

비정합 불확실성을 갖는 선형 시스템을 위한 LMI 기반 슬라이딩 평면 설계법

論 文

55D-9-2

An LMI-Based Sliding Surface Design Method for Linear Systems with Mismatched Uncertainties

崔 漢 浩[†]
(Han Ho Choi)

Abstract - In this paper, we propose a new sliding surface design method for a class of uncertain systems with mismatched unstructured uncertainties. The uncertain system under consideration may have mismatched parameter uncertainties in the state matrix as well as in the input matrix. In terms of linear matrix inequalities (LMIs), we give a sufficient condition for the existence of linear sliding surfaces guaranteeing the asymptotic stability of the sliding mode dynamics. And, we give an LMI parameterization of such linear sliding surfaces together with switched feedback control laws. Our LMI condition can be less conservative than the existing conditions and our result supplement the existing results. Finally, we give a numerical example showing that our method can be better than the previous results.

Key Words : 슬라이딩 평면, 슬라이딩 모드, 정합 조건, LMI, 불확실성

1. 서 론

현재까지 여러 저자들에 의하여 정합조건(matching condition)이 성립한다는 가정 하에 다양한 슬라이딩 평면 설계 방법들이 제안되었다[7],[12],[13]. 정합조건은 매우 제한적이며 실제 응용에서 불확실성을 모델링하는데 적절하지 않은 경우가 많다. 최근 이러한 사실을 고려하여 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성이 시스템 행렬에 존재하는 경우를 위한 슬라이딩 평면 설계방법이 LMI에 기반하여 제안되었다[3-5],[9-11],[14]. LMI에 기반한 방법들은 여러 가지 면에서 장점을 갖고 있다. LMI 기반 방법들은 극배치조건, LQ/H_2 성능조건, covariance 성능조건, L_∞ 성능조건 등과 같이 LMI로 표현 가능한 성능지수들을 설계할 때 고려해 넣을 수 있는 융통성을 제공한다. 그리고 매우 효율적인 LMI 최적화 알고리즘을 이용하여 대규모 시스템을 위한 설계에도 손쉽게 적용될 수 있는 장점을 갖고 있다[2]. 그러나 [3-5], [9-11], [14]의 방법은 입력행렬의 불확실성이 정합조건을 만족시키지 않는 경우에는 적용할 수 없는 단점을 갖고 있다. 이러한 점을 고려하여 [6]에서는 입력행렬의 불확실성이 정합조건을 만족시키지 않아도 적용할 수 있는 LMI 기반의 슬라이딩 평면 설계방법이 제안되었다.

본 논문에서도 [6]과 같이 시스템행렬 뿐만 아니라 입력행렬에도 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성이 존재하는 시스템에도 적용 가능한 LMI 기반의 슬라이딩 평면 설계방법을 제안한다. LMI를 사용하여 슬라이딩 평면이 존재할 충분

조건을 유도한다. 또한 LMI 충분조건을 해를 이용하여 슬라이딩 평면을 매개변수화한다. 이전 방법에서는 해가 존재하지 않는 경우에도 특히 [6]의 방법이 적용되지 않는 경우에도 제안된 방법을 적용할 수 있음을 수치적인 예를 통하여 보여 제안된 방법이 이전 방법들에 비해 덜 보수적일 수 있으며 이전 방법을 보완할 수 있음을 입증한다.

2. 문제 설정과 예비 결과

다음과 같은 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성이 존재하는 시스템을 고려하자[6].

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)][u(t) + f(t)] \quad (1)$$

여기에서 $x \in R^n, u \in R^m, f \in R^m$ 으로 각각 상태, 입력, 외란입력을 나타낸다. $\Delta A(t), \Delta B(t)$ 는 적절한 차원을 갖는 행렬로 [6]에서 주어진 것과 마찬가지로 각각 시스템행렬과 입력행렬의 불확실성을 나타낸다. 시스템 (1)에 대하여 다음이 성립한다고 가정하자.

- A1 : (A, B) 쌍은 안정가능하다.
- A2 : 모든 상태 정보는 이용가능하다.
- A3 : $\text{rank}(B) = m < n$
- A4 : $\Delta A(t), \Delta B(t), f(t)$ 는 시간에 대하여 연속적이다.
- A5 : 다음을 만족시키는 상수 ρ_A, ρ_B 와 함수 $\rho_f(t)$ 가 알려져 있다.

$$\|\Delta A(t)\| \leq \rho_A, \quad \|\Delta B(t)\| \leq \rho_B, \quad \|f(t)\| \leq \rho_f(t)$$

선형 슬라이딩 평면을 $\Omega = \{x : \sigma = Sx = 0\}$ 로 정의하자. 여기에서 S 는 $m \times n$ 행렬이다. 이전의 결과 [3-7]를 참조하면 S 는 다음 성질을 만족시키는 것을 찾아야 함을 알 수 있다.

[†] 교신저자, 正會員 : 동국대 工大 전기공학부 助敎授 · 工博
E-mail : hhchoi@dongguk.edu

接受日字 : 2006年 7月 21日

最終完了 : 2006年 8月 9日

P1 : $[SB+S\Delta B(t)]$ 는 역행렬이 존재한다.

P2 : 슬라이딩 평면 $Sx=0$ 에 제한된 $(n-m)$ 차의 슬라이딩 모드 동역학은 점근적으로 안정하다.

결국 가정 A1-A5를 만족시키는 비정합 불확실성을 갖는 시스템 (1)에 대하여 성질 P1-P2를 만족시키는 $m \times n$ 행렬 S 를 찾는 LMI 기반 알고리즘의 제안하는 것으로 문제를 설정할 수 있겠다.

다음에 주어지는 보조정리들은 주요 결과를 유도할 때 사용될 것이다.

보조정리 1[1] : 주어진 하나의 행렬 N 와 두 개의 대칭행렬 Q 와 R 에 대하여 다음의 LMI를 고려하자.

$$\begin{bmatrix} Q & M \\ N^T & R \end{bmatrix} > 0.$$

위의 LMI가 성립할 필요충분조건은 다음 중 하나이다.

$$R > 0, \quad Q - NR^{-1}N^T > 0$$

$$Q > 0, \quad R - N^TQ^{-1}N > 0.$$

보조정리 2 : 적절한 차원을 갖는 행렬 E, Y 에 대하여 임의의 $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ 에 대하여 다음 부등식이 항상 성립한다.

$$E^T Y + Y^T E \leq \frac{1}{\epsilon} E^T E + \epsilon Y^T Y$$

$$[E + Y]^T [E + Y] \leq \frac{1}{1-\delta} E^T E + \frac{1}{\delta} Y^T Y$$

증명: 첫 번째 부등식은 다음 부등식에 의해 항상 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\frac{1}{\epsilon} E^T E + \epsilon Y^T Y - (Y^T E + E^T Y) = \frac{1}{\epsilon} (E - \epsilon Y)^T (E - \epsilon Y) \geq 0$$

두 번째 부등식은 다음에 의해 항상 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{1}{1-\delta} E^T E + \frac{1}{\delta} Y^T Y - [E + Y]^T [E + Y]$$

$$= \frac{1}{1-\delta} E^T E + \frac{1}{\delta} Y^T Y - [E^T E + Y^T Y + E^T Y + Y^T E]$$

$$= \frac{\delta}{1-\delta} E^T E + \frac{1-\delta}{\delta} Y^T Y + E^T Y + Y^T E$$

$$= \frac{\delta}{1-\delta} [E + \frac{1-\delta}{\delta} Y]^T [E + \frac{1-\delta}{\delta} Y] \geq 0$$

3. 주요 결과

다음 LMI를 고려해보자.

$$\begin{bmatrix} \Phi^T (AX + XA^T + d_0 I) \Phi & * & * & * & * & * \\ \gamma \Phi & -I & \gamma I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I & -I & 0 & 0 & 0 \\ AX\Phi & 0 & 0 & -(1-\delta)I & 0 & 0 \\ \rho_A X\Phi & 0 & 0 & 0 & -d_0 I & 0 \\ \rho_A X\Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta I \end{bmatrix} < 0 \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & d_1 I \end{bmatrix} > 0, \quad X < d_2 I \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 2\gamma I & * & * \\ \rho_B d_1 I & \gamma B^T B & 0 \\ \rho_B d_2 I & 0 & \gamma B^T B \end{bmatrix} > 0 \quad (4)$$

여기에서 $\Phi \in R^{n \times (n-m)}$ 는 $\Phi^T \Phi = I, \Phi^T B = 0$ 를 만족시키는 행렬이다. 그러면 다음 정리를 얻을 수 있다.

정리 1 : 주어진 A, B, ρ_A, ρ_B 에 대하여 LMI (2)-(4)를 만족시키는 해 $(X, d_0, d_1, d_2, \delta, \gamma)$ 가 존재한다고 가정하자. 그러면 성질 P1-P2를 만족시키는 선형 슬라이딩 평면을 위한 행렬 S 가 존재하고 (2)-(4)의 해 X 를 사용하여 다음과 같이 매개변수화하여 표현할 수 있다.

$$\sigma(x) = Sx = NB^T X^{-1} x \quad (5)$$

여기에서 N 은 임의의 $m \times m$ 차원을 갖는 비특이 행렬이다.

증명: LMI (2)-(4)를 만족시키는 해가 존재하고 S 가 (5)처럼 주어진다고 가정하자. 먼저 (5)에 주어진 S 가 P1을 만족시킴을 보이겠다. 보조정리 1은 LMI (2)-(4)가 다음 부등식을 함축하고 있음을 의미한다.

$$d_0 > 0, \quad d_1 > 0, \quad d_2 > 0, \quad 1 > \delta > 0, \quad 1 > \gamma > 0 \quad (6)$$

(5)에 주어진 S 는 다음의 부등식을 모든 t 에 대하여 만족시키면 성질 P1을 만족시킨다.

$$[I + S_0 \Delta B(t)][I + S_0 \Delta B(t)]^T > 0 \quad (7)$$

여기에서 $S_0 = (SB)^{-1}S$. 만약 $\|S_0 \Delta B(t)\| \leq \gamma < 1$ 이면 다음 부등식이 만족된다.

$$[I + S_0 \Delta B(t)][I + S_0 \Delta B(t)]^T \geq I - \gamma^2 I > 0 \quad (8)$$

그러므로 $\|S_0 \Delta B(t)\|^2 \leq \rho_B^2 \|S_0\|^2 < \gamma^2$ 가 만족되면 (7)식은 성립한다, 즉 다음이 만족되면 (7)식은 성립한다.

$$\rho_B^2 S_0 S_0^T < \gamma^2 I < I \quad (9)$$

보조정리 1은 (3), (4) 그리고 (6)이 다음 부등식들이 성립함을 보장한다.

$$0 < \frac{1}{d_1} I < X < d_2 I \quad (10)$$

$$\frac{\rho_B^2}{2} (d_1^2 + d_2^2) (B^T B)^{-1} < \gamma^2 I < I \quad (11)$$

결국 (10), (11) 그리고 보조정리 2를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\rho_B^2 S_0 S_0^T \leq \rho_B^2 (B^T X^{-1} B)^{-1} B^T X^{-2} B (B^T X^{-1} B)^{-1}$$

$$< d_1 \rho_B^2 (B^T X^{-1} B)^{-1} < \rho_B^2 d_1 d_2 (B^T B)^{-1}$$

$$\leq \frac{\rho_B^2}{2} (d_1^2 + d_2^2) (B^T B)^{-1} < \gamma^2 I < I \quad (12)$$

위 부등식은 (7)과 (9)가 성립함을 의미한다. 즉 P1이 성립함을 의미한다.

(5)에 주어진 S 가 P2를 만족시킴을 보이겠다. [12]의 방법을 사용하여 슬라이딩 평면 $Sx=0$ 에 구속된 슬라이딩 모드 동역학이 다음처럼 주어짐을 우선 보이겠다.

$$\dot{v}_1 = (\Phi^T X \Phi)^{-1} \Phi^T [I - \Delta B(t)] [I + S_0 \Delta B(t)]^{-1} S_0 [A + \Delta A(t)] X \Phi v_1 \quad (13)$$

여기에서 $v_1 = (\Phi^T X \Phi)^{-1} \Phi^T x$, $S_0 = (SB)^{-1}S = (B^T X^{-1} B)^{-1} B^T X^{-1}$ 이다. 그리고 적절한 리아푸노프 함수를 이용하여 (13)이 점근

적으로 안정함을 보이겠다. 다음처럼 변환 행렬 M 과 이와 연관된 벡터 v 를 정의하자.

$$M = \begin{bmatrix} (\Phi^T X \Phi)^{-1} \Phi^T \\ (B^T X^{-1} B)^{-1} B^T X^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ S_0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Vx \\ S_0 x \end{bmatrix} = Mx \quad (14)$$

(14)는 $v_2 = (SB)^{-1}\sigma$, $M^{-1} = [X\Phi, B]$ 가 성립함을 의미한다. (14)의 변환행렬을 사용하면 (1)식은 다음처럼 고쳐 써 질 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ (SB)^{-1}\dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A_{11}} & \overline{A_{12}} \\ \overline{A_{21}} & \overline{A_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ (SB)^{-1}\sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V\Delta B(t) \\ I + S_0\Delta B(t) \end{bmatrix} [u + f] \quad (15)$$

여기에서 $\overline{A_{ij}}$ 는 다음처럼 정의된다.

$$\overline{A_{11}} = V[A + \Delta A(t)]X\Phi, \quad \overline{A_{12}} = V[A + \Delta A(t)]B \\ \overline{A_{21}} = S_0[A + \Delta A(t)]X\Phi, \quad \overline{A_{22}} = S_0[A + \Delta A(t)]B$$

[12]에 주어진 방법에 의해 등가 제어 u_{eq} 가 다음처럼 정의됨을 보일 수 있다.

$$u_{eq}(t) = -[I + (SB)^{-1}S\Delta B(t)]^{-1}(SB)^{-1}S[A + \Delta A(t)]x(t) - f(t)$$

[12]에 주어진 등가 제어 방법에 따라 (15)식에서 $\dot{\sigma} = \sigma = 0$ 로 놓고 $u_{eq}(t)$ 를 $u(t)$ 를 대입하면 슬라이딩 평면 $Sx = 0$ 에 구속된 슬라이딩 모드 동역학이 (13)처럼 주어짐을 알 수 있다. (13)의 슬라이딩 모드 동역학은 다음 리아푸노프 부등식을 만족시키는 양한정 행렬 $P_0 \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ 이 존재하면 안정하다.

$$P_0 \overline{A_{11}} + \overline{A_{11}}^T P_0 < 0 \quad (16)$$

여기에서 $\overline{A_{11}}$ 은 다음처럼 정의된다.

$$\overline{A_{11}} = (\Phi^T X \Phi)^{-1} \Phi^T [I - \Delta B(t)] [I + S_0 \Delta B(t)]^{-1} S_0 [A + \Delta A(t)] X \Phi$$

$P_0 = \Phi^T X \Phi$ 라고 하자. 그러면 $P_0 > 0$ 이고 (16)식은 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$\Phi^T (AX + XA^T) \Phi + \Phi^T [\Delta A(t) X + X \Delta A^T(t)] \Phi - \Phi^T \Gamma(t) S_0 [A + \Delta A(t)] X + X [A + \Delta A(t)]^T S_0^T \Gamma^T(t) \Phi < 0 \quad (17)$$

여기에서 $\Gamma(t) = \Delta B(t) [I + S_0 \Delta B(t)]^{-1}$ 이다. 한편 보조정리 2는 $\|\Delta A(t)\| \leq \rho_A$ 를 만족시키는 임의의 불확실성에 대해 다음 부등식들이 항상 성립함을 의미한다.

$$\Phi^T [\Delta A(t) X + X \Delta A^T(t)] \Phi \leq d_0 \Phi^T \Phi + \rho_A^2 \frac{1}{d_0} \Phi^T X^2 \Phi \quad (18)$$

$$-\Phi^T \Gamma(t) S_0 [A + \Delta A(t)] X \Phi - \Phi^T X [A + \Delta A(t)]^T S_0^T \Gamma^T(t) \Phi \\ \leq \Phi^T \Gamma(t) S_0 S_0^T \Gamma^T(t) \Phi + \Phi^T X [A + \Delta A(t)]^T [A + \Delta A(t)] X \Phi \quad (19) \\ \leq \Phi^T \Gamma(t) S_0 S_0^T \Gamma^T(t) \Phi + \Phi^T X \left[-\frac{1}{1-\delta} A^T A + \frac{1}{\delta} \rho_A^2 I \right] X \Phi$$

여기에서 $d_0 > 0, 1 > \delta > 0$ 이다. (8)과 (12)는 $\|\Delta B(t)\| \leq \rho_B$ 를 만족시키는 임의의 불확실성에 대하여 다음 부등식이 성립함을 의미한다.

$$\Phi^T \Gamma(t) S_0 S_0^T \Gamma^T(t) \Phi \\ = \Phi^T \Delta B(t) [I + S_0 \Delta B(t)]^{-1} S_0 S_0^T [I + S_0 \Delta B(t)]^{-T} \Delta B^T(t) \Phi \\ \leq \frac{\gamma^2}{\rho_B^2} \Phi^T \Delta B(t) [I + S_0 \Delta B(t)]^{-1} [I + S_0 \Delta B(t)]^{-T} \Delta B^T(t) \Phi \quad (20) \\ \leq \frac{\gamma^2}{\rho_B^2 (1 - \gamma^2)} \Phi^T \Delta B(t) \Delta B^T(t) \Phi \leq \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} \Phi^T \Phi$$

그러므로 (19)식은 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$-\Phi^T \Gamma(t) S_0 [A + \Delta A(t)] X \Phi - \Phi^T X [A + \Delta A(t)]^T S_0^T \Gamma^T(t) \Phi \\ \leq \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} \Phi^T \Phi + \frac{1}{1 - \delta} \Phi^T X A^T A X \Phi + \frac{1}{\delta} \rho_A^2 \Phi^T X^2 \Phi \quad (21)$$

(18)과 (21)식은 LMI (3), (4), (6)과 아래의 부등식을 만족시키는 해 $(X, d_0, d_1, d_2, \delta, \gamma)$ 가 존재하면 (17)식이 만족됨을 의미한다.

$$\Phi^T (AX + XA^T + d_0 I + \frac{1}{d_0} \rho_A^2 X^2 + \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} I) \Phi \\ + \Phi^T \left(\frac{1}{1 - \delta} X A^T A X + \frac{1}{\delta} \rho_A^2 X^2 \right) \Phi < 0 \quad (22)$$

보조정리 1을 사용하면 (22)식은 LMI (2)로 고쳐 쓰일 수 있음을 알 수 있다. 결국 X 를 LMI (2)-(4)를 만족시키는 해라고 할 때 $P_0 = \Phi^T X \Phi > 0$ 가 리아푸노프 부등식 (16)을 만족시킴을 알 수 있다. 이는 슬라이딩 모드 동역학 (13)이 점근적으로 안정함을 의미한다. $\nabla \nabla \nabla$

주 1 : LMI (2)-(4)는 [8]의 LMI Control Toolbox와 같은 다양한 최적화 알고리즘을 통해 매우 효율적으로 해의 존재 유무를 쉽게 판단할 수 있고 해가 존재하는 경우 손쉽게 해를 구할 수 있다. 결국 대규모 시스템의 경우에도 제안된 방법을 사용하면 쉽게 슬라이딩 평면을 구할 수 있다.

주 2 : 다음의 스위칭 궤환 제어기 (23)를 사용한다고 하자.

$$u(t) = -\frac{p(t)}{1 - \gamma} \frac{(SB)^{-1}\sigma}{\|(SB)^{-1}\sigma\|} \quad (23)$$

여기에서 ϵ 은 양수이고 $p(t)$ 는 다음처럼 정의된다.

$$p(t) = \epsilon + \|(SB)^{-1} S A x\| + \rho_A \|(SB)^{-1} S\| \cdot \|x\| + (1 + \gamma) \rho_f(t)$$

그러면 정리 1의 증명과정을 참고하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\sigma^T (SB)^{-T} (SB)^{-1} \dot{\sigma} = \sigma^T (SB)^{-T} [S_0 A x + S_0 \Delta A(t) x + S_0 \Delta B(t) [u + f(t)]] \\ + \sigma^T (SB)^{-T} [u + f(t)] \\ \leq \|(SB)^{-1}\sigma\| [\|S_0 A x\| + \rho_A \|S_0\| \cdot \|x\| + \frac{\gamma}{1 - \gamma} p(t) + (1 + \gamma) \rho_f(t)] \\ - \frac{1}{1 - \gamma} p(t) \|(SB)^{-1}\sigma\| \\ \leq -\epsilon \|(SB)^{-1}\sigma\| < 0$$

결국 [12]의 정리 8에 의하여 $Sx = 0$ 은 광역적으로 reachable하고 (1)과 (23)의 폐회로 응답은 광역적으로 안정함을 알 수 있다. 다음과 같이 크기가 제한된 제어기들은 폐회로 응답을 국부적으로 안정화시킬 것이다.

$$u(t) = -\rho_0 \frac{(SB)^{-1}\sigma}{\|(SB)^{-1}\sigma}$$

$$u(t) = -(SB)^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \text{sign}(\sigma_1) \\ \vdots \\ \rho_m \text{sign}(\sigma_m) \end{bmatrix} = -(SB)^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \text{sign}(S_1 x) \\ \vdots \\ \rho_m \text{sign}(S_m x) \end{bmatrix}$$

여기에서 $\rho_0 > 0, \rho_i > 0$ 로 그 크기에 따라 안정영역의 크기가 변하는 설계변수이다. 그리고 S_i 는 슬라이딩 평면 행렬 S 의 i 번째 열을 의미한다.

주 3 : [7], [12], [13]과 거기에 주어진 참고문헌들에 주어진 전통적인 슬라이딩 평면 설계 방법들은 정합조건을 요구한다. [3-5],[9-11]에 주어진 LMI 기반 슬라이딩 평면 설계 방법들은 입력 행렬에 존재하는 불확실성이 정합조건을 만족시킨다는 가정 하에 제안되었다. [6]에 주어진 방법은 시스템행렬 뿐만 아니라 입력행렬에도 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성이 존재하는 시스템에도 적용 가능한 LMI 기반의 슬라이딩 평면 설계방법인데 다음 장의 수치적인 예제에서 보인 것처럼 같은 조건하에서 본 논문의 방법은 적용 가능한데 [6]의 방법은 적용이 불가능한 경우가 발생하여 [6]의 방법은 어느 정도의 보수성을 갖는다. 결국 이전의 논문들에서 주어진 충분조건들이 해가 존재하지 않는 경우에도 특히 [6]에서 제시된 LMI 충분조건이 해가 존재하지 않는 경우에도 본 논문에서 제시된 LMI 충분조건은 해가 존재하여 본 논문의 방법으로 슬라이딩 평면을 설계할 수 있어 기존의 충분조건들 보다 본 논문의 충분조건이 덜 보수적일 수 있으며 본 논문의 설계방법은 기존 방법들을 보완할 수 있다.

주 4 : (5)에 주어진 슬라이딩 평면의 공식은 부가적인 설계 구속조건을 다룰 수 있는 여유자유도를 제공한다. [2]와 [6]의 결과 그리고 (16)식은 다음 리아푸노프 행렬식을 만족시키는 양한정행렬 P_0 가 존재하면 슬라이딩 모드 동역학의 α 안정성이 보장됨을 의미한다.

$$P_0 \bar{A}_{11} + \bar{A}_{11}^T P_0 + 2\alpha P_0 < 0 \quad (24)$$

정리 1의 증명과정을 참조하여 만약 (2)를 아래의 LMI (25)로 대체하여 LMI (3), (4), (25)를 만족시키는 해 X 를 사용해서 (5)의 공식으로 슬라이딩 평면을 설계하면 슬라이딩 모드 동역학의 α 안정도가 보장됨을 쉽게 보일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \phi^T(A_X + XA^T + 2\alpha X + d_0 I)\phi & * & * & * & * & * \\ \gamma\phi & -I & \gamma I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I & -I & 0 & 0 & 0 \\ AX\phi & 0 & 0 & -(1-\delta)I & 0 & 0 \\ \rho_A X\phi & 0 & 0 & 0 & -d_0 I & 0 \\ \rho_A X\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta I \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

4. 수치적 예

[6]에서는 다음과 같은 시스템행렬 뿐만 아니라 입력행렬에도 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성이 존재하는 시스템에 대하여 기존의 방법들을 사용해서는 슬라이딩 평면의 설계가 불가능하지만 [6]의 방법으로는 가능함을 보였다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_A = \rho_B = 0.1, \rho_f(t) = 0 \quad (26)$$

$\|\Delta A(t)\|, \|\Delta B(t)\|$ 의 크기가 (26)의 3배인 경우를 고려해보자. 즉 다음의 자료를 갖는 시스템 (1)을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_A = \rho_B = 0.3, \rho_f(t) = 0 \quad (27)$$

불확실성이 $\|\Delta A\|/\|A\| \approx 18.5\%, \|\Delta B\|/\|B\| \approx 21.2\%$ 를 만족시켜 적지 않음을 알 수 있다. (27)의 경우에 [6]에서 주어진 조건의 해는 존재하지 않아 결국 [6]의 방법으로 슬라이딩 평면을 설계할 수 없다. 본 논문에서 제안된 방법을 사용하면 다음과 같이 LMI (2)-(4)의 해를 구할 수 있다.

$$X = \begin{bmatrix} 0.6438 & 0.1168 & 0.0037 \\ 0.1168 & 0.7380 & -0.0364 \\ 0.0037 & -0.0364 & 0.7820 \end{bmatrix}, d_0 = 0.1836, \quad (28)$$

$$d_1 = 1.8328, d_2 = 0.9906, \delta = 0.2206, \gamma = 0.4507$$

결국 (28)의 X 를 가지고 $N = (B^T X^{-1} B)^{-1}$ 로 하여 공식 (5)에 대입하여 다음의 슬라이딩 평면을 구할 수 있다.

$$\sigma = Sx = \begin{bmatrix} 0.5410 & 0.4590 & 0 \\ -0.0349 & 0.0349 & 1 \end{bmatrix} x \quad (29)$$

초기 조건이 $x_1(0) = -2, x_2(0) = 2, x_3(0) = 0$ 으로 주어지고 $\Delta A(t), \Delta B(t)$ 가 다음처럼 주어진다고 가정하자.

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} \zeta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 \end{bmatrix}, \Delta B(t) = \begin{bmatrix} \zeta_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

그림 1은 정합조건을 만족시키지 않는 불확실한 변수 ζ_0, ζ_1 이 $\zeta_0 = 0.3\sin 0.5t, \zeta_1 = 0.3\sin 5t$ 로 주어지고 다음의 뱀뱀 형태 제어기 (31)을 걸었을 때의 결과이다.

$$u(t) = -\frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (31)$$

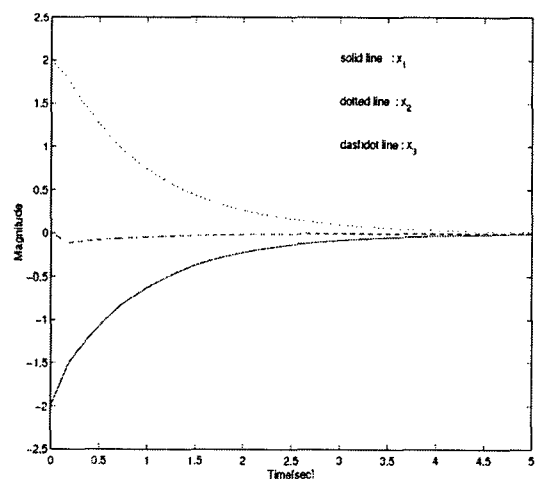


그림 1. 시뮬레이션 결과
Fig. 1. Simulation results

수치적인 시뮬레이션을 [8]의 LMI Control Toolbox를 이용해 더 실행하여 [6]의 조건은 $\rho_A = \rho_B > 0.2319$ 가 만족되면 해가 존재하지 않음을 발견했다. 그리고 본 논문에서 제안

된 방법은 $\rho_A = \rho_B > 0.3197$ 이 되어야 해가 존재하지 않게 됨을 발견했다. 본 논문에서 제안된 방법이 위의 예에서 보인 것처럼 어떤 경우에는 [6]의 방법보다는 덜 보수적일 수 있어 기존 방법들을 보완할 수 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 시스템행렬 뿐만 아니라 입력행렬에도 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성이 존재하는 시스템에도 적용 가능한 LMI 기반의 슬라이딩 평면 설계방법을 제안하였다. LMI를 사용하여 슬라이딩 평면이 존재할 충분조건을 유도하였고 LMI 충분조건을 해를 이용하여 슬라이딩 평면의 공식을 제시하였다. 제시된 LMI 충분조건은 기존의 조건들에 비해 덜 보수적일 수 있으며 제시된 방법으로 기존 방법들을 보완할 수 있음을 수치적인 예를 통하여 보였다.

참 고 문 헌

[1] A. Albert, "conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses," SIAM J. Appl. Math, vol. 17, pp. 434-440, 1969

[2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, PA:SIAM, 1994

[3] H.H. Choi, "A new method for variable structure control system design: A linear matrix inequality approach," Automatica, vol. 33, pp. 2089-2092, 1997

[4] H.H. Choi, "An explicit formula of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties," Automatica, vol. 34, pp. 1015-1020, 1998

[5] H.H. Choi, "On the existence of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties," Automatica, vol. 35, pp. 1707-1715, 1999

[6] H.H. Choi, "Variable structure control of dynamical systems with mismatched norm-bounded uncertainties: An LMI approach," Int. J. Control, vol. 74, pp. 1324-1334, 2001

[7] R.A. DeCarlo, Zak, S.H. and Mathews, G.P., "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," IEEE Proc., vol. 76, 212-232, 1988

[8] P. Gahinet, Nemirovski, A. and Laub, A.J., LMI Control Toolbox User's Guide, Natick, MA: The MathWorks Inc., 1995

[9] R.H.C. Takahashi and P.L.D. Peres, " H_∞ design of switching surfaces for sliding modes control with nonmatching disturbances," In Proc. 36th IEEE Conf. Decision Contr., pp. 4046-4051, San Diego, USA, Dec. 1997

[10] R.H.C. Takahashi and P.L.D. Peres, " H_∞ design of switching surfaces for sliding mode control with non-matching disturbances," IEE Proc. Contr. Theor. Appl., vol. 145, 435-441, 1998

[11] R.H.C. Takahashi and P.L.D. Peres, " H_2 guaranteed cost-switching surface design for sliding modes with nonmatching disturbances," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 44, pp. 2214-2218, 1999

[12] V.I. Utkin, Variable structure systems with sliding modes," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 22, pp. 212-222, 1977

[13] V.I. Utkin and K.D. Yang, "Methods for constructing discontinuity planes in multidimensional variable structure systems," Autom. Remote Contr., vol. 39, pp. 1466-1470, 1978

[14] H.H. Choi, "An LMI-based switching surface design method for a class of mismatched uncertain systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 48, pp. 1634-1638, 2003

저 자 소 개



최 한 호 (崔 漢 浩)

1966년 8월 25일생. 1988년 서울대학교 제어계측 공학과 졸업. 1994년 한국과학기술원 전기및전자공학과 졸업(공학). 2003년~현재 동국대학교 교수
 Tel : 02-2260-3777
 Fax : 02-2275-6013
 E-mail : hhchoi@dongguk.edu