

< 논문 >

크리깅 근사모델을 이용한 통계모멘트 기반 신뢰도 계산의 성능 개선

주병현[†] · 조태민* · 정도현** · 이병채***

(2006년 3월 15일 접수, 2006년 5월 15일 심사완료)

Performance Improvement of a Moment Method for Reliability Analysis Using Kriging Metamodels

Byeong-Hyeon Ju, Tae-Min Cho, Do-Hyun Jung and Byung-Chai Lee

Key Words : Kriging Metamodel(크리깅 근사모델), Moment Method(모멘트 방법), Reliability (신뢰도)

Abstract

Many methods for reliability analysis have been studied and one of them, a moment method, has the advantage that it doesn't require sensitivities of performance functions. The moment method for reliability analysis requires the first four moments of a performance function and then Pearson system is used for the probability of failure where the accuracy of the probability of failure greatly depends on that of the first four moments. But it is generally impossible to assess them analytically for multidimensional functions, and numerical integration is mainly used to estimate the moment. However, numerical integration requires many function evaluations and in case of involving finite element analyses, the calculation of the first four moments is very time-consuming. To solve the problem, this research proposes a new method of approximating the first four moments based on kriging metamodel. The proposed method substitutes the kriging metamodel for the performance function and can also evaluate the accuracy of the calculated moments adjusting the approximation range. Numerical examples show the proposed method can approximate the moments accurately with the less function evaluations and evaluate the accuracy of the calculated moments.

1. 서론

구조 신뢰도를 평가하기 위해서는 전형적으로 식 (1)과 같은 다중 적분 문제를 풀어야 한다.

$$P_f = \text{Prob}[g(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{g(\mathbf{X}) \leq 0} f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (1)$$

여기에서 $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]^T$ 는 확률변수를 나타내

는 벡터이고, $f(\mathbf{X})$ 는 \mathbf{X} 의 결합확률밀도함수, $g(\mathbf{X})$ 는 한계상태식, $g(\mathbf{X}) \leq 0$ 은 적분영역, P_f 는 파괴확률을 나타낸다. 이와 같은 적분을 해석적으로 구하는 것은 거의 불가능하며 이를 해결하기 위해 다양한 방법들이 제안되었다. 모의실험방법에는 파괴확률을 가장 정확하게 계산할 수 있는 몬테카를로 모의실험법(Monte Carlo simulation)^(1,2) 과 이 방법의 계산량을 줄이기 위한 중요도 추출법(Importance sampling)^(1,2)이 있다. 민감도 정보를 이용하는 방법에는 한계상태식을 가장 발현빈도가 높은 점(MPP)에서 선형으로 근사하여 파괴확률을 계산하는 일계신뢰도기법(FORM)^(1,3) 한계상태식의 곡률을 고려할 수 있는 이계신뢰도기법(SORM)⁽⁴⁾이 있다. 이와는 달리 한계상태식의 처음 4 개의 통계모멘트를 계산하고 이를 피어슨 시스템과 같은 경험적인 식에 넣어 확률밀도함수를 구

[†] 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : joobi@casad.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-5034

* 한국과학기술원 기계공학과

** 자동차부품연구원

*** 회원, 한국과학기술원 기계공학과

하고 이를 적분하여 파괴확률을 계산하는 방법이 있다.⁽⁵⁾ 그러나 함수의 통계모멘트는 적분을 통해 정의되며 확률변수가 여러 개인 경우 다중 적분을 풀어야 하므로 해석적으로 접근하기란 거의 불가능하다. 이런 문제점을 해결하기 위해 수치적분이 주로 사용되어 왔으며 이 과정에서 적분을 수행하는 절점과 가중치가 요구된다. Zhao 와 Ono⁽⁶⁾는 로젠블랏(Rosenblatt) 변환을 포함하는 점 예측 방법을 사용하였으며, 확률변수의 개수가 n 인 경우 $5n, 7n$ 번의 계산을 통해 통계모멘트를 계산하였다. Taguchi⁽⁷⁾는 공차해석을 위해 한계상태식의 평균과 표준편차를 3 수준 실험계획법을 사용하여 계산하는 방법을 제안하였으며 Seo 와 Kwak⁽⁸⁾은 비정규분포에도 적용 가능하도록 이를 확장하였다. Choi⁽⁹⁾는 3 수준 실험계획법만으로는 한계상태식의 비선형성이나 비정규성이 큰 경우 처음 4 개의 통계모멘트를 계산하는데 큰 오차가 발생하므로 이를 5 수준으로 확장하였다. 여기에서 3 수준 및 5 수준은 3 점 및 5 점 적분에 대응한다. 그러나 이와 같은 방법은 확률변수가 n 개인 문제에 적용하게 되면 함수의 계산량이 3 ^{n} 및 5 ^{n} 으로 증가하게 되며 함수를 계산하기 위해 시간이 많이 요구되는 유한요소해석을 이용할 경우 매우 비효율적이 된다. 또한 3 ^{n} 및 5 ^{n} 의 계산을 통해 통계모멘트를 계산한다 할지라도 그 결과가 어느 정도 정확한지에 대한 판단을 전혀 할 수 없다. 이것은 매우 중요한 단점으로 실제 문제에서는 알 수 없는 함수를 다루기 때문에 계산된 통계모멘트의 정확성이 보장되지 않는다면 이를 믿고 사용할 수 없을 것이다.

이에 본 연구에서는 크리깅 근사모형을 이용하여 비싼 계산을 해야 하는 한계상태식을 근사하고, 적절하게 근사범위를 선택함으로써 계산된 통계모멘트의 정확성을 평가할 수 있을 뿐만 아니라 이전의 방법에 비해 더 적은 계산회수로 정확한 통계모멘트를 계산 할 수 있는 새로운 방법을 제안하고자 한다.

2. 크리깅 근사모형

2.1 크리깅 모델의 기본 이론^(10,11)

크리깅 모델은 식 (2)와 같이 전역적인 특성을 결정짓는 $\mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}$ 와 이 값으로부터 편차를 나타내는 $Z(\mathbf{x})$ 의 합으로 구성된다.

$$Y(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} + Z(\mathbf{x})$$

$$\text{where } \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]^T \\ \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_k]^T \end{cases} \quad (2)$$

여기에서 $Z(\mathbf{x})$ 는 평균이 0 이고 설계점 \mathbf{x} 와 \mathbf{w} 에서 $Z(\mathbf{x})$ 와 $Z(\mathbf{w})$ 사이의 공분산이 식 (3)과 같은 확률적인 과정(stochastic process)을 통해 표현된다.

$$\text{Cov}(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = \sigma^2 R(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \quad (3)$$

여기에서 σ^2 은 $Y(\mathbf{x})$ 를 정규분포로 가정했을 때 $Y(\mathbf{x})$ 의 분산이다. 식 (2)와 (3)에서 $\boldsymbol{\beta}$ 와 σ^2 은 주어진 정보에 의해 계산된다. 이를 위해 임의의 N 개의 실험점의 집합 $S = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N\}$ 에 대한 전산실험의 결과를 $\mathbf{y}_s = [y(\mathbf{s}_1), \dots, y(\mathbf{s}_N)]^T$ 라 하자. 그러면 $\boldsymbol{\beta}$ 와 σ^2 은 식 (4)와 (5)에 의해 주어진다.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_s \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} (\mathbf{y}_s - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_s - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\beta}}) \quad (5)$$

$$\text{where } \begin{cases} \mathbf{F} = [\mathbf{f}(\mathbf{s}_1), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{s}_N)]^T \\ \mathbf{R} = [R(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)]_{i,j} \quad 1 \leq i, j \leq N \end{cases}$$

그러나 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 과 $\hat{\sigma}^2$ 를 계산하기 전에 먼저 상관함수(correlation function)의 미지수인 θ_k 를 결정해야 하며, 이를 위해 최우량추정법(maximum likelihood estimation: MLE)에 의해 구성되는 다음과 같은 최적화 문제를 풀어야 한다. 여기에서 n 은 설계변수의 개수이다.

$$\text{Minimize } L(\boldsymbol{\theta}) = R^{1/n} \hat{\sigma}^2 \quad (6)$$

$$\text{subject to } 0 \leq \theta_k \leq 50 \quad k = 1, \dots, n \quad (7)$$

이를 바탕으로 크리깅 모델은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{y} = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\text{where } \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}_s - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ \mathbf{r} = [R(\mathbf{s}_1, \mathbf{x}), \dots, R(\mathbf{s}_N, \mathbf{x})]^T \end{cases} \quad (8)$$

또한 평균 제곱 오차는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{MSE}(\hat{y}(\mathbf{x})) = \sigma^2 \left\{ 1 - \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \\ \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right\} \quad (9)$$

이때 평균제곱오차는 설계점의 집합 S 에서 0 이 되는 특성을 가진다.

2.2 상관 함수

크리깅 모델을 위한 상관함수는 다양하지만 여기에서는 가장 일반적으로 사용되는 가우스 상관 함수만을 고려한다. 가우스 상관함수를 이용하면 $R(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ 는 식 (10)과 같이 표현된다.

$$R(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n R_j(d_j) \tag{10}$$

where $\begin{cases} R_j(d_j) = e^{-\theta_j d_j^2} \\ d_j = w_j - x_j \end{cases}$

3. 통계모멘트를 이용한 신뢰도 계산

3.1 통계모멘트의 계산⁽⁹⁾

통계모멘트의 정의는 수학적으로 다음과 같다.

$$\mu_g = \int g(\mathbf{X})f(\mathbf{X})d\mathbf{X} \tag{11}$$

$$M_{kg} = \int (g(\mathbf{X}) - \mu_g)^k f(\mathbf{X})d\mathbf{X} \text{ for } k \geq 2 \tag{12}$$

여기에서 $g(\mathbf{X}) = g(x_1, \dots, x_n)$ 는 확률변수 \mathbf{X} 로 이루어진 함수이며 μ_g 는 $g(\mathbf{X})$ 의 평균, M_{kg} 는 $g(\mathbf{X})$ 의 k 번째 중심모멘트이다. 또한 $f(\mathbf{X})$ 는 \mathbf{X} 의 결합확률밀도함수이다. 이를 수치적분을 이용하여 표현하고 왜도(skewness) 및 첨도(kurtosis)의 개념을 도입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mu_g = \sum_{i=1}^m w_i \cdots \sum_{i_n=1}^m w_{i_n} g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \tag{13}$$

$$\sigma_g = \left[\sum_{i=1}^m w_i \cdots \sum_{i_n=1}^m w_{i_n} (g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) - \mu_g)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

$$\sqrt{\beta_{1g}} = \left[\sum_{i=1}^m w_i \cdots \sum_{i_n=1}^m w_{i_n} (g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) - \mu_g)^3 \right] / \sigma_g^3 \tag{15}$$

$$\beta_{2g} = \left[\sum_{i=1}^m w_i \cdots \sum_{i_n=1}^m w_{i_n} (g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) - \mu_g)^4 \right] / \sigma_g^4 \tag{16}$$

여기에서 m 은 일 차원일 때 절점의 개수이며 이와 같이 n 차원인 경우 m^n 번의 함수계산이 요구된다. 표준정규분포인 경우 이 절점과 가중치는 Hermite 적분으로부터 구해지며 Hermite 적분과 비교하여 절점은 $\sqrt{2}$ 배가 되고 가중치는 $\sqrt{\pi}$ 로 나누어지게 된다.

3.2 수치적분과 통계모멘트의 관계

일반적으로 수치적분에 사용되는 절점의 수에 따라 수치적분의 정확성이 달라지게 된다. 일반적으로 Gauss-Legendre 적분을 사용할 경우 일차원 문제에서 n 개의 절점을 사용하여 $2n-1$ 차의 다항식을 정확하게 적분할 수 있다. 이런 점을 바탕으로 비선형성이 큰 경우 충분히 많은 절점을 사용하지 않게 되면 계산된 적분에는 상당한 오차가 존재하게 된다. 특히 최초의 4 개의 통계모멘트를 계산할 때 고차의 통계모멘트로 갈수록 적분되는 함수의 비선형성이 증가하게 되므로 평균이나 표준편차가 정확하게 근사 되더라도 왜도나 첨도의 계산에는 큰 오차가 발생할 수 있다. 아래의 두 가지 예를 통해 먼저 이런 특성을 확인해 본다. 여기에서 확률변수는 표준정규분포로 가정하였다.

Table 1 과 2 에서 알 수 있듯이 함수가 일차식인 경우 3 점 및 5 점 적분 모두 정확히 통계모멘트를 구하지만 함수가 이차식인 경우 3 점 적분만으로는 왜도 및 첨도에서 큰 오차를 보이고 있다. 이것은 일반적인 수치적분의 특징을 보여주는 것으로 고차의 통계모멘트로 갈수록 함수의 비선형성이 커지기 때문이다. 이 경우 적분점의 개수가 증가해야 정확하게 통계모멘트를 계산할 수 있다.

그러나 실제 공학시스템에서 다루어지는 대부분의 문제에 대해서 미지의 함수의 비선형성을 미리 파악하는 것은 불가능하며 일반적으로 위와 같은 방식으로 적분점의 개수를 미리 정하고 통계모멘트를 계산하게 된다. 이런 경우 두 가지 문제점이 나타나게 되는데 첫째는 계산된 통계모멘트의 정확성에 대해서 어떤 판단도 할 수 없다는 것과, 둘째는 다차원 문제의 경우 계산량이 매우 빠르게 증가하기 때문에 실제적인 문제에는 적용이 불가능하다는 것이다. 이런 문제는 크리깅 근사모델을 도입함으로써 해결될 수 있다. 즉, 통계모멘트의 정확성을 판단하기 위해서는 적분점의 개수가 많아져야 하며, 이에 따라 근사영역도 넓어지게 된다. 이때, 넓은 근사영역을 비교적 정확하게 근사할 수 있는 것이 바로 크리깅 근사모델이며, 한번 근사모델이 만들어지면 계산량이 많은 통계모멘트의 계산은 근사모델을 이용하므로 수치적인 비용이 많이 감소하게 된다.

Table 1 Statistical moments of $g(\mathbf{X}) = x$

	Mean	Standard deviation	Skewness	Kurtosis
3 points	0	1	0	3
5 points	0	1	0	3
Exact	0	1	0	3

Table 2 Statistical moments of $g(\mathbf{X}) = x^2$

	Mean	Standard deviation	Skewness	Kurtosis
3 points	1	1.4142	0.7071	1.5
5 points	1	1.4142	2.8284	15
Exact	1	1.4142	2.8284	15

Table 3 Sampling region and the number of initial sampling points according to the number of integration points for a standard normal distribution

	3 points	5 points	7 points
Sampling region	± 1.733	± 2.857	± 3.751
Number of initial sampling points	$2n+1$	$4n+1$	$6n+1$

4. 크리깅 근사모델을 이용한 통계모멘트의 계산

4.1 새로운 방법의 제안

크리깅 근사모델의 가장 큰 장점은 반응표면법과 달리 비선형성이 큰 문제들을 잘 표현할 수 있다는 것이다. 제안된 방법은 크리깅 근사모델의 이런 특징을 고려하여 미지의 한계상태식을 근사하고 실제 통계모멘트를 계산할 때는 크리깅 근사모델을 사용한다는 것이다. 또한 적분영역을 적절히 선택함으로써 계산된 통계모멘트의 정확성도 평가가 가능하다.

기존의 방법에서는 구해진 통계모멘트의 정확성을 평가하기 위해 3 점 적분을 사용하여 통계모멘트를 구하였다면 이보다 더 많은 5 점 적분을 사용하여 구한 통계모멘트의 결과와 비교하여 3 점 적분으로 구한 통계모멘트의 정확성을 평가할 수 있다. 즉 Table 1 을 참고하면 두 경우 값이 같으므로 3 점 적분으로 구한 통계모멘트가 정확하다고 평가할 수 있다. 그러나 이와 같은 방법의 가장 큰 문제점은 3 점 적분과 5 점 적분에서 적분점의 위치가 다르다는 것이다. 그렇기 때문에 3 점 적분에서 이용되었던 점들이 5 점 적분에서 다시 이용될 수 없으므로 통계모멘트의 정확성을 평가하기 위해서는 그 계산량이 훨씬 더 많아지게 된다.

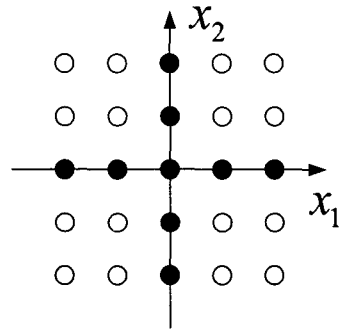


Fig. 1 Locations of initial sampling points in case of using 5 points integration

여기에서는 3 점, 5 점, 7 점 적분이 가능한 크리깅 근사모델을 만들고 이로부터 계산되는 통계모멘트의 값들을 비교함으로써 계산된 통계모멘트의 정확성을 판단하는데 이용한다. 각각의 적분을 위해 만들어지는 크리깅 근사모델은 정의되는 영역만 다를 뿐 나머지 과정은 모두 같다. 각각의 경우에 대해 크리깅 근사모델이 정의되는 영역과 초기 실험점의 개수를 Table 3 에 나타내었으며 n 은 확률변수의 개수를 의미한다. 예를 들어, 5 점 적분의 경우 표준정규분포만을 고려하면 3.1 절에서 언급한 Hermite 적분의 절점을 고려하여 각각의 확률변수에 대해 ± 2.857 범위에서 근사모델을 만들게 된다. 이때 크리깅 근사모델의 초기 샘플링은 Fig. 1 과 같이 5 점 적분을 할 때 가중치가 높은 축점으로 선택한다. 그러면 초기 샘플링의 개수는 $4n+1$ 개가 된다. 초기 샘플링을 한 후 추가적인 샘플링은 크리깅 근사모델에서 얻어진 평균제곱오차가 최대가 되는 곳에 새로운 실험점을 추가해 나간다. 이 과정을 위해 유전자 알고리즘이 사용되며 이미 만들어진 크리깅 근사모델을 사용하므로 시간이 많이 걸리지 않는다. 이와 같이 새로운 실험점을 계속적으로 추가해 나가며 수렴을 평가한다. 이때, 수렴을 판단하기 위해 식 (17)과 (18) 을 이용한다. 여기에서 (i) 는 현재 축차를 의미하며 $(i-1)$ 은 이전 축차를 의미한다. 이와 같은 수렴체크는 계산된 모든 오차가 수렴상수보다 작게 되면 각각에 대해 4 개의 통계모멘트가 수렴한 것으로 하고 축차를 끝내게 된다.

$$\mu_{g_error} = \left| \frac{\mu_{g(i)} - \mu_{g(i-1)}}{\mu_{g(i-1)}} \right| \tag{17}$$

$$M_{kg_error} = \left| \frac{M_{kg(i)} - M_{kg(i-1)}}{M_{kg(i-1)}} \right| \text{ for } k = 2, 3, 4 \tag{18}$$

4.2 비정규 분포로의 확장

비정규 분포에 대한 통계모멘트를 계산하기 위해 비정규분포를 그에 대응하는 정규분포로 바꾸는 방법을 이용한다.⁽⁶⁾ 이를 위해 많이 사용되는 방법은 RF(Rackwitz-Fiessler) 변환과 역 로젠블랏(Rosenblatt) 변환 등이 있다. RF 변환은 확률밀도 함수를 알 경우 이용할 수 있는 방법이고 역 로젠블랏 변환은 결합확률밀도 함수를 알 때 이용할 수 있다. 그러나 확률변수가 서로 독립일 때 결합 확률밀도함수는 각각의 확률밀도함수의 곱으로 쓸 수 있으므로 이 경우 두 변환은 같게 된다. 이 변환을 이용하여 $g = g(\mathbf{X})$ 통계모멘트를 정의하면 다음과 같다.

$$\mu = \sum_{i=1}^m P_i g [T^{-1}(u_i)] \quad (19)$$

$$M_k = \sum_{i=1}^m P_i g [T^{-1}(u_i) - \mu]^k \text{ for } k = 2, 3, 4 \quad (20)$$

여기에서 P_i, u_i 는 표준정규분포에 대응하는 가중치와 적분점이며 T^{-1} 은 역 로젠블랏변환이다. 이 식은 1 차원 문제에 해당하는 경우로 쉽게 다차원으로 확장이 가능하다. 결국 비정규 분포라 할지라도 바뀌는 것은 적분이 되는 적분점의 위치이며 가중치는 바뀌지 않게 된다.

5. 수치 예제

제안된 방법의 우수성을 확인해 보기 위해 5 종류의 문제에 적용해 보았다. 처음 3 종류의 문제는 정규분포에 대한 것이며 나머지 두 종류는 비정규분포에 대한 것이다. 크리깅 근사모델을 만들고 이를 이용하여 통계모멘트를 계산할 때 식 (17)과 (18)을 이용하여 수렴을 평가하고 이때 수렴상수는 10^{-4} 으로 하였다. 통계모멘트를 계산하기 위해 3 점 적분, 5 점 적분 및 크리깅 근사모델을 사용하였으며 이에 대응하는 파괴확률을 나타내었다. 정확한 통계모멘트와 파괴확률은 100 만 번의 몬테카를로 모의실험을 이용하여 구하였다. 각 예제의 표에서 '3 points'와 '5 points'는 주어진 함수를 이용하여 각각 3 점 및 5 점 적분을 수행한 경우이며 이때 계산량은 3"과 5"이 된다. 또한 'Krig_3', 'Krig_5', 'Krig_7'은 각각 크리깅 근사모델을 만들고 이를 이용하여 각각 3 점, 5 점, 7 점 적분을 한다는 것을 의미한다.

5.1 수치 예제 1

한계상태식은 $g(\mathbf{X}) = x_1^2 - 2x_2$ 이고, 정규분포이며 $\mu_1 = 10, \mu_2 = 20, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 5$ 이다.⁽⁵⁾ 먼저

통계모멘트에 대한 결과를 표 4에 나타내었다. 표 4에서 괄호안의 숫자는 함수의 계산회수를 의미한다. 이 표에서 5 점 적분 이상을 사용할 경우 정확한 통계모멘트가 얻어지는 것을 알 수 있다. 또한 크리깅 근사모델을 이용할 경우 5 점 적분을 위해서는 16 번, 7 점 적분을 위해서는 18 번의 실험점이 요구되며 이는 25 번의 함수 계산이 요구되는 '5 points'의 경우 보다 더 효율적이다. 또한 계산된 통계모멘트를 바탕으로 피어슨 시스템을 이용하여 구한 파괴확률은 표 5와 같다. 이때 중복되는 계산을 피하기 위해 'Krig_3'과 'Krig_5'의 결과만을 비교하였다. 이 표로부터 통계모멘트가 부정확한 'Krig_3'의 경우 오차가 상당히 큰 것을 알 수 있다.

Table 4 Results of statistical moments for example 1

	Mean	Standard deviation	Skewness	Kurtosis
3 points (9)	64.0000	41.6170	0.5345	3.1019
5 points (25)	64.0000	41.6170	0.5398	3.4137
Krig_3 (10)	64.0007	41.6184	0.5346	3.1019
Krig_5 (16)	64.0000	41.6174	0.5398	3.4137
Krig_7 (18)	64.0000	41.6173	0.53983	3.4137
Exact	64.0000	41.6173	0.5398	3.4137

Table 5 Results of the probability of failure for example 1 in case of $g(\mathbf{X}) < R$

R	Krig_3	Krig_5	MCS
-15	5.7634×10^{-3}	1.0922×10^{-2}	1.0915×10^{-2}
-20	2.0841×10^{-3}	6.2275×10^{-3}	6.3110×10^{-3}

Table 6 Results of statistical moments for example 2

	Mean	Standard deviation	Skewness	Kurtosis
3 points (27)	-3.0000	3.0000	-1.3333	4.3333
5 points (125)	-3.0000	3.0000	-2.0000	9.0000
Krig_3 (19)	-3.0000	3.0027	-1.3351	4.3321
Krig_5 (22)	-3.0000	3.0162	-1.9924	8.9403
Krig_7 (31)	-3.0000	3.0223	-1.9946	8.9585
Exact	-3	3	-2	9

Table 7 Results of the probability of failure for example 2 in case of $g(\mathbf{X}) < R$

R	Krig_3	Krig_5	MCS
-15	8.1786×10^{-4}	6.7977×10^{-3}	6.9340×10^{-3}
-20	0.0000	1.2874×10^{-3}	1.2240×10^{-3}

Table 8 Results of statistical moments for example 3

	Mean	Standard deviation	Skewness	Kurtosis
3 points (9)	4.1371	1.3031	0.1526	3.0190
5 points (25)	4.1371	1.3033	0.1620	3.1144
Krig_3 (12)	4.1371	1.3031	0.1526	3.0190
Krig_5 (17)	4.1371	1.3033	0.1620	3.1143
Krig_7 (20)	4.1371	1.3033	0.1620	3.1148
Exact	4.1371	1.3033	0.16200	3.1147

Table 9 Results of the probability of failure for example 3 in case of $g(\mathbf{X}) < R$

R	Krig_3	Krig_5	MCS
0	2.5702×10^{-4}	3.8322×10^{-4}	3.6800×10^{-4}
1	5.3187×10^{-3}	5.7987×10^{-3}	5.7100×10^{-3}

5.2 수치 예제 2

$g(\mathbf{X}) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ 이고 표준정규분포이다. 통계모멘트의 결과를 표 6에 나타내었다. 3 점 적분만으로는 왜도와 첨도를 정확히 계산하지 못하고 있으며 5 점 적분을 사용할 경우 정확하게 계산됨을 알 수 있다. 크리깅 근사 모델을 사용할 경우 계산량은 훨씬 더 줄어들며 왜도에서의 오차도 1% 미만으로 작은 것을 알 수 있다. 또한 Table 7 은 'Krig_5'의 결과가 몬테카를로 모의실험법의 결과에 더 가까운 것을 보여준다.

5.3 수치 예제 3

$g(\mathbf{X}) = \exp[0.2x_1 + 1.4] - x_2$ 이고 표준정규분포를 취하고 있다.⁽¹²⁾ 이전의 결과와 마찬가지로 3 점 적분만으로는 왜도와 첨도에 약간의 오차가 발생하며 5 점 적분을 해야 정확한 값을 구할 수 있다. 크리깅 근사 모델을 사용할 경우 7 점 적분이 가능한 구간에서 크리깅 근사 모델을 만들어도 실험점의 개수는 20 개로 25 개 보다 작은 것을 알 수 있다. Table 9 는 이런 결과를 바탕으로 'Krig_5'가 더 정확한 파괴확률을 계산할 수 있음을 보여준다.

Table 10 Results of statistical moments for example 4

	Mean	Standard deviation	Skewness	Kurtosis
3 points (27)	3.1431	0.9275	0.9861	3.5980
5 points (125)	3.1431	0.9296	1.1537	5.6351
Krig_3 (21)	3.1431	0.9246	0.9215	3.3161
Krig_5 (28)	3.1432	0.9297	1.1511	5.5343
Krig_7 (45)	3.1432	0.9296	1.1537	5.6376
Exact	3.1431	0.9296	1.1537	5.6397

Table 11 Results of the probability of failure for example 4 in case of $g(\mathbf{X}) < R$

R	Krig_3	Krig_5	MCS
1.5	0.0000	4.0868×10^{-3}	4.5610×10^{-3}
2.0	3.1607×10^{-2}	6.7065×10^{-2}	6.7208×10^{-2}

Table 12 Results of statistical moments for example 5

	Mean	Standard deviation	Skewness	Kurtosis
3 points (729)	270.002	103.108	-0.4644	3.0888
5 points (15625)	270.000	103.271	-0.5282	3.6076
Krig_3 (36)	269.999	103.048	-0.4698	3.1096
Krig_5 (50)	270.000	103.238	-0.5292	3.6119
Krig_7 (62)	270.003	103.229	-0.5321	3.6216
Exact	270.048	103.171	-0.5227	3.5986

Table 13 Results of the probability of failure for example 5 in case of $g(\mathbf{X}) < R$

R	Krig_3	Krig_5	MCS
0	1.0085×10^{-2}	1.2166×10^{-2}	1.2104×10^{-2}
5	1.1184×10^{-2}	1.3237×10^{-2}	1.3210×10^{-2}

5.4 수치 예제 4

$g(\mathbf{X}) = x_1^2x_2^2 + 2x_3^4$ 이고 각각은 모두 대수정규분포를 취하고 있으며 평균은 1, 표준편차는 0.1이다.⁽⁶⁾ Table 10 과 Table 11 을 참고하면 이전의 예제와 비슷한 경향을 알 수 있다. 특히 크리깅 근사 모델을 사용할 경우 계산량이 많이 감소되는 것을 확인할 수 있다.

5.5 수치 예제 5

$g(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 - 5x_6$ 이고 모두 대수정규분포를 취하고 있으며 평균과 표준편차는 각각 $\mu_1 = \dots = \mu_4 = 120, \mu_5 = 50, \mu_6 = 40$, $\sigma_1 = \dots = \sigma_4 = 12, \sigma_5 = 15, \sigma_6 = 12$ 이다.⁽⁵⁾ 이 문제의 경우 확률변수의 개수가 6개 이므로 5점 적분을 수행할 경우 계산량이 15625 번으로 계산량이 매우 많아지게 되지만 크리깅 근사모형을 사용할 경우 50개의 실험점을 이용하여 거의 정확한 통계 모멘트를 계산할 수 있다. 또한 Table 13에서 알 수 있듯이 통계모멘트의 값이 정확한 'Krig. 5'가 더 정확한 파괴확률을 계산하고 있음을 알 수 있다.

5.6 결과에 대한 고찰

5개의 수치예제를 통해 크리깅 근사모형을 이용할 경우 함수의 계산 회수를 상당히 많이 줄일 수 있음을 알 수 있다. 즉, 기존의 3점 적분이나 5점 적분을 이용할 경우 함수의 계산량이 3" 및 5"으로 증가하기 때문에 유한요소해석과 같이 한번의 함수계산에 시간이 많이 요구되는 경우 통계모멘트를 계산하는 것이 거의 불가능하다. 이에 비해 크리깅 근사모형을 이용할 경우 적분에서 가중치가 높은 축점에 초기 실험점을 배치하고 평균제곱오차가 최대가 되는 곳에 실험점을 한 개씩 추가해가며 한계상태식을 근사하므로 근사함수의 정확성이 꾸준히 개선되며 함수의 비선형성에 따라 적용형으로 근사가 가능하다. 즉 비선형성이 큰 경우 좀 더 많은 실험점이 필요하게 되며 선형에 가까운 경우 비교적 적은 회수의 실험점이 요구된다. 이와 같이 근사모델이 구성되면 실제 통계모멘트를 계산할 때는 비교적 계산이 빠른 근사모델을 이용하므로 효율성이 크게 향상될 수 있다.

또 한가지 고려해봐야 하는 것은 계산된 통계모멘트의 정확성을 어떻게 평가할 것이냐 하는 것이다. 기존의 방법들은 통계모멘트의 정확성에 대해 전혀 고려하지 않고 계산된 통계모멘트를 바탕으로 파괴확률을 계산하였다. 그러나 수치예제에서도 보았듯이 통계모멘트의 정확성은 파괴확률의 정확성에 큰 영향을 미치므로 이에 대한 평가는 매우 중요하다고 할 수 있다. 이와 관련하여 본 논문에서 제안한 크리깅 근사모델을 이용할 경우 5점 적분이 가능한 영역에서 근사모델을 만들면, 3점 적분의 결과를 5점 적분의 결과와 비교하여 3점 적분의 정확성을 평가할 수 있으며, 7점 적분이 가능한 영역에서 근사모델을 만들 경우 쉽게 5점 적분의 정확성을 평가할 수 있는 장점이 있다.

즉, 통계모멘트를 계산하기 위한 적절한 크리깅 근사모델은 3점 적분과 5점 적분의 통계모멘트가 같을 경우 5점 적분이 가능한 근사모델이 요구되며, 그렇지 않을 경우 7점 적분이 가능한 근사모델이 요구된다고 할 수 있다. 본 논문에서 고려되는 수치예제의 경우 모두 7점 적분을 하면 정확성을 평가할 수 있으며, 결과에서 알 수 있듯이 7점 적분을 하더라도 그 계산량은 5"보다 작은 것을 알 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 크리깅 근사모델을 이용하여 통계모멘트를 효율적으로 계산하는 방법에 대해 연구하였다. 좀더 정확한 통계모멘트를 계산하기 위해 초기 실험점을 수치적분의 가중치가 높은 점으로 선택하였으며 평균제곱오차가 최대가 되는 곳에 실험점을 추가해가며 근사모델을 개선하였다. 5개의 예제를 풀어본 결과 함수의 계산량이 상당히 줄어드는 것을 확인할 수 있었고, 설계변수의 개수가 많을수록 그 효과가 더욱 큰 것을 확인하였다. 또한 이전에는 거의 고려되지 않았던 통계모멘트의 정확성을 평가할 수 있는 방법에 대해 고려하였으며 크리깅 근사모델을 이용할 경우 비교적 적은 회수의 계산을 추가하여 쉽게 통계모멘트의 정확성을 평가할 수 있었다.

향후 연구 과제로는 수치적분 자체의 계산량을 줄이는 방법에 대한 연구가 요구된다. 비록 크리깅 근사모델을 사용한다 할지라도 3" 및 5"의 계산은 설계변수가 많을 경우 계산량이 많아지기 때문이다.

후기

이 연구는 자동차부품연구원의 연구 과제인 '신뢰성 확률해석 기법의 효율성 및 적용성 향상을 위한 연구'의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Rackwitz, R., 2001, "Reliability Analysis - A Review and Some Perspectives," *Structural safety*, Vol. 23, pp. 365~395.
- (2) Madsen, H. O., Krenk, S. and Lind, N. C., 1986, *Methods of Structural Safety*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
- (3) Hasofer, A. M. and Lind, N. C., 1974, "Exact and Invariant Second-Moment Code Format," *J. Engng Mech, ASCE*, Vol. 100, pp. 111~121.
- (4) Breitung, K., 1984, "Asymptotic Approximation for Multi-normal Integrals," *J. Engng Mech, ASCE*, Vol. 10, pp. 357~366.

- (5) Zhao, Y. G. and Ono, T., 2001, "Moment Methods for Structural Reliability," *Structural safety*, Vol. 23, pp. 47~75.
- (6) Zhao, Y. G. and Ono, T., 2000, "New Point-estimate for Probability Moments," *J Engrg Mech, ASCE*, Vol. 126, pp. 433~436.
- (7) Taguchi, G., 1978, "Performance Analysis Design," *Int J Prod Res*, Vol. 16, pp. 521~530.
- (8) Seo, H. S. and Kwak, B. M., 2002, "Efficient Statistical Tolerance Analysis for General Distributions Using Three-point Information," *Int J Prod Res*, Vol. 40, pp. 931~944.
- (9) Choi, H. S., 2005, *Moment Based Reliability Analysis for General Distributions Using Multi-level DOE*, Master's Thesis, KAIST
- (10) Lee., T. H., Jung., J. J., Hwang, I. K. and Lee, C. S., 2004, "Sensitivity Approach of Sequential Sampling for Kriging model," *Trans. of the KSME, A*, Vol. 28, No. 11, pp. 1760~1767.
- (11) Sacks, J., Welch, W. J., Mitchell, T. J. and Wynn, H P., 1989, "Design and Analysis of Computer Experiments," *Statistical Science*, Vol. 4, No. 4, pp. 409~435.
- (12) Kim, S. and Na, S., 1997, "Response Surface Method Using Vector Projected Sampling Points," *Structural Safety*, Vol. 19, pp. 3~19.