수자원 공학에서의 최적화 기법의 활용 (II)

김 승 권 |
고려대학교 산업시스템 정보공학과 교수
kimsk@korea.ac.kr

1960년대 초 부터 수자원공학에서의 최적화 기법은 상당한 기대 속에서 많이 활용되어 왔다. 최적화 모형은 시뮬레이션 모형에 비하여 상당이 많은 장점이 있음에도 불구하고, 기대한 만큼의 효과를 보지 못하고 있다. 그동안 실패한 사례도 많지만, 성공적인 사례도 많이 나오고 있다. 실패하는 이유는 개발자에게 더 많은 책임이 있지만, 모형에 대한 이해부족에 따른 사용자의 잘못도 있다. 최적화 모형은 장점도 있지만, 단점도 많으므로 그 한계를 확실히 이해하고, 개발자는 물론 사용자도 실제 활용에 많은 주의를 기울여야 한다. 무리하게 사용하게 되면 시뮬레이션 모형을 활용하는 것 보다 종종 못한 결과가 나올 수도 있다. 최적화 모형에 대한 이해를 돕기 위해서 부족하지만, 수자원 공학에서 최적화 모형의 활용에 관련된 내용을 세 번에 나누어서 정리해 본다.

Contents...

2. 최적화 기법의 소개

2.1 서론

수식의 사용을 최소화 해 달라고 하는 편집인의 요구를 수용하여 두 번째 소개하는 노트도 수식사용을 줄이고자 하였으나 내용 전개상 어쩔 수 없는 부분은 양해를 구한다. 최적화를 목표로 하는 모든 수학적 기법은 일반적으로 다음과 같은 수식으로 표현될 수 있는 문제를 풀어내는 기법이다.

$$
\begin{aligned}
&Min f(x)\\
&s.\ t.\\
&\left\{
\begin{array}{l}
g_1(x) \geq b_1,\\
g_2(x) \geq b_2,\\
\qquad \cdots\\
g_k(x) \geq b_k,\\
\qquad x \in S
\end{array}
\right\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

여기서 $f(x)$는 비용을 표시하는 목적함수이고, $\{g_k(x)\ for_k = 1,\ 2..\}$는 제약식들을 의미한다. 이 중에 목적함수나 제약식의 함수 형태가 비선형이면 비선형계획법으로, 그 중에서도 특히 문제가 순차적인 의사결정 유형이면 동적계획법 (Dynamic Programming)과 같은 최적화 기법을 사용하여 풀고, 각 함수가 선형으로 표시되면 선형계획법으로 풀어낸다. 여기서 미지수 x를 의사결정 변수(decision variable)라고 하는데, 이 변수들이 모두 정수 값으로 제약되면 정수계획법(Integer Programming)이 되고, 실수 변수에 일부 정수변수 제약이 혼재된 경우를 혼합정수계획(Mixed Integer Programming) 문제라고 한다. 여기서 일부 정수는 주어진 대안을 선택할지 말지를 결정토록 하기 위해 0 또는 1을 갖도록 제한되는 경우가 많다. 비선형의 문제는 구간별 선형화 기법을 활용하면 비선형 곡선의 형태에 따라서 선형계획법 또는 혼합정수 계획법을 활용해 풀 수 있다. 단일 최적해 문제의 경우 풀 수 있는 여러 가지 해법이 있지만, 최적화 기법 중 가장 대표적으로 많이 활용되는 선형 계획법을 중심으로 최적화 기법의 기초 개념을 간략하게 설명하고자 한다. 어떤 최적화 기법을 활용하건 최적해를 구하기 위해서는 비선형 계획법의 Kuhn-Tucker 필요조건 (선형계획의 경우는 dual feasible조건에 이르게 된다.) 을 만족하도록 구현하게 되어 있다. 그리고 선형계획처럼 convexity 조건에 합당한 문제일 경우는 Kuhn-Tucker 조건을 만족시키도록 구한 해가 항상 최적해가 된다.

선형계획을 푸는 기법으론 심플렉스법 (simplex algorithm), 이나 내부점 기법 (interior point algorithm) 등이 있는데, 내부점 기법은 제약식의 개수가 대략 3-5만을 넘는 대형 문제에 적합하고, 제약식 형태에 따라 달라지지만, 대략 4만개 이내라면 심플렉스법 (simplex algorithm)으로도 충분하다. 따라서 심플렉스 기법을 중심으로 최적화 기법의 중심 내용을 설명한다. 심플렉스 해법은 선형계획문제의 최적해를 해석적으로 구하는 해법으로서 1947년 G. Dantzig에 의하여 개발된 해법이다. 이 해법을 이용하여 실제적인 문제의 답을 구하려면 컴퓨터 프로그램화 하여야 하는데 이미 그 같은 프로그램들은 수없이 많이 개발되어 왔고 ILOG CPLEX, LINDO, Express-MP, GAMS 등 상용 프로그램들도 다수이다. 심지어는 Microsoft EXCEL과 같은 사무용 스프레드시트 프로그램들에도 기본 기능으로 내장하고 있어 선형계획 문제의 해를 간편하게 구할 수 있으며, EXCEL 환경에서도 수천 개의 변수와 제약조건식을 가진 문제까지 다룰 수 있는 Add-in (LINDO 사의 What's Best!, Frontline Systems의 Premium Solver 등)이 다수 나와 있다. 그러나 심플렉스 해법에 대한 이해가 수반되지 않으면, 애초에 잘못이 모형수립자에게 있더라도, 상용화된 컴퓨터 프로그램이 제시한 최적해를 맹신하여 실제는 잘못된 결과임에도 그것이 틀린 해 임을 인식하지 못할 위험도 있다. 그러므로 심플렉스 해법의 기본원리를 충분히 이해하는 것은 최적해의 속성을 알고 선형계획법을 정확하게 활용하기 위해 아주 중요하다.

2.2 최적화의 장점과 한계

선형계획법은 목적함수와 제약식들이 모두 선형이므로 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} & Min f(x)=C^T X \\ & s.\ t. \\ & \left\{ \begin{matrix} AX=b,\ C,\ X \in R^n,\ b \in R^m \\ A:\ m \times n\ matrix,\ X \geq 0 \end{matrix} \right\} \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $AX=b$로 표시한 것은 제약식을 벡터와 행렬로 간단히 표시한 것으로서, 고등학교때에 접하던 연립방정식을 연상하면 된다. 다만 우리가 고등학교에서 풀던 연립 방정식과 다른 점이 있는데 이것은 식의 개수(m)가 의사결정 변수의 개수(n) 보다 훨씬 적다는 것이다. 따라서 연립방정식의 해의 측면에서 볼 때, 정방행렬을 가진 연립방정식의 해를 구하는 문제가 아니다. 선형계획에서 다루는 연립방정식의 해의 개수는 유한하지만 무수히 많다. 선형계획법은 기본

적으로 다수의 연립방정식의 해에서 의미가 있는 방식으로 추려낸 최대, ${}_nC_m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 가능해로부터 최적해를 찾아내는 기법이다. 그러므로 심플렉스법(Simplex algorithm)은 선형 연립방정식의 해법을 활용한다. 그리고 심플렉스 알고리즘을 시작하기 위해서는 초기 가능해가 있어야 하며, 따라서 연립방정식의 해를 구할 수 있도록 우변 항이 특별한 조건을 만족시켜야 한다. 따라서 풀고자 하는 모형이 그 조건을 만족시키지 못하면 그에 맞도록 변형시켜 주어야 한다. 이렇게 변형시킨 후의 모형을 표준형(standard form)이라 부른다. 이를 어떤 교과서에서는 augmented form 이라고 부르기도 한다. 심플렉스 해법으로 선형계획의 최적해를 구하는 과정을 쉽게 추적하기 위하여 흔히 심플렉스 표를 사용하기도 한다. 연립방정식 해법을 활용하여 대수적으로 해를 구하기 위하여는 심플렉스 해법이 요구하는 형태로 문제를 변형시켜야 한다. 해법이 요구하는 형태는 우선, 1) 모든 제약식의 우변상수는 0 보다 커야한다. 2) 모든 제약식은 연립방정식의 해법을 활용하기 적합하게 등식의 형태를 갖추어야 한다. 3) 모든 결정변수는 비음 조건이 유지되어야 한다. 4) 모든 제약식들은 서로 선형 독립적이어야 한다. 여기서 네 번째 조건의 의미는 제약식들로 구성된 연립방정식에 식의 개수와 같은 차원의 항등 행렬(B)이 존재해야 함을 의미한다. 즉, det(B) = 0 이고 b ≠ Ø인 경우, $AX=b$ 를 $AX=(B\colon N)$, $X=\binom{X_B}{X_N}$ 라고 놓을 수 있고, $AX=(B\colon N)\binom{X_B}{X_N}=b$ 로 놓으면 $BX_B+NX_N=b$에서 $BX_B=(b-NX_N)$이 되고 $X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$로 단순히 정의하여 연립방정식 해법을 활용할 수 있게 된다.

• 연립방정식 해를 이용한 심플렉스 해법의 단계별 과정

심플렉스 방법은 반복적인 해법이다. 우선 실행 가능한 초기해를 구한 후에 그를 기점으로하여 더 나은 해가 더 이상 없다고 판단 될 때까지 점점 나은 해로 발전시켜가는 증분 분석적 방법으로써 매 반복 단계마다 연립방정식의 해법을 사용하여 가능해를 찾아낸다. 기하학적으로는 가능해 구역의 하나의 꼭지점에서 시작하여 다른 꼭지점으로 이동해가는 것이고, 대수적인 측면에서 보면 연립방정식의 무한히 많은 해 중 독립적인 변수가 0 값을 갖고(Nonbasic) 그에 따른 종속적인 변수의 값(Basic)이 비음인 해들만을 찾아 더 이상 더 좋은 해가 없다는 판단이 설 때까지 반복적으로 연립 방정식의 해를 변경시켜가는 해법이다. 한마디로 요약하면, 선형계획법에서는 일단 구해진 가능 해(feasible solution)를 중심으로 기저변수(basic variable)를 선정하여 단위 증가분에 따른 목적함수 값에의 기여도를 산정하고, 목적함수 값에의 기여가 최대로 될 때 까지 증가시켜서 새로운 가능해를 구하고, 최종적으로 더 이상 증분 편익 또는 순비용 (reduced cost)이 발생하지 않을 때까지 기저변수를 바꾸어 가며 최적 해를 구한다. 편의상 퇴화해(degenerate solution) 가 존재하지 않고, 위식에 제시된 최소화(MIN)를 기준으로 할 경우, 심플렉스 해법의 단계별 과정은 다음과 같다.

단계 0 : (기본형으로 바꾼다.) 우선 주어진 문제의 연립방정식의 해를 구하기 쉽게 규범형(canonical form)의 문제로 바꾼다.

즉 제약식을 $AX=(B\colon N)\binom{X_B}{X_N}=b$로 놓을 수 있게 한다.

단계 1 : (초기해를 구한다.) 초기 가능해를 구성할 연립 방정식의 기저(basis)를 찾아서 초기해를 구성해본다. 연립방정식의 해를 구할때 Gauss-Jordan(G-J) 법을 사용하는데 여기서도 G-J법을 적용하여 종속변수 X_B와 독립변수 X_N로 구분하여 독립변수인 X_N을 비기저변수(NBV: Nonbasic Variable)로 하여 $X_N=0$으로 할 때, 기저변수(BV:Basic Variable) X_B들이 취하는 연립방정식의 특수해 $X_B=B^{-1}b$를 구하고 초기 가능해라고 부른다. 이 초기 가능해에 대한 목적함수 값 $f(x)=CX=C_BX_B$도 계산해둔다.

단계 2 : (최적 여부를 판정) (단계 1)에서 찾은 비기저변수(NBV) X_N을 구성하는 요소 중 어떤 요소 값을 0으로 부터 증가시키고자 할 때, 어떤 X_{Nj}를 증가

시킴이 목적함수 값을 가장 많이 개선시킬 수 있는 변수인지를 알아본다. 개선의 여지가 있으면, (단계 3)으로 간다. 그러나 만약에 어떤 비기저 변수 X_{Nj}를 증가시키더라도 목적 함수의 값을 개선시킬 수 없다는 것이 판명되면 (모든 비기저 변수들의 $C_j-Z_i=C_{Ni}-C_BB^{-1}N_j$값이 음수가 하나도 없다면 : Min의 경우를 상정) 더 이상 반복 계산을 그친다. 현재의 연립방정식의 해 $X=\binom{X_B}{X_N}$,

즉 $\begin{pmatrix} X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N \Rightarrow B^{-1}b \\ X_N=\varnothing \end{pmatrix}$ 가 최적해이다.

단계 3 : (진입변수(entering variable) X_{Nj}의 결정)

(단계 2) 에서 최적해로 판명이 되지 않았으므로 어떤 한 비기저 변수 X_{Nj}를 선택하여 될 수 있는 만큼 크게 증가시켜야 하는데, 되도록 이면 목적함수 값을 가장 크게 개선시키는 비기저변수, X^*_{Nj}를 (보통 비기저변수들 중에서 C_j-Z_j가 가장 큰 값을 취함) 진입변수(entering variable)로 선택한다.

단계 4 : (최소 비율법에 의한 탈락변수 X_{Bi}선택)

(단계 3)에서 선택된 비기저 진입변수를 취하여 증가 시키고자 할 때, 얼마나 크게 할 수 있을까를 결정해야하는데, 이때 기저변수 (BV:basic variable) $X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$이 가능해 구역에서 벗어나지 않도록 하는 비기저변수, X^*_{Nj}의 최대 증가분은 얼마나 되는가를 판단하는 단계이다. 이때의 조건은 비기저 변수를 일률적으로 증가시킴에 따라 영향 받는 연립방정식의 기저변수들 중 어떤 기저변수 $X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$값도 음의 값을 가지면 안된다 (nonnegativity constraint). 이는 (단계 3)에서 선택한 비기저 변수 X^*_{Nj}를 증가시킬 때 현 최적해를 구성하던 기저 변수 $X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$값들이 줄어들어 비기저변수로 되는데 이때 그 값들이 음의 값을 갖지 않을, 즉 가장 먼저 영의 값에 도달하게 되는 기저변수, X_{Bi}를 찾아서 탈락 변수로 삼고 동시에 (단계 3) 에서 구한 비기저 변수, X_{Nj}의 최대 증가량 (최소비율)을 구한다.

단계 5: (Pivot에 의한 기저(basis)의 변환)

(단계 3) 에서 선택한 비기저변수 X_{Nj}를 (단계 4) 에서 결정된 최대 증가 값만큼 증가시키면, 새로운 가능해 $\overline{X_B}$가 생성되는데 이 과정을 pivoting이라고 부른다. 그리고 이 새로운 가능해를 구성하는 벡터 축들을 새로운 기저(basis)라고 하고 기저들로 이루어진 정방행렬을 기저행렬(B) 이라고 한다. 이때 현재의 가능해를 이루는 기저(basis)에서 새로운 기저(basis)로 변경될 때 한 변수, (즉 기저행렬 중 한 열만) 바뀌게 되는데 바뀔 변수를 탈락변수(leaving variable)라 하고 새로 들어올 변수를 진입변수(entering variable)이라고도 한다. pivoting에 의해 구한 새로운 가능해 $\overline{X_B}$를 가지고 (단계 2) 로 돌아가서 위의 단계를 반복 수행한다.

•선형계획 모형의 장점 및 한계

기본적으로는 1)입력자료 값들이 확실하게 알려져 있어야 한다는 것과 (확실성), 2)의사결정 변수 값이 한 단위 증가 또는 감소함에 따라서 계수들이 표시하는 일정한 비율로 증가 또는 감소하여 변하며(비례성), 3)목적함수나 제약식이 각 항의 합으로만 이루어진다는 것(가산성), 4) 모든 의사결정 변수 값들이 분수로도 표시가 가능하다는 것이다 (분할가능성). 이 같은 가정들은 모형을 수립해야 하는 현실적 관점에서 볼 때 선형계획 모형의 큰 단점들이라 할 수 있다. 그러나 해를 구하는 관점에서 볼 때는 큰 장점으로 변하여 심플렉스 해법의 수립을 가능하게 하고, 제법 규모가 큰 문제도 빠른 시간 안에 쉽게 풀 수 있게 한다. 따라서 이 가정의 의미를 확실히 이해하여 모형 수립 시에는 선형계획의 단점이 잘 극복될 수 있도록 모형을 수립하고 분석하는 것이 필요하다. 그 이유는 우리가 분석하고자 하는 대상은 대개 비선형 특성을 나타내고 있으며, 경우에 따라서는 의사결정 변수간의 상관성 또는 상호 의존성으로 인하여 단순한 선형계획 문제로 해결하기 어려운 경우가 많이 존재하기 때문이다. 이 같은 현실 문제를 선형계획 모형으로 단순화 시켜 해석하면 현실과 동 떨어진 문제를 풀 가능성이 크다. 그럼에도 불구하고 선형계획법이 모형수립의 도구로서 크게 각광을 받는 것은 복잡한 의사결정 문제의 최적대안을 빠르게 제시해 주고 또한 의사결정 과정 및 시스템 전체에 대한 깊은 통찰력을

제공해주며, 현실에 근사한 모형 수립에 성공할 경우, 엄청난 경제적 이익과 생산성 향상을 얻을 수 있기 때문이다.

현실적인 문제를 세세하게 정확히 기술할 수 있는 모형은 없다고 보아도 과언이 아니다. 그러나 그렇다고 해서 모형을 통하지 않고는 현실적인 문제에 대한 과학적인 분석과 진단을 내릴 수 있는 방안은 없다. 모형이 정확해 지려면 모형이 점점 더 크고 복잡해지는 경향이 있다. 그러나 모형이 너무 복잡하면, 자료수집과 모형의 유지보수에 비용과 시간이 많이 든다. 그리고 세세하고 복잡하다고 해서 훌륭한 진단을 내릴 수 있는 것도 아니므로, 적당히 단순하면서도 현실적인 문제를 비교적 정확히 꿰뚫어 볼 수 있는 적절한 규모의 모형을 수립하여 분석하고, 미래 불확실성에 대처해야 한다. 좋은 모형이 되도록 위에서 제시한 네 가지 가정의 의미를 확실히 이해하여 모형 수립 시에는 선형계획의 단점이 잘 극복될 수 있도록 모형을 수립하여야 한다. 선형계획의 단점을 우회하여 극복할 수 있는 방안들은 항상 존재하고 있다. 그러므로 적절한 모형을 수립하여 해석한다는 것은 상당한 창의성과 큰 규모의 모형수립의 경험을 필요로 하는 하나의 기술(art)이라 할 수 있다. 즉, 선형계획 모형의 장점과 취약점을 잘 파악하고 이를 극복할 수 있는 다양한 모델링 기술에 대한 이해는 물론이고, 컴퓨터 소프트웨어 및 하드웨어의 기술적 동향도 잘 파악하고 있어야 하고, 수학적 모형에 대한 확실한 이해로부터 비롯되는 모형수립의 경험과, 응용 대상 분야에 대한 경험적 이해에서 비롯되는 통찰력과, 창의성이 필요하다. 그렇게 하는 것이 주먹구구식의 대처보다는 손실로부터 노출될 기회비용을 줄이고 생산성을 향상시키는 방법이 될 것이다. 적절한 모형을 수립하여 해석하고, 진단 및 처방을 한다는 것은 현실적인 문제를 정의하고 파악하고 모형을 수립하고 분석하는 것뿐만 아니라, 그 작업을 지원할 사람들을 설득하고, 자료정리 및 소프트웨어 구축 등에 필요한 다양한 전문가를 동원하여 이루어내야 하는 조직적 지원 (teamwork)이 필요한 일이다. 그러므로 무엇보다도 중요한 것은 다양한 전문가들로부터 능동적인 기여를 이끌어내고, 조직 내에서 모형이 추구하는 비전을 구상화 시켜야 하는 리더십일 것이다.

본고에서는 수학 모형의 성공을 위한 여러 필요조건 중에 선형계획 모형의 취약점을 극복할 수 있는 모델링 기술에 초점을 두고, 이를 해결할 수 있는 방법을 소개하고자 한다. 이를 위해 모형 적용을 위한 실제 상황이 단일 목적에 의한 최적화와는 달리 여러 상충되는 기준이나 목적들 간의 타협과 조정을 필요로 하고, 모형의 입력 자료가 불확실한 정보에 크게 의존하는 점을 감안하여, 다기준/다목적 의사결정과 불확실성을 고려한 최적화 기법의 개념을 소개한다.

2.3 다기준, 다목적 의사결정과 최적화

최적화 방식으로 구해진 해는 대체로 시뮬레이션 결과에 비해서 부자연스럽고 유연하지 못하다. 그 이유는 단일 목적 최적해의 비타협적 특성과 선형모형 해법에 내재된 한계에 기인한다. 즉 모형에서 활용된 목적함수와 제약식이 얼마나 보편타당하게 구성되어 있는가에 많은 영향을 받는다. 특히 목적함수의 계수는 단위 의사결정 요소 당 소요되는 비용 또는 이득을 나타내므로 전체 프로젝트 수행의 한계비용을 결정짓는데 큰 영향을 미친다. 그리고 최적해가 목적함수 계수에 대체로 민감하므로 여러 OR (Operations Research) 참고서에서는 사후 민감도 분석으로 보완하는 방식을 제시하고 있다. 그러나 현실적 문제에서는 변수가 많아서 민감도 분석만으로는 전체적인 모형의 경향을 파악하기 어렵다. 그러므로 신빙성 있고, 정확한 자료를 구하기 어려울 경우엔, 비용이나 이득 중심으로 단일 목적함수를 구성하는 것 보다는 보다 객관적인 지표를 얻기 쉬운 시스템의 기능적 효율을 최대화 하는 다중 목적함수로 구성하여 열등하지 않은 해(non-inferior solution), 즉 다른 목적(또는 기준)을 희생시키지 않고는 어느 하나의 목적(또는 기준) 값을 개선시킬 수 없는 파레토 최적해(Pareto-optimal solution)로 구성된 프런티어

(Pareto-frontier)를 구한 연후에 이 해들 간의 경제적 이득을 사후 비교해 최적 대안을 선정하는 것이 낫다. 즉 사후에 따로 민감도 분석을 통하는 것 보다는 다중목적 분석을 통하여 전체적인 모형의 경향을 파악하면서 최선의 해를 구하는 것이 현실적인 방법이라고 생각된다. 이것은 OR 교과서에서 채택하고 있는 표준 방식은 아니지만, 최적화 모형을 활용하면서 경험으로 얻어진 생각이다.

한편, 다중목적 분석을 통해 구한 파레토 최적해는 대개 그 수가 많기 때문에 정해진 평가 기준에 따라 추가로 선별되어야 한다. 이때 의사결정자가 갖는 평가 기준이 약간 모호하여 “a가 b보다 나쁘지 않다” 등의 유사기준(pseudo-criteria)으로 선호 관계로 나타내어야 한다면, ELECTRE나 PROMETHEE 같은 다기준 의사결정기법을 활용하여 선택할 수 있다.

수자원 문제의 경우 의사결정자 간의 합의를 위한 다기준 ‘그룹’ 의사결정 기법의 활용 여지가 매우 크다. 일반적인 수자원 문제는 다양한 주체와 집단이 영향을 받으므로 최종 의사결정에 이르기 위해서는 서로 다른 기준을 가진 주체들 간에 의견 절충이 이루어져야 하고, 이 경우도 다양한 파레토 최적해들 중에서 의견 절충을 이루어 동의를 이끌어내는 것이 좋을 것이다. 의사결정자들 간에 평가 기준 선택에 의견의 일치를 보기 어려운 경우가 있다면, 각 의사결정자들의 주관적인 평가를 효율적으로 수렴시켜 합의안을 찾는 여러 가지 그룹의사결정 기법을 활용한다 (조남웅 등 2006). 그리고 다 기준 그룹의사결정도 개념적으로 볼 때 각 목적(또는 기준)들이 모두 고려된 파레토 최적해에 버금가는 대안을 구하는 것이 바람직하다. 이상을 종합해 볼 때 파레토 프런티어를 구성하는 과정 뿐 아니라, 파레토 프런티어 상에서 의사결정자의 평가 기준에 따라 최선의 해를 선별하는 다기준 의사결정, 그리고 다른 기준을 가진 이해당사자들 간에 의견 절충을 위한 그룹 의사결정의 과정에도 그 중심에는 파레토 최적해가 있다고 볼 수 있다.

•열등하지 않은 해, 파레토 최적해, 효율적인 해의 속성

다기준 의사결정 문제는 개념적으로 다중 목적 최적화 문제와 비슷하다. 따라서 다기준 의사결정 문제에서 구할 최선의 대안은 다중 목적 최적해인 파레토 최적 해에 비견된다. 따라서 파레토 최적해의 속성을 이해하는 것이 중요하다.

$$\begin{aligned}
&Max\ Z_1 = x_1 + 2x_2 \\
&Min\ Z_2 = 3x_1 + 2x_2 \\
&st.\quad 2x_1 + 6x_2 \le 27 \\
&\qquad\ 8x_1 + 6x_2 \le 45 \\
&\qquad\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\
&\qquad\ x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned} \tag{3}$$

x_1, x_2 *are in integers.*

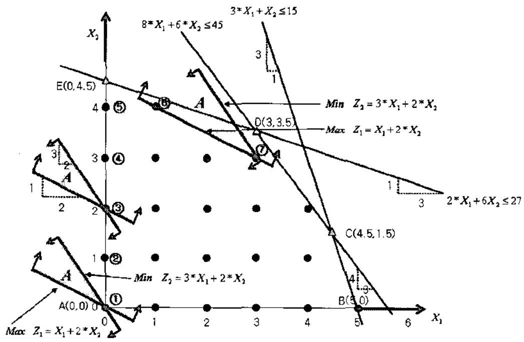

그림 1. 다중 목적 문제의 해공간에서의 가능해

일반적인 다중 목적 의사결정 문제의 목적함수는 여럿 이므로 다음과 같은 벡터함수로 $F(x) = \{f_1(x)=z_1,\ f_2(x)=z_2,\ \cdots,\ f_k(x)=z_k\}$로 표시되고, 최적화 문제는 벡터 최적화 문제로 정의 된다. 다중 목적 문제에서 고려되는 목적들을 모두 만족시키는 최적해를 구한다는 것은 매우 어려운 문제이다. 왜냐하면, 다중 목적 문제에서는 개개의 목적들에 대한 최적 해를 구한다 하더라도 각 목적들 간에 서로 영향을 끼치고 있고, 이 목적들 간의 우선순위를 정할 수 없는 경우가 많기 때문이다. 따라서 모든 목적들에 대해서 최적 해는 아니더라도 각 목적들이 모두 고려된 ‘열등하지 않은 해’, 즉 다른 목적 값을 희생시키지 않고는 어느 하나의 목적 값을 개선시킬 수 없는 파레토 최적

해를 구하여 해결한다. 파레토 최적 해를 구하는 방식은 가중합계법 (Weighted-sums Method), 제약식법(Constraint method), Normal Boundary Intersection 기법, Interactive Weighted Tchebycheff 기법, Convex hull of individual maxima based Interactive Tchebycheff 기법, 그리고 유전자 해법 등을 활용한 Evolutionary Algorithm등등 장단점이 각기 다른 여러 가지 방법이 있으나 여기서는 지면제약 상 설명은 생략하고, 파레토 최적해의 속성을 살펴보는 것으로 대신한다. 관심이 있는 사람은 Steuer(1986) 의 참고서 와 Kim & Kim (2006)를 권한다. 파레토 최적해의 개념을 보다 쉽게 이해하기 위해서, 위에 소개된 목적함수가 2개인 다중 목적 문제를 고려해 보자. 하나는 최대화 시키는 Z_1 목적이고, 다른 하나는 최소화 시키는 Z_2 목적이다. 그리고 이 문제의 가능해는 정수해이어야 하므로 그림1의 일상한에 나타난 검은 점들이 가능해들이다. 검은 점들 중에서 두 가지의 서로 다른 목적을 모두 최대한 만족시키는 가장 좋은 슈퍼 해(Super-optimal solution)는 없다. 다만 최선의 후보들만 있을 뿐이다. 그런데 그 들은 모두 북서쪽의 방향에 존재하게 된다. 왜냐하면 두 가지 목적이 한꺼번에 충족되는 부분은 꺾인 화살표로 표시된 고깔콘(cone) 안쪽 범위 A 가 되는데, 그 범위에 속하는 가능해는 항상 두 가지 목적을 모두 만족시키는 개선된 해가 되므로, 북서쪽 방향으로 전진해서 더 나은 최적 해를 찾아 나가게 되고, 결국 X_2축에 있는 ①, ②, ③, ④, ⑤ 번의 다섯 점들과 북단의 $(x_1+2x_2=Z_1)$ 식과 접하는 ⑥, ⑦ 번의 두 점에 이르게 될 것이기 때문이다. 이때 이 7개의 후보 점들이 파레토 최적해가 된다. 이 후보들 중에서 북단의 $(x_1+2x_2=Z_1)$ 식과 접하는 두 점 중에서 ⑦번 점 보다는 목적함수 값, Z_1은 같으면서 X_2축에 보다 근접하여 Z_2목적을 더 향상시키는 ⑥번 점이 더 낫다. 여기서 ⑦번 점은 효율적인 해이긴 하지만, ⑥번에 비해서 못하면서도 전체적으로 볼 때 열등하지 않은 해의 모습을 하고 있으므로, '미약하게 효율적인 해 (weakly efficient solution)' 또는 '미약한 파레토 최적해 (weakly Pareto optimal solution)' 라 부른다.

다중 목적 최대화 경우, "y∈S is weakly efficient if there does not exist another x∈S such that $c^i x > c^i y$ for all i."로 정의(Boyan and Gueorguieva, 2000) 되므로, 설정된 해 y가 어떤 목적에서는 같은 목적 값을 가지거나 더 나을 수 있을지언정, 모든 목적에서 모두 다 현재의 해를 능가하는 경우(strictly greater than)가 없다는 것은 어떤 목적에서는 y와 같을 경우도 있다는 것으로 ⑦ 번 점이 그런 해에 해당 된다. 이상의 설명은 (그림 2)와 같이 $MAX\ Z_1$과 $MAX\ Z_2$축으로 이루어지는 목적함수 공간에서도 비슷하게 설명이 된다. 단, 이때의 최적 고깔 콘의 각도는 Z_1과 Z_2축간 각도인 90도로 설명되는 것이 다를 뿐이다.

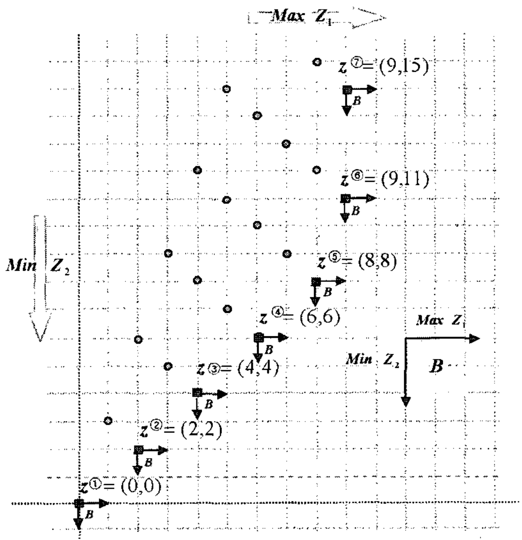

그림 2. 다중 목적 문제의 목적함수 공간에서의 파레토 최적해

2.4 불확실성과 최적화

수자원 공학에서 나타나는 대표적 불확실성의 원천은 유입량과 수요량의 예측, 또는 순 물소모량이나 회귀수량 추정 등으로부터 나온다. 그 중에서도 정확한 유입량을 예측하는 것은 불가능에 가까울 만큼 많

은 한계를 갖고 있다. 특히 효율적인 저수지군의 연계운영계획을 수립하기 위해서는 정확한 유입량 예측이 효율적 운영에 지대한 영향을 미치게 되므로 최적화 모형에서도 어떻게 하면 불확실성 요소를 줄이며, 효율적인 대안을 제시할 수 있을까에 대한 연구가 지속되어 오고 있다.

최적화 모형에 불확실성을 감안하는 대표적인 기법의 하나로 '기회 제약법 (chance constraint method)' 이 있다. 이 기법은 제약식을 만족시킬 확률적 신뢰도를 평가하는 기법으로써 기준 확률 변수의 빈도를 추정할 수 있다면, 확률모형에 대응되는 '확정적 선형 모형(deterministic LP)' 으로 변환이 가능하다. 그러나 우변항의 확률변수가 취할 다변량 빈도 함수가 log-concave 하지 않으면 non-convex 하게 되므로 최적 해를 구하지 못할 수도 있다는 단점이 있다 (Prékopa 1995). 그리고 앞으로 들어올 유입량이 과거자료로부터 추정된 확률 분포를 갖는다는 가정 하에 기대 값 최대화로 운영 계획을 수립하는 기존의 여러 추계학적 모형을 생각할 수 있다. 이를 위하여 유입량의 크기에 따라 취할 확률 분포를 몇 개 구간으로 나누어 이산 확률 값을 산정하고 기대 값이 최대가 되는 운영 방안을 도출하기도 하지만, 저수지 유입량 예측시 고려되어야할 지속성 효과 (Persistency Effect)와 유역 간 또는 지역별 시기별 공분산 효과(The joint spatial and temporal correlations) 등을 반영하는데 많은 한계가 있다. 이를 극복하기 위하여 과거자료 자체를 유입량 시나리오로 적용하여 시 · 공간적 상관관계를 유지하는 표본 추계학적(Sampling Stochastic)기법을 활용한 최적화 모형에 대한 연구가 활발히 진행 되어 왔으며 (Kelman et al., 1990; Faber et al., 2001), 표본 추계학적 동적계획 모형(SSDP)이 우리나라 금강 수계에 적용된 바 있다. 그런데 표본 추계학적 동적 계획 모형은 유입량의 불확실성과 비선형적 요소를 어느 정도 효과적으로 고려할 수 있기는 하지만, 동적계획법이 갖고 있는 많은 장점들 예를 들면, 비선형적 요소를 쉽게 고려하고, 알고리즘 내부에 시뮬레이션 모형을 내포시킬 수 있는 장점에도 불구하고, 'curse of dimensionality' 문제가 심각하여 현실적으로 복잡한 수자원 시스템에 적용하기에는 많은 한계가 있다. 물론 Colorado State 대학의 John W. Labadie 교수가 개발한 CSU-DP에서처럼 컴퓨터 메모리 할당 기술을 활용하거나, 증분동적계획법(Incremental DP) 같은 방식 또는 학습강화 방식 등을 활용하여 어느 정도 'curse of dimensionality' 의 문제를 완화 시킬 수는 있지만, 최적해 여부를 확신할 수는 없으므로 근본적인 해결책은 되지 못한다고 생각된다. 이에 반해서 선형계획법을 이용한 확률적 모형은 'curse of dimensiona-lity' 의 문제에서 자유롭다. 단지 비선형적인 요소나 조건부적인 제약을 얼마나 잘 선형계획의 틀로 구현할 수 있을지가 관건이다. 모형 수립 기술적 측면에서의 경험이 요구되긴 하지만, 비선형적인 요소는 구간별 선형화를 통하거나, Taylor 근사 함수를 활용한 반복계산 방식 등으로, 또한 조건부 적인 제약은 혼합정수계획법을 활용하여 훌륭하게 극복할 수 있다. 따라서 여기서는 유입량의 시-공간별 공분산 효과를 감안한 유입량 시계열을 시나리오로 적용한 표본 추계학적(Sampling Stochastic)기법을 기본으로 구성한 다단계 추계학적 선형계획(multi-stage sto- chastic linear programming) 모형 수립이 가능하다. 또한 모형수립 기술을 잘 발휘하면, 미국 기상청(NWS)에서 발생 가능한 유입량의 시나리오를 예측하는 방법인 앙상블 유량 예측(ESP, Ensemble Streamflow Prediction)을 통한 시나리오 적용을 가능하게 할 수도 있다. 따라서 2단계 및 다단계 추계학적 선형계획 모형에 대한 설명을 통하여 수공학과 최적화 기법에서 불확실성을 어떻게 고려할 수 있는지를 소개하고자 한다.

• 2단계 및 다단계 추계학적 선형계획모형

확률적 모형에 대응되는 2단계 추계학적 선형 계획 모형(Two-stage Stochastic Linear Programming with Recourse)의 구조는 다음과 같다. 2단

계 추계학적 선형 계획 모형은 시나리오에 따라 변하지 않는 1단계 변수(x)와 시나리오 마다 변하게 되는 2단계 변수(y_k)로 나뉠 수 있는데, 댐의 월별 저류 계획이 1단계 변수(x)에 해당하며, 각 시나리오별 방류량 및 흐름량은 2단계 변수가 된다. 각 저수지의 월별 저류 계획이 정해진 가운데 각 시나리오 별로 방류량을 결정하는 것을 Recourse라 한다. 이때 추계학적 선형 계획 모형은 모든 시나리오에 대하여 제약식을 만족시키는 것을 보장하지 못하는 "infeasibility" 문제를 해결하기 위하여 제약식을 지키지 못할 때 값을 갖는 제약식 위반변수 (I_k^+, I_k^-)에 벌점(penalty Cost; q_k)를 부과하여 다음과 같이 만든다.

$$
\begin{aligned}
& \min\ c^T x + \sum_{k=1}^{K} p_k w_k^T y_k + \sum_{k=1}^{K} p_k q_k^T (I_k^+ + I_k^-) \\
& \text{s.t. } Ax = b, \\
& \qquad T_k x + W y_k - I_k^+ + I_k^- = h_k,\ k = 1, \cdots, K; \\
& \qquad x \geq 0,\ y_k \geq 0,\ k = 1, \cdots, K.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Two-stage stochastic LP 와 Deterministic LP와의 근본적인 차이는 최적 해를 구할 때, 미래의 불확실한 요소를 확정적으로 추정하고서 최적 해를 구하는 것인지, 아니면 불확실한 사상이 어떻게 귀결될지를 모르면서 그냥 통계적 또는 확률적인 기댓값에 의지해서 결정을 내리게 하는지의 차이라 할 수 있다. 불확실한 사상이 어떻게 귀결될지를 모르면서 그냥 통계적 또는 확률적인 기댓값에 의지해서 내리는 결정을 '모르면서 내리는 결정 (nonanticipative decision)' 이라고 한다. 그러나 '모르면서 내린 결정' 이라 해도 최적화 모형에서는 그 결정으로 인하여 추후에 발생되어 전파되는 일련의 파급효과가 모형 측면에서 불가능해의 영역에 들어가 있지 않도록 어떤 조치가 취해져야 한다. 이런 조치를 '대응적 행동 (recourse action)' 이라고 하는데, 이 같은 의사결정 과정이 최적화 모형에 반영되게 하기 위해서는 의사결정 매 시점 마다 2-단계 결정이 이루어져야 한다. 이렇게 구성된 최적화 모형이 1955년에 Dantzig와 Beale 등에 의해서 처음 제시된 two-stage stochastic LP with recourse 이며, 그런 과정이 다단계로 순차적으로 반영되도록 구성된 최적화 모형이 Multi-stage Stochastic LP 이다. 다단계 확률 모형에서 각 단계는 의사결정 시점이 되지만, 매 단계가 꼭 시간으로 정의될 필요는 없다. 몇 기간이 묶여서 하나의 의사결정 단계로 표현될 수도 있다. 다단계 확률적 모형을 풀어 나가기 위해서는 매 의사결정 단계마다 "모르면서 내리는 결정(nonanticipative decision)"의 여건이 잘 이루어질 수 있도록 시나리오 별로 순차적으로 바로 전 단계와 다음 단계를 추정하게 하고, 전 단계에서 내렸던 의사결정이 일관되게 유지되도록 하는 제약식(non-anticipative constraint) 이 부여되어야 한다. 그리고 소위 '시나리오 나무(scenario tree)' 의 구성이 필요하다. '시나리오 나무' 는 미래의 의사결정 단계마다 불확실한 사상이 어떻게 전개되어 나아가는지 그 과정을 추적할 수 있도록 도와준다. 따라서 적절한 확률적인 최적화 모형을 수립하기 위해서는 시나리오 나무를 적절하게 구성하고, 매 의사결정 단계마다 적당한 '조건부 변환확률 (conditional probability)' 을 추정할 수 있어야 한다. 그러나 미래 불확실한 상황에서 적절한 조건부 변환확률을 추정한다는 것은 쉬운 문제가 아니며, 많은 연구가 필요한 부분이다. 그리고 의사결정 단계가 늘어나면 확률적 모형에 일대 일 대응되는 확정적 선형계획 문제의 크기가 기하급수적으로 늘어나므로 짧은 시간에 풀 수 있는 특별한 해법이 고안될 필요가 있다. 다행히 최근의 소프트웨어 기술의 발전에 힘입어서 CPLEX 같은 선형계획 풀이 프로그램은 웬만큼 큰 모형도 짧은 시간에 풀 수 있게 한다. 따라서 과거 같으면 대규모 선형계획 해법구상에 들여야 할 시간적 수고를 적절한 모형 수립에 더 많이 쓸 수 있게 되어, 결과적으로 선형계획법을 기반으로 하는 추계학적 선형계획 모형의 현실 적용에 도움을 주고 있다.

참고문헌

Beale, E. M. L. (1955), "On minimizing a convex function subject to linear inequalities", Journal of Royal Statistical Society: Series B, Vol. 17, No. 2, pp. 173-184

Metev, B. and Gueorguieva, D. (2000) "A simple method for obtaining weakly efficient points in multiobjective linear fractional program problems", European Journal of Operational Research, Vol. 126, pp. 386-390.

Dantzig, G. B. (1955), Linear program- ming under uncertainty, Management Science. Vol. 1, No. 3, pp.197-206.

Faber, B. A. and Stedinger, J. R. (2001), "Reservoir optimization using sampling SDP with ensemble streamflow prediction (ESP) forecasts", Journal of Hydrology, Vol. 249, No. 1-4, pp. 113-133

Kelman, J., Stedinger, J.R., Cooper, L.A., Hsu, E., and Yuan S. Q. (1990), "Sampling stochastic dynamic program-ming applied to reservoir operation", Water Resources Research, Vol.26, No. 2, pp. 447-454

Kim, J, and Kim, S. K (2006), "A CHIM-based interactive Tchebycheff procedure for multiple objective decision making", Computers & Operations Research, Vol. 33, pp. 1557-1574.

Préakopa, A. (1995). Stochastic program-ming, Dordrecht. The Nether lands: Kluwer Academic Publishers.

Steuer, R. E. (1986). Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application. John Wiley & Sons.

조남웅 · 김재희 · 김승권, (2006) "최소 거리척도를 이용한 대화형 다기준 그룹 의사결정," Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers, Vol. 32(1) pp. 42-50.