색 잡음은 MATLAB을 사용하여 생성하였다. 잡음제거를 위해 DT-CWT를 사용하여 다섯 번의 변환을 수행하였다. 또한 파라미터의 추정을 위하여 $N=49$ (7×7 정방형 창)을 사용하였고, $m=25, \alpha=0.05$ 를 사용하였다. 본 논문의 잡음 제거 방법은 복소수 웨이블릿 계수의 실수 및 허수 부분에 각각 적용하였다.

본 논문에서는 제안 방법과 DT-CWT를 이용한 BiShrink^[19], 간축되지 않은 웨이블릿을 사용한 AdaptShrink^[6], 가우스 스케일 혼합 모델(GSM)을 사용한 방법^[9], 웨이블릿과 멀티 프랙탈을 이용한 방법(WMFSD)^[33], 국부 내용 정보를 이용한 은닉 마코프 트리 방법(LCHMM)^[24]과 비교하였다.

표 2 및 표 3은 Lena 및 Barbara 영상에 대하여 제안 방법과 다양한 잡음 제거 방법을 비교한 결과를 나타낸다. 모든 PSNR값은 논문으로부터 그대로 차용되었고, 본 논문의 방법은 같은 잡음 분산으로 무작위로 발

생시킨 10장의 영상에 대하여 평균한 PSNR을 나타낸다. 표 2 및 표 3에서 볼 수 있는 바와 같이 GSM 방법이 가장 높은 PSNR을 나타낸다. 그러나 이 방법은 512×512 영상에 대하여 1.7 GHz 펜티엄-III CPU를 사용하여 160초 정도의 시간이 걸렸다고 보고 되고 있다^[9]. 그러나 본 논문의 방법은 2.6 GHz 펜티엄-IV CPU를 사용하여 약 5초 정도의 시간을 소요하기 때문에 GSM 방법과 비교하여 아주 적은 계산량으로 크지 않은 PSNR을 차이를 가지기 때문에 GSM 방법과 경쟁력이 있다고 본다.

또한 본 논문의 방법은 BiShrink 방법과 비교하여 Lena 영상에 대해서는 PSNR이 떨어지는 반면 Barbara 영상에 대해서는 우수한 결과는 나타낸다. BiShrink 방법은 제안 방법과 비슷한 계산량을 가지는 방법으로 소스 코드가 공개되어 있기 때문에 영상을 비교 할 수 있다. 또한 BiShrink 방법은 웨이블릿 계수의 스케일간 의존성을 이용하는 방법으로 본 논문의 방법보다 저대역 통과 특성을 더 가지게 된다. 따라서 고주파 성분이 상대적으로 많은 Lena 영상에서는 본 논문의 방법 보다 높은 PSNR을 가지지만 고주파 성분이 많은 Barbara 영상에 대해서는 본 논문의 방법보다 낮은 PSNR을 가지게 된다.

그림 4는 $\sigma_n^2 = 400$ Lena 영상에 대하여 BiShrink



(a)



(b)

그림 4. $\sigma_n = 20$ 일 때의 BiShrink 방법과 제안 방법의 잡음 제거 결과

(a) Lena(BiShrink), (b) Lena(제안 방법)

Fig. 4. Denoising results for BiShrink and the proposed method when $\sigma_n = 20$.

(a) Lena(BiShrink), (b) Lena(proposed method)

방법과 제안 방법의 잡음 제거 결과를 나타낸 것이다. 그림 4에서 볼 수 있듯이 제안 방법의 Lena 영상은 낮은 PSNR에도 불구하고 BiShrink 방법의 결과 보다 우수한 화질을 보여 주고 있다. 특히 Lena 영상의 경우 본 논문의 방법은 모자의 끝부분 꼬리가 살아있고, 모자의 빗살 무늬가 BiShrink 방법보다 더 선명함을 알 수 있다.

VI. 결 론

본 논문에서는 이중 트리 복소수 웨이블릿과 베르누이-가우스 사전 확률 모델을 이용한 잡음 제거 방법을 제안하였다. 본 논문에서는 가설-검증 기법을 이용하여 베이스 추정법에 의한 잡음 제거를 위한 파라미터를 추정하는 방법을 제안하였다. 또한 추정된 파라미터를 이용하여 영상의 분산을 추정하기 위하여 MGML 방법을 도입하였다. 모의실험 결과를 통하여 본 논문의 방법이 최신의 잡음 제거 방법과 비교하여 경쟁력 있는 성능을 나타낸다는 것을 보여 주었다.

참 고 문 헌

- [1] D. L. Donoho, and I. M. Johnstone, "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage" *Biometrika*, vol.81, no.3, pp.425-455, 1994.
- [2] D. L. Donoho, and I. M. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage," *Journal of the American Statistical Association*, vol.90, no.432, pp.1200-1224, 1995.
- [3] M. K. Mihcak, I. Kozintsev, K. Ramchandran, and P. Moulin, "Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients," *IEEE Signal Processing Letters*, vol.6, no.12, pp.300-303, 1999.
- [4] M. A. T. Figueiredo, and R. D. Nowak, "Wavelet-based image estimation: An empirical Bayes approach using Jeffrey's noninformative prior," *IEEE. Transaction on Image Processing*, vol.10, no.9, pp.1322-1331, 2001.
- [5] Z. Cai, T. H. Cheng, C. Lu, and K. R. Subramanian, "Efficient wavelet-based image denoising algorithm," *Electronics Letters*, vol.37, no.11, pp.683-685, 2001.
- [6] S. G. Chang, B. Yu, and M. Vetteri, "Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising," *IEEE. Transaction on Image Processing*, vol.9, no.9, pp.1522-1531, 2000.
- [7] S. G. Chang, B. Yu, and M. Vetteri, "Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression," *IEEE. Transaction on Image Processing*, vol.9, no.9, pp.1532-1546, 2000.
- [8] V. Strela, J. Portilla, and E. P. Simoncelli, "Image denoising using a local Gaussian scale mixture model in the wavelet domain," *Proceeding of SPIE, 45th Annual Meeting, San Diego, July 2000*.
- [9] J. Portilla, V. Strela, M. J. Wainwright, and E. P. Simoncelli, "Image denoising using Gaussian scale mixtures in the wavelet domain," *IEEE Transaction on Image Processing*, vol.12, no.11, pp.1338-1351, 2003.
- [10] J. Portilla, V. Strela, M. J. Wainwright, and E. P. Simoncelli, "Adaptive Wiener denoising using a Gaussian scale mixture model in the wavelet domain," *Proceeding of IEEE International Conference on Image Processing, Thessaloniki, Greece, Oct. 2001*.
- [11] F. Abramovich, T. Sapatinas, and B. Silverman, "Wavelet thresholding via a Bayesian approach," *Journal of the Royal Statistical Society B*, 60, pp.725-749, 1998.
- [12] H. A. Chipman, E. D. Kolaczyk, and R. E. McCulloch, "Adaptive Bayesian wavelet shrinkage," *Journal of the American Statistical Association*, 92, pp.1413-1421, 1997.
- [13] B. Vidakovic, "Nonlinear wavelet shrinkage with Bayes rules and Bayes factors," *Journal of the American Statistical Association*, 93, pp.173-179, 1998.
- [14] M. Clyde, G. Parmigiani, and B. Vidakovic, "Multiple shrinkage and subset selection in wavelets," *Biometrika*, vol.85, no.2, pp.391-401, 1998.
- [15] D. Leporini, J.-C. Pesquet, and H. Krim, "Best basis representation with prior statistical models," *Lecture Notes in Statistics*, pp.155-172, 1999.
- [16] B. Vidakovic, "Wavelet-based nonparametric Bayes methods," *Lecture Notes in Statistics*, vol.133, pp.133-155, 1998.
- [17] Bijaoui, "Wavelets, Gaussian mixtures and Wiener filtering," *Signal Processing*, 82, pp.709-712, 2002.
- [18] L. Sendur and I. W. Selesnick, "Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency," *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol.50, no.11, pp.2744-2756, (2002).

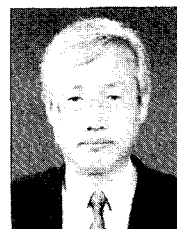
- [19] L. Sendur and I. W. Selesnick, "Bivariate shrinkage with local variance estimation," *IEEE Signal Processing Letters*, vol.9, no.12, pp.438-441, 2002.
- [20] D. Cho, and T. D. Bui, "Multivariate statistical modeling for image denoising using wavelet transforms," *Signal Processing: Image Communication*, 20, pp.77-89, 2005.
- [21] M. S. Crouse, R. D. Nowak, and R.G. Baraniuk, "Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models," *IEEE. Transaction on Image Processing*, vol.46, pp.886-902, 1998.
- [22] J. K. Romberg, H. Choi, and R. G. Baraniuk, "Bayesian tree-structured image modeling using wavelet-domain hidden Markov models," *IEEE. Transaction on Image Processing*, vol.10, no.7, pp.1056-1068, 2001.
- [23] H. Choi, J. Romberg, R. Baraniuk, and N. Kingsbury, "Hidden Markov tree modeling of complex wavelet transforms," *Proceeding of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Istanbul, Turkey, June, 2000.
- [24] G. Fan and X. G. Xia, "Image denoising using local contextual hidden Markov model in the wavelet domain," *IEEE Signal Processing Letters*, vol.8, no.5, pp.125-128, 2001.
- [25] M. M. Ichir and A. M. Djafari, "Hidden Markov models for wavelet image separation and denoising," *Proceeding of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp.225-228, 2005.
- [26] M. Malfait and D. Roose, "Wavelet-based image denoising using a Markov random field a priori model," *IEEE Transaction on Image processing*, vol.6, no.4, pp.549-565, 1997.
- [27] A. Pi_zurica, W. Philips, I. Lemahieu, and M. Acheroy, "A joint inter- and intrascale statistical model for wavelet based Bayesian image denoising," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.11, no.5, pp.545-557, 2002.
- [28] F. Champagnat, and J. Idier, "An alternative to standard maximum likelihood for Gaussian mixtures," *Proceeding of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp.2020-2023, 1995.
- [29] F. Champagnat, and J. Idier, "Generalized marginal likelihood for Gaussian mixtures," *LSS Internal Report GPI-94-01*, 20, 1994.
- [30] E. J. Dudewicz, and S. N. Mishra, *Modern Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons, 1988.
- [31] N. G. Kingsbury, "Image processing with complex wavelets," *Phil. Trans. Royal Society London A*, 357, pp.2543-2560, 1999.
- [32] N. Kingsbury, "Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol.10, no.3, pp.234-253, 2001.
- [33] J. Zhong, and R. Ning, "Image denoising based on wavelets and multifractals for singularity detection," *IEEE Transaction on Image Processing*, vol.14, no.10, pp.1435-1447, 2005.
- [34] J. Starck, E. Candes, and D. Donoho, "The curvelet transform for image denoising," *IEEE Transaction on Image Processing*, vol.11, no.6, pp.670-684, 2002.

저 자 소 개



엄 일 규(정회원)
1990년 부산대학교 전자공학과 학사.
1992년 부산대학교 전자공학과 석사.
1998년 부산대학교 전자공학과 박사.

현재 부산대학교 전자공학과 부교수
<주관심분야 : 통계신호처리, 영상처리, 웨이블릿 변환 신호처리, 신경회로망>



김 유 신(정회원)
1974년 서울대학교 전자공학과 학사.
1980년 U.C. Berkeley 전자공학과 석사.
1983년 Standford University 전자재료 박사과정 수학.

1995년 Cornell University Ph.D
1983년~현재 부산대학교 전자공학과 교수
현재 한국 과학철학회 회장
<주관심분야 : 영상처리, 신경회로망, 공학윤리, 과학기술철학>