韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2006. 8. 제 45권, 제 3호, 367-373.

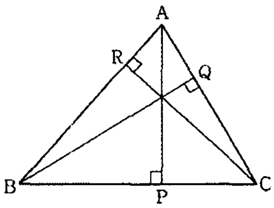
J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2006, Vol. 45, No. 3, 367-373.

유클리드 기하의 고유한 성질로서의 삼각형 넓이 공식에 대한 재음미

최 영 기 (서울대학교)
홍 갑 주 (서울대학교 대학원)

I. 서 론

밑변과 높이가 주어진 삼각형의 넓이는 밑변과 높이 곱의 절반으로 구할 수 있다. 이것은 교과과정상 초등학교에서부터 사용하게 되는 익숙한 공식이며, 그 값을 삼각형의 넓이로 간주할 때 아무런 모순이 발생하지 않음은 경험상 분명하다. 그러나 실제로는 주어진 삼각형에 대해 밑변과 높이는 세 쌍 존재하므로(그림 1) 이 공식은 세 가지로 계산될 수 있고, 따라서 이 세 가지 계산 결과가 모두 일치할 것인지 의문을 가질 수 있다. 수학적으로는 이 세 값이 일치함이 확인되어야만 그 값으로서 삼각형의 넓이를 정의할 수 있다.



<그림 1> 삼각형의 세 쌍의 밑변과 높이

실제로, 이 사실은 다음과 같이 증명할 수 있다. <그림 1>에서 각 A, B, C의 대변을 각각 a, b, c라 하고, 대응하는 높이를 각각 h_a, h_b, h_c라 하면, 삼각형 ACP와 BCQ가 닮음이라는 사실에서 $a:b=h_b:h_a$. 따라서 $\frac{1}{2}ah_a$와 $\frac{1}{2}bh_b$는 일치한다. 같은 방법으로 $\frac{1}{2}bh_b$와 $\frac{1}{2}ch_c$가 일치함도 보일 수 있다.

이 증명은 '$\frac{1}{2}$×밑변×높이' 라는 식을 통해 삼각형의 넓이가 잘 정의됨을 보장해 준다는 점에서 그 자체로서 의미가 있다. 그러나 이 명제의 실제 내용과 증명 과정을 분석하면 다음과 같은 의문을 다시 제기할 수 있다.

첫째, 이 명제는 '주어진 삼각형에 대해 밑변 곱하기 높이의 세 값은 일치한다'와 같이 넓이라는 용어를 사용하지 않고 진술될 수 있다. 이때 이 공통의 값에 삼각형의 넓이라는 이름을 붙일 수 있는, 혹은 붙여야 하는 실제적인 이유는 무엇인가.

둘째, 위의 증명과정에서는 피타고라스 정리 혹은 닮은 삼각형의 존재라는 유클리드 기하의 고유한 성질이 사용된 것을 확인할 수 있는데, 이 성질들은 평행선 공준과 논리적으로 동치인 바, 유클리드 기하의 고유한 성질이다(최영기, 1999). 구체적으로 이 공식은 유클리드 기하의 고유한 성질을 어떻게 반영하고 있는가.

본 연구에서는 이상의 두 가지 문제에 대한 답을 모색함으로써 넓이와 유클리드 기하의 고유한 성질 사이의 관계에 대한 명확한 이해를 얻고자 한다. 이러한 논의는 넓이에 대한 일상적인 관념에 대해 새로이 고찰하게 한다는 점에서, 넓이 관련 탐구학습을 도입하고 전개하는 아이디어로 활용될 수 있을 것이다.

II. 넓이의 두 가지 성질 및 평행선공준

1. 넓이의 두 가지 성질

합동인 두 도형에 대해서는 그 넓이를 측정하지 않더라도 두 도형의 넓이가 같다고 이야기할 수 있다. 또한 복잡한 모양의 도형은 삼각형과 같이 넓이를 쉽게 구할

* 2006년 6월 투고, 2006년 8월 심사완료.
* ZDM분류 : G14
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 삼각형의 넓이 공식, 평행선공준, 유클리드 기하
* 이 연구는 2006학년도 서울대학교 교육종합연구원 지원으로 연구되었음.

수 있는 도형들로 분할하여 그 넓이를 구할 수 있다. 이 두 가지 성질 즉, 합동인 두 도형이 넓이가 같다는 것(넓이의 합동불변성), 그리고 주어진 도형의 넓이는 그 분할된 조각의 넓이 합과 같다는 것(넓이의 가법성)은 넓이에 대한 일상적인 관념에 비추어 넓이가 만족해야 할 기본적인 성질이다.

두 도형이 분해합동일 때 즉, 한 도형을 적당히 분할하고 재조립하여 다른 도형을 만들 수 있을 때, 두 도형이 넓이가 같다는 사실은 바로 이 두 성질로부터 자명하게 유도되는 원리이다. 초등학교 교과서에서 평행사변형, 사다리꼴 등의 넓이 공식을 유도할 때 이 원리를 당연한 것으로서 이용하고 있음을 확인할 수 있다(교육인적자원부, 2002a, p.94; 교육인적자원부, 2002b, p.97). 역사적으로, 기원전 2000에서 1800년 전의 것으로 추정되는 이집트의 린드 파피루스에서 삼각형의 넓이를 밑변과 높이의 곱의 절반으로, 이등변 사다리꼴의 넓이를 두 밑변의 길이 합과 높이 곱의 절반으로 계산한 문제들을 발견할 수 있는데, 이는 고대 이집트인들이 넓이에 대한 이러한 분할 전략을 이용했음을 암시한다(Edwards, 1982).

넓이를 수학적으로 다룸에 있어서 합동불변성과 가법성은 반드시 보장되어야 할 성질인 바, 넓이의 공식은 이 두 성질과 관련하여 분석할 때 보다 명확히 파악할 수 있을 것이다.

2. 유클리드의 평행선공준

유클리드 원론에서 '두 직선이 평행이다'의 정의는 단지 두 직선이 만나지 않는다는 것이다. 따라서 원론에서 평행선에 대한 이것 이외의 성질, 예컨대 평행한 두 직선 사이의 거리는 어디서나 일정하다는 것 등은 정의, 공준, 공리들을 토대로 하여 증명해야 할 명제가 된다.

언급한 성질을 비롯하여, 유클리드기하에서 평행선과 관련된 많은 성질들은 평행선의 유일성을 말하고 있는 유클리드의 다섯 번째 공준[1]을 가정할 때 비로소 증명될 수 있다. 예컨대 마주보는 한 쌍의 변이 서로 평행이고 길이가 같은 사각형은 그 나머지 한 쌍의 변도 서로 평행이고 길이가 같다는 사실(명제 33)의 증명에서 평행선공준의 사용은 필수적이다.

평행선공준을 가정하지 않는 기하를 중립기하라 부른다. 중립기하 하에서도 많은 기하학의 명제들이 증명될 수 있다. 예컨대 삼각형의 세 합동조건(Ⅰ권의 명제 4, 8, 26), 삼각형의 두 내각의 합은 2직각보다 작다는 것(명제 17), 두 직선에 대해 엇각이 같거나 동위각이 같으면 두 직선은 평행이라는 것(명제 27, 28) 등은 평행선공준의 가정 없이 증명되므로 중립기하의 명제들이다. 특히, 한 직선에 대해 그 위에 있지 않은 점을 지나며 그 직선과 평행한 직선이 존재한다는 것 또한 중립기하의 명제이다.[2]

쌍곡기하는 중립기하의 모든 공리를 그대로 인정하고 평행공리를 그 부정으로 대체시켜서 얻은 기하이다. 쌍곡기하에서는 삼각형의 내각의 합이 2직각보다 작다는 것이 증명된다. 따라서 각각의 삼각형에 대해 그 삼각형의 결손(180°-삼각형의 세 내각의 합)이 하나의 양수 값으로서 정의된다. 또한, 두 삼각형의 세 내각이 서로 일치하면 그들은 합동이라는 사실이 증명된다. 따라서 쌍곡기하에서는 삼각형의 세 내각이 그 삼각형을 결정한다. 이후의 논의에서 "유클리드기하"라고 말할 때는 그 공리적 방법론을 강조하는 것이 아니라 평행선공준을 가정한 기하 즉, 쌍곡기하와 구별되는 의미로서의 유클리드기하를 가리킨다.

평행선공준을 필요로 하는 명제와 그렇지 않은 명제를 구별하는 것은 유클리드기하의 체계를 이해하는데 핵심적인 부분이다. 최영기(1999)는 중학교 수학에서 기하 영역 내용전개의 근간을 이루고 있는 다음의 네 가지 명제들이 평행선공준과 동치임을 지적하고, 이에 대한 이해가 학교수학에서 가지는 중요성을 강조한 바 있다.

명제1. 직사각형이 존재한다.

명제2. 임의의 직각삼각형에서 피타고라스의 정리가 성립한다.

명제3. 임의의 삼각형의 내각의 합은 180°이다.

---

1) 원래의 형태는 다음과 같다. "두 직선과 만나는 한 직선이 같은 쪽에서 만든 두 안각의 합이 2직각보다 작을 때 두 직선을 그 쪽으로 연장시키면 만난다."

2) 원론의 Ⅰ권에서 평행선공준은 명제 29의 증명에 이르러서야 처음으로 사용된다. 이 정리는 정리 27과 28의 역으로서, 평행한 두 직선에 대해서는 엇각끼리 그리고 동위각끼리 크기가 일치한다는 것이다.

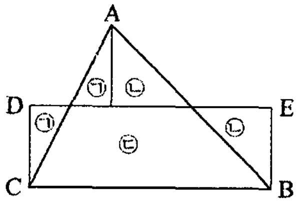
명제4. 임의의 삼각형 ABC와 임의의 주어진 선분 DE에 대하여 대응각의 크기가 서로 같은 닮은 삼각형 DEF 가 존재한다.

이러한 이론적 배경 하에, 다음 두 장에서는 삼각형의 넓이공식이 넓이의 합동불변성과 가법성, 그리고 유클리드기하의 고유한 성질을 어떻게 반영하고 있는지 살펴본다. 특히, 넓이의 개념이 유클리드 기하에 한정된 것이 아닌 바, 비유클리드 기하를 포함한 일반적인 관점에서의 고찰을 통해 이에 대한 보다 명확한 이해를 갖도록 할 것이다.

Ⅲ. 삼각형 넓이공식의 재음미

1. 넓이의 성질과 넓이공식

넓이의 합동불변성과 가법성을 받아들일 때, 밑변의 길이가 b이고 높이가 h인 삼각형의 넓이는 가로의 길이가 b이고 세로의 길이가 $\frac{1}{2}h$인 직사각형의 넓이와 같다는 사실을 다음의 <그림2>와 같이 보일 수 있다.



<그림 2> 삼각형 ABC와 직사각형 DEBC는 둘 다 ㉠, ㉡, ㉢ 으로 분해된다. 따라서 넓이가 같다.

여기서 삼각형의 넓이에 수치적인 값을 부여하기 위해서는 어떤 기본도형에 대해 넓이를 결정한 다음, 합동불변성과 가법성을 이용하여 그 값을 상대적으로 구하면 될 것이다. 만약 밑변의 길이가 b, 높이가 h인 직사각형을 기본도형으로 삼고, 그 넓이에 bh라는 값을 부여한다면, 위에서 보인 사실로부터 삼각형의 넓이공식 $S=(1/2)bh$가 유도된다. 다각형은 삼각형으로 분할되므로 결국 이 공식에 의해 모든 다각형의 넓이가 결정된다.[3]

그러나 아직, 이 직사각형의 넓이를 반드시 bh로 두어야만 하는가 즉, 이 직사각형에 대해 다른 넓이공식을 줄 수는 없는가 하는 문제가 남아 있다.

실제로 이 직사각형의 넓이는 기껏해야 bh의 상수 배일 수밖에 없음이 수학적으로 증명되는데(Laczkovich, 2001, p.36), 이 증명은 다시 한 번 넓이의 가법성에 의존한다. 즉, 가로와 세로가 각각 x, y인 직사각형의 넓이를 $f(x,y)$라 두면, 가로와 세로가 각각 x_1+x_2, y인 직사각형이 가로와 세로가 각각 x_1, y인 직사각형과 x_2, y인 두 직사각형으로 분해된다는 사실에서 $f(x_1+x_2, y)=f(x_1,y)+f(x_2,y)$. 높이에 대해 같은 이유로, $f(x, y_1+y_2)=f(x,y_1)+f(x,y_2)$. 그런데 이 성질을 만족하는 함수는 $f(x,y)=cxy$ (단, 여기서 c는 임의의 상수) 밖에 없음이 실수론을 바탕으로 증명된다.

이상의 고찰로부터 $S=\frac{1}{2}bh$라는 삼각형의 넓이 공식은 넓이의 가장 기본적인 두 성질로부터 유도되는 필연적인 결과임을 알 수 있다. 단, 여기서 비례상수 c는 단위 정사각형의 넓이를 무엇으로 두느냐에 의해 결정되는 임의적인 값이다. 만약 가로와 세로가 각각 1인 정사각형의 넓이를 1로 약속한다면 c의 값은 1로 결정되고 삼각형 넓이 공식의 비례상수는 $\frac{1}{2}$로 결정된다.

2. 유클리드 기하와 넓이공식

위에서는 직사각형을 단위도형으로 하여 그 상대적인 값으로서 삼각형의 넓이를 얻었다. Ⅱ장에서 살펴본 바와 같이 직사각형은 유클리드 기하의 고유한 도형이고, 따라서, 평행선 공준을 가정하고 삼각형의 넓이공식을 유도한 것이다. 이에 유클리드 기하에서 삼각형의 넓이를 어떻게 다루는지 살펴볼 필요가 있다.

Heath(1956)에 의하면 유클리드 원론의 Ⅰ권은 세 부분으로 나뉜다. 삼각형에 대해 다루는 첫 번째 부분, 평행선에 대해 다루는 두 번째 부분, 도형의 넓이를 다루는 세 번째 부분이 그것이다.[4] 이러한 전개순서는 원론

3) 이 과정에서 발생하는 수학적 문제는 4장에서 논의한다.
4) 차례대로, 명제 1부터 26까지, 명제 27부터 34까지, 명제 35부터 48까지.

에서 다각형들의 넓이 비교가 평행선에 대한 이론에 의존하고 있음을 암시한다.

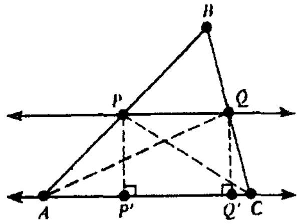
실제로 이 사실을 다음과 같이 확인할 수 있다.

명제 34의 뒷부분에서는 평행사변형 영역이 그 대각선에 의해 합동인 삼각형 영역 두 개로 나뉜다는 사실을 보이는데. 이에 의해 각 삼각형의 넓이는 그 평행사변형 넓이의 절반임을 알게 된다. 명제 36에서는 밑변과 높이가 같은 평행사변형들은 모두 넓이가 같다는 사실을 보이는데, 이에 의해 삼각형의 넓이는 밑변과 높이에 의해 완전히 결정됨을 알게 된다. VI권의 명제 1에서는 높이가 같은 평행사변형의 넓이는 그 밑변의 길이에 비례한다는 사실을 증명하며, 이에 의해 삼각형의 넓이가 밑변과 높이에 의해 각각 비례함을 알게 된다.

그런데, 명제 34의 뒷부분에서 평행사변형의 대각선에 의해 만들어진 두 삼각형이 합동이라는 사실은 마주보는 변끼리 평행하고 길이가 같으며, 마주보는 각끼리 크기가 같은 사각형으로서의 평행사변형의 존재(명제 33, 34의 앞부분)에 의존한다. 이는 평행한 두 직선에 대해서는 엇각끼리 그리고 동위각끼리 크기가 일치한다는 사실(명제 29)에 의해 증명되며, 이는 다시 평행선 공준의 가정하에 증명되는 것이다.

결국 원론에서는 삼각형의 넓이를 평행사변형 넓이에 대한 상대적인 값으로서 다루며, 이 사실은 넓이공식 $S=(1/2)bh$ 이 평행선공준에 의존하고 있음을 말해준다.

한편 삼각형, 밑변, 삼각형의 높이는 쌍곡기하에서도 존재하는 개념이다. 따라서 유클리드 기하의 고유한 대상인 직사각형 혹은 평행사변형을 이용하지 않고 쌍곡기하에서도 삼각형의 넓이를 $S=(1/2)bh$로 정의하는 것을 시도할 수 있으나, 이는 불가능함이 알려져 있다 (Moise, 1963. p. 343-347; Shene, 1972). 실제로 Shene(1972)은 중립기하에서 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{2}$×밑변×높이라는 사실과 평행선공준이 논리적으로 동치임을 다음과 같은 방법으로 보였다. 먼저, 삼각형의 넓이가 밑변과 높이 곱의 절반임을 가정할 때 $\triangle$ABC의 두 변 AB와 BC 각각의 중점 P와 Q를 연결한 직선 PQ가 AC와 평행해야 함을 밝혔다(그림 3).



<그림 3> 삼각형의 넓이공식으로부터 평행선의 존재성을 보이는 그림

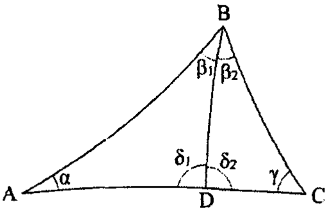
다음으로, P를 지나면서 AC에 평행한 직선이 유일하지 않다면, 밑변을 공유하고 넓이가 같지만 높이가 다른 두 삼각형을 작도할 수 있음을 보임으로써 모순을 이끌어내었다. 이로써 삼각형의 넓이공식이 평행선공준과 동치임을 증명하였다.

이상의 고찰을 통해, 삼각형의 넓이공식은 한편으로 합동불변성과 가법성이라는 넓이의 일반적인 성질을 표현하고 있으며, 다른 한편으로 평행선의 유일성이라는 유클리드 기하의 고유한 성질을 표현하고 있음을 알게 된다.

이 결과를 쌍곡기하와 비교하여 보자. 쌍곡기하에서는 합동인 두 삼각형은 결손이 같으며(결손의 합동불변성), 다각형의 결손[5]은 그 분할된 삼각형들의 결손 합과 같다는 사실(결손의 가법성)이 증명된다(그림 4).[6] 이 두 가지 사실은 결손이 넓이와 같은 성질을 가지고 있다는 것을 보여준다. 엄밀한 논의를 통하면 쌍곡기하에서 다각형의 결손은 상수 배 차이를 무시할 때 합동불변성, 가법성을 가지는 유일한 함수임을 보일 수 있다 (Boltianskii, 1978). 즉, 쌍곡기하에서의 삼각형의 넓이는 다름 아닌 그 결손이어야 한다.

5) n각형의 결손은 $\pi(n-2)-$(내각의 총합)으로 정의한다.

6) 이것은 중립기하의 명제이므로 유클리드 기하에서도 성립하는 것이지만, 유클리드 기하에서는 다각형의 결손이 언제나 0이므로 결손을 넓이로 정의하는 것이 의미가 없다.



<그림 4> 예를 들어, 삼각형 ABC, ABD, BCD의 결손은 각각 $\pi-(\alpha+\beta_1+\beta_2+\gamma)$, $\pi-(\alpha+\beta_1+\delta_1)$, $\pi-(\beta_2+\gamma+\delta_2)$ 이다. $\delta_1+\delta_2=\pi$ 이므로 삼각형 ABC의 결손은 ABD의 결손과 BCD의 결손 합과 같다.

결국 수학에서 넓이는 합동인 도형에 대한 불변성과 도형의 영역 분할에 대한 가법성을 가지는 어떤 함수에 대해 붙여준 이름이다. 이때 어떤 기하 요소의 측정값에 대한 어떤 계산이 그 성질을 표현하는가는 그 기하학의 고유한 성질에 의해 결정된다.

Ⅳ. 다각형 넓이의 공리화

유클리드 기하에서 다각형의 넓이는 일반적으로 다음과 같이 공리적으로 정의할 수 있다(Roe, 1993), 이 공리들은 지금까지 살펴본 바, 넓이의 가장 기본적인 성질인 합동불변성과 가법성을 직접적으로 반영하고 있다.

P를 임의의 유계인 다각형 영역이라고 하자. P의 넓이 $A(P)$는 다음의 성질을 만족하는 양의 값을 가지는 실함수이다.

공리1. P와 Q가 합동이면 $A(P)=A(Q)$.
(합동불변성 공리)

공리2. $P_1 \cap P_2=\phi$일 때, $A(P_1 \cup P_2)=A(P_1)+A(P_2)$.
(가법성 공리)

공리3. a와 b를 변의 길이로 가지는 직사각형의 넓이는 ab이다. (정규화 공리)

이 중 처음의 두 공리는 다각형들 사이의 넓이를 어떻게 비교할 수 있는지 알려 주는 것이고, 세 번째의 공리는 단위도형에 대해 일정한 값을 설정함으로써 일반적인 다각형의 넓이에 대해 그와 상대적인 값으로서 하나의 수치를 부여해 주기 위한 것이다.[7]

한편 새로 구성된 공리계에 대해서는 언제나 무모순성의 문제가 제기된다. 다각형 넓이의 공리계에 대해서도 합동불변성 공리, 가법성 공리, 정규화 공리를 동시에 만족하는 함수가 실제로 존재하는가 하는 문제가 제기된다. 주어진 공리계의 무모순성을 증명하는 방법 중 하나는 이미 무모순성이 확립된 다른 체계에서 그 공리계의 모델을 구성하는 것이다. 다각형 넓이의 공리계에 대해서는, 그 공리들을 모두 만족하도록 다각형의 넓이에 대한 어떤 계산방법을 찾아 줌으로써 그러한 모델을 구성할 수 있다(Roe, 1993).

실제로, 삼각형의 넓이를 밑변과 높이의 곱의 절반으로 정의하고, 다각형의 넓이는 그 삼각형 분할에서 각각의 삼각형 넓이의 합으로 정의함으로써 그 모델을 구성할 수 있는데, 여기서 다음과 같은 수학적 문제가 발생한다. 다각형의 삼각형 분할 방법은 유일하지 않으며, 따라서 이 모든 분할방법에 대해 각 조각들의 넓이 합이 일정하게 된다는 것을 확인해야 한다는 것이다. 넓이를 함수로서 정의한 이상, 넓이의 가법성 공리는 다각형의 넓이는 그 분할된 조각들의 넓이 합이라는 것 뿐 아니라 그 분할 방법에 상관없이 넓이가 일정하게 구해진다는 것까지 말하고 있기 때문이다.

실제로 이 사실은 증명 가능하다(Moise, 1963). 주어진 다각형을 한 가지 방법의 분할만으로 넓이를 구하는 것은 이 증명을 통해 수학적으로 정당화된다. 또한, 이 증명은 지금 밝힌 바의 이유로, 넓이 공리의 무모순성에 대한 증명이기도 하다.

Ⅴ. 결 론

본 연구에서는 밑변 곱하기 높이의 절반으로 구해지는 삼각형 넓이의 세 값이 일치한다는 사실에 증명이 필요함을 지적하고, 이 증명의 분석을 통해 제기되는 문제들을 고찰하여 삼각형 넓이공식의 의미에 대한 깊은 이해를 모색하였다. 이 증명에는 닮은 삼각형의 존재와 같

7) 쌍곡기하에서는 공리 1, 2은 그대로 두고, 공리 3은 "쌍마다 서로 평행한 변을 가지는 무한 삼각형 즉, 내각의 합이 0인 삼각형의 넓이는 2π이다"로 대체한다(Boltianskii, 1978).

은 유클리드 기하의 고유한 성질이 사용된 반면 넓이의 개념은 유클리드 기하에 한정된 개념이 아니므로, 이 고찰에서는 넓이의 일반적인 성질과 유클리드 기하의 고유한 성질을 함께 고려하였다. 그 결과는 다음과 같다.

첫째, $\frac{1}{2}\times$밑변$\times$높이의 값을 삼각형의 넓이라 부르는 것은, 그것이 넓이의 일반적인 성질인 합동불변성과 가법성으로부터 연역되는 결과라는 점에서 수학적으로 정당화된다. 즉, 이 두 성질을 받아들일 때 삼각형의 넓이는 그 밑변과 높이에 각각 비례한다는 것이 유클리드 기하의 명제로서 증명된다.

둘째, 삼각형의 넓이공식은 지금 다루고 있는 기하가 유클리드 기하임을 알려준다. 이 공식이 평행선공준과 동치임이 증명되기 때문이다. 반면, 쌍곡기하에서는 밑변$\times$높이의 세 값이 일치조차 하지 않으므로 이 공식으로 삼각형의 넓이를 나타낼 수 없다. 실제로 쌍곡기하에서는 삼각형의 결손을 그 넓이라 둘 수 있는데, 이는 결손이 합동불변성과 가법성을 가지기 때문이다.

이 결과를 통해 넓이와 넓이 공식에 대한 다음의 일반적인 이해를 가질 수 있다. 즉, 수학적으로 넓이는 언급한 바의 두 성질을 가지는 함수에 붙여주는 이름이며, 이때 그 구체적인 계산방법은 다루고 있는 기하학의 고유한 성질에 의해 결정된다는 것이다.

본 연구의 논의 과정과 그 결과가 넓이의 개념과 넓이공식의 의미에 대한 이해를 깊게 함과 아울러 기하영역 교과과정 연구의 이론적 배경으로서 도움 되기를 기대한다. 또한, 도형의 넓이는 유일하게 결정된다는, 넓이에 대한 일상적인 관념을 재고찰하는 것으로부터 출발하는 본 연구의 논의 과정과 내용은 넓이에 대한 수준 높은 탐구학습을 유도하고 전개하는 아이디어로 활용될 수 있을 것이다. 삼각형의 넓이와 같이 자명하게 받아들였던 사실에 증명이 필요하다는 사실의 발견은 학생들에게 수학적인 개념의 정의와 엄밀성의 기준에 대한 새로운 관점을 제공할 것이다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2002a). <u>수학 5-나</u>. 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부 (2002b). <u>수학 6-나</u>. 대한교과서 주식회사.

최영기 (1999). 중학교 수학에서 평행공리의 의미, <u>대한수학교육학회지 <학교수학></u> **1(1)**, pp.7-17, 서울: 대한수학교육학회.

Boltianskii, V. G. (1978). *Hilbert's third problem.* Washington, DC: V. H. Winston&Sons.

Edwards, C. H. (1982). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of The Elements(Vol 1).* New York: Dover publications.

Laczkovich, M. (2001). *Conjecture and Proof.* Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Moise, E. (1993). *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Addison Wesley.

Roe, J. (1993). *Elementary Geometry*, New York: Oxford university press.

Shene. C. K. (1972). The Triangle Area Formula Implies the Parallel Postulate, *Mathematics Magazine*. **45(5)**, pp. 269-272.

A Re-Examination of the Area formula of triangles as an invariant of Euclidean geometry

Choi, Younggi
Dept. of Mathematics Education, Seoul National University, Seoul 151-748, Korea
E-mail: yochoi@snu.ac.kr

Hong, Gap ju
Dept. of Mathematics Education, Seoul National University Graduate School, Seoul 151-748, Korea
E-mail: gapdol@empal.com

This study suggests that it is necessary to prove that the values of three areas of a triangle, which are obtained by the multiplication of the respective base and its corresponding height, are the same. It also seeks to deeply understand the meaning of Area formula of triangles by exploring some questions raised in the analysis of the proof. Area formula of triangles expresses the invariance of congruence and additivity on one hand, and the uniqueness of parallel line, one of the characteristics of Euclidean geometry, on the other.

This discussion can be applied to introducing and developing exploratory learning on area in that it revisits the ordinary thinking on area.

* ZDM classification : G14
* 2000 Mathematics Classification : 97D50
* Key Word : area formula of triangles, parallel postulate, invariant of Euclidean geometry