

< 논문 >

온도 의존성 물성치를 가지는 유한한 전도층에서의 전기/열하중을 받는 균열의 해석

장 용 훈[†] · 이 상 영^{*}

(2006년 1월 26일 접수, 2006년 5월 2일 심사완료)

Electrothermal Crack Analysis in a Finite Conductive Layer with Temperature-dependent Material Properties

Yong Hoon Jang and Sang Young Lee

Key Words : Electrical/Thermal Conduction(전기/열 전도), Crack(균열), Temperature-Dependent Material Property(온도 의존성 물성)

Abstract

The method of Greenwood and Williamson is extended to obtain a solution to the coupled non-linear problem of steady-state electrical and thermal conduction across a crack in a conductive layer, for which the electrical resistivity and thermal conductivity are functions of temperature. The problem can be decomposed into the solution of a pair of non-linear algebraic equations involving boundary values and material properties. The new mixed-boundary value problem given from the thermal and electrical boundary conditions for the crack in the conductive layer is reduced in order to solve a singular integral equation of the first kind, the solution of which can be expressed in terms of the product of a series of the Chebyshev polynomials and their weight function. The non-existence of the solution for an infinite conductor in electrical and thermal conduction is shown. Numerical results are given showing the temperature field around the crack.

1. 서론

정밀 전자장비들의 신뢰성을 확보하기 위하여 전기/열의 전도성을 가지는 물체의 전기 및 열 거동을 분석하고 추정하는 일은 매우 중요하다.⁽¹⁾ 트랜지스터가 고주파로 작동이 되는 통신장비와 같은 회로에 있어서, 표면효과를 가지는 장치들은 시스템의 오동작을 유발하는 핫캐리어 전류에 민감하다.⁽²⁾ 그러한 장치들은 일반적으로 전기적 불평형과 연동되는 열 전달 문제들을 동반하므로, 도체 내에서 결합이 있는 금속산화 반도체들의 정확한 거동을 추정하기 위해서는 열에 관한 해석을 중요하게 다루어야 한다.

일반적으로 도체 내에서의 전류의 흐름은 저항에 의한 Joule heating 을 유발하여 결국 열이 발생한다. 이 때에 전기 저항은 균열의 끝 부분이나 그 주위에 집중적인 높은 온도를 유발한다. 이와 더불어, 전기 저항은 온도에 따라 더욱 심각하게 증가하게 되어 열과 전기 간의 비선형 문제를 야기시키며, 중국에는 국지적인 불안정화를 초래한다. 이러한 효과들은 전기와 열의 전도로 인한 열응력을 더욱 가중 시킨다.

온도에 의해 저항이 변화하는 물질에서의 전기적 흐름의 문제는 일반적으로 이론적인 접근이 불가능하다. Kohlrausch⁽³⁾는 전류가 등전위 면과 등온면을 통해서만 형성되고 나머지 면은 열과 전기가 절연이 되어 있을 때에, 등전위 면과 등온면이 일치하게 되는 온도와 전위의 일대일 관계가 성립됨을 보였다. 이에 Greenwood 와 Williamson⁽⁴⁾은 Kohlrausch⁽³⁾의 결과에 Diesselhorst⁽⁵⁾의 추가적인 결과를 더하여, 온도 종속성 물성치를 가지는 동일한 두 도체들의 원형 접촉면사이의 전류현상에 적용하였다. 그러나 그들은 접촉면으로부터 떨어

[†] 책임저자, 회원, 연세대학교 기계공학부

E-mail : jyh@yonsei.ac.kr

TEL : (02) 2123-5812 FAX : (02) 312-2159

* 연세대학교 대학원 기계공학부

진 곳의 온도가 동일하며 대칭이 되는 그러므로 접촉면에서 최대 온도가 발생하는 경우만을 고려하였고, 최근에는 경계온도가 동일하지 않으며 최대온도가 물체 내에서 발생하지 않는 일반적인 문제를 Fournet⁽⁶⁾가 다루었다. Jang 등⁽⁷⁾은 전기와 열의 전도 문제가 결합된 서로 다른 물질간의 비선형 정상상태의 해답을 얻기 위하여, Greenwood와 Williamson⁽⁴⁾의 정리를 확장하여 서로 다른 반 무한체 내에서 단일 또는 다수의 접촉면이 나타나는 문제를 해결하였다. 전기와 열의 하중에 노출된 도체들에 대하여, Saka와 Abe⁽¹⁾는 전기와 열의 하중을 받는, 일정한 물성치의 도체에 대하여, 균열 끝단 주위의 정상상태 온도 분포를 분석하였다. 특별히 Wang 등⁽⁸⁾은, 무한 영역에서 일정한 유속(flux)을 갖는 전기/열의 전도에 대하여 이론해를 제시 하였다. 그러나, 온도 종속성 물성치를 가지는 도체에 대하여, 열과 전기 전도에 대한 무한 도체의 해는 존재하지 않을 수 있다. 따라서 계산하고자 하는 실제 도체가 적어도 한 방향으로 유한한 층을 갖는 것이 일반적이기 때문에 우리는 균열을 포함하는 유한한 도체층에 대하여서만 초점을 맞출 것이다.

이 연구에서 우리는 사실상 온도에 종속된 전기 저항과 열전도율을 가지는 도체 내에서, 균열 주위의 전기/열 전도 문제에 대하여 Greenwood와 Williamson⁽⁴⁾의 정리를 확장할 것이다. 우리는 이러한 문제들이 경계값들과 물성치들로 구성이 되어 있는 비선형 대수 방정식들의 해로 재구성 될 수 있음을 논증할 것이며, 전도층 균열에서의 혼합된 경계값 문제를 수행하기 위하여, Chebyshev 다항식들과 그 가중 함수의 연속적인 곱으로 표현 될 수 있는 제 1종 특이 적분 방정식을 푸는 형태로 문제가 간략화 됨을 보일 것이다. 또한 온도의존성 물성치를 가지는 무한 도체에 대하여 해가 존재하지 않음을 보여줄 것이며, 마지막으로 수치 해석의 방법을 통해서 열과 전기의 부하에 놓여진 유한 층에서의 온도 분포를 보여줄 것이다.

2. 전기/열 전도 이론

전류가 흐르는 단일 물체 Ω를 고려하자. 두개의 등전위와 등온면들 S₁, S₂ 을 통해서 전류가 들어오며 나간다고 가정하며, 이때 각각의 면에서의 전위와 온도는 (φ₁, θ₁), (φ₂, θ₂) 로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi_1, \quad \theta(r) = \theta_1, \quad \forall r \in S_1 & (1) \\ \phi(r) &= \phi_2, \quad \theta(r) = \theta_2, \quad \forall r \in S_2 & (2) \end{aligned}$$

여기서 r 은 저항체 Ω 내의 위치에 관한 변수를 나타내며, S₀ 는 Fig. 1에서와 같이 열과

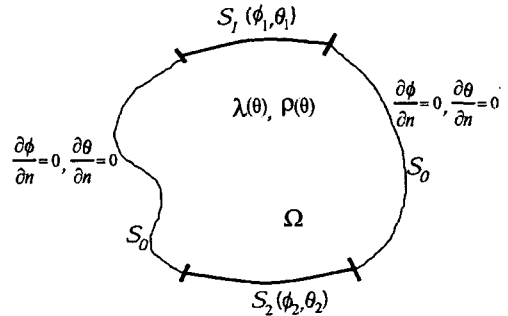


Fig. 1 Configuration of a conductor with electrical and thermal boundary conditions

전기에 대하여 절연된 나머지 면을 나타낸다.

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \theta(r)}{\partial n} = 0, \quad \forall r \in S_0 \quad (3)$$

전기 전도에서의 옴의 법칙은 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{\rho} \nabla \phi \quad (4)$$

여기서 φ는 전위이고 ρ는 전기저항이다. 또한 키르히호프의 법칙은 다음과 같다.

$$\text{div} \cdot J = \text{div} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \phi \right) = 0 \quad (5)$$

푸리에의 열전도 법칙은 다음과 같다.

$$q = -\lambda \nabla \theta \quad (6)$$

q는 열의 유동 벡터이며, θ는 온도, 그리고 λ는 열 전도율을 나타낸다. 물질 내에서의 저항 손실은 매개체에서 단위 부피당 열의 생성을 유도하므로, q=|J|²ρ 정상상태의 전도 방정식은 단위 부피당 생성된 열로 기술 한다.

$$Q = \text{div} \cdot q = \text{div} \cdot (-\lambda \nabla \theta) = \frac{1}{\rho} |\nabla \phi|^2 \quad (7)$$

2.1 온도와 전위 사이의 관계

Greenwood와 Williamson⁽⁴⁾은 이러한 전기와 열의 전도에 있어서, 저항체를 통해서 온도와 전위사이의 관계가 간단한 형태로 정의 될 수 있음을 보였다.

$$\phi = \pm \sqrt{2 \int_0^{\theta} \lambda \rho d\theta} \quad (8)$$

θ_m은 최대 온도이며, 편의상 0 전위는 θ=θ_m 지점에서 정의되는 것으로 가정 하였으며, 이러한 가정으로 등온선 θ=θ_m는 도체를 두 개의 부분으로 분리 한다. 둘 중 하나는 식 (8)에서 양의 기호로 취해지며, 음의 기호는 다른 부분에서 취해 진다.

온도가 도체 전체를 통해서 단조롭게 변화하거나, 또는 온도의 최대치가 물체 내에서 나타나지 않는 경우가 발생할 수 있다. 이러한

종류의 문제들은 도체를 θ_m 이 나타나는 좀더 큰 가상의 도체의 일부로 간주함으로써 다루어질 수 있으며, 이러한 경우들 중 어떠한 경우가 발생할 지를 결정하기 위하여 다음을 정의한다.

$$X = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta = \phi_1^2 - \phi_2^2 = U(\phi_1 + \phi_2) \quad (9)$$

$U = (\phi_1 - \phi_2)$ 는 전위 차이를 나타내며, 다음과 같은 표현이 가능하다.

$$2\phi_1 \equiv (\phi_1 + \phi_2) + (\phi_1 - \phi_2) = \frac{X}{U} + U \quad (10)$$

$$2\phi_2 \equiv (\phi_1 + \phi_2) - (\phi_1 - \phi_2) = \frac{X}{U} - U \quad (11)$$

그리고 이 수식들을 곱함으로써 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$4\phi_1\phi_2 = \frac{X^2}{U^2} - U^2 \quad (12)$$

이때, $U^4 > X^2$, $\phi_1\phi_2 < 0$ 조건이면 최고온도는 도체 내에 존재하며, 반면 $U^4 < X^2$, $\phi_1\phi_2 > X^2$ 와 같은 조건이면 온도는 도체 내에서 단조롭게 변화한다. 이러한 조건들은 다음과 같이 좀더 명확하게 설명될 수 있다. 만약 $U^4 > X^2$, $\phi_1\phi_2 < 0$ 라면, 경계 부위의 양과 음의 전위가 반드시 존재해야 하므로, 최고 온도가 발생하는 0의 전위 지점은 도체 내에 반드시 존재한다. 또 다른 조건인 $U^4 < X^2$, $\phi_1\phi_2 > X^2$ 에서는 도체 내에서 온도가 단조롭게 변화 하므로, 최고온도가 도체의 외부에 존재하는 가상 영역에서 발생하게 된다. 실질적인 문제에 있어서는, θ_1, θ_2 온도들과 전위차 U 를 알 수 있다. 경계면을 가정하여 $\theta_2 > \theta_1$ 이 되는 S_1, S_2 를 선정한다. 식 (8)로부터 $|\phi_1| > |\phi_2|$ 조건을 활용하여 적절한 부호를 식 (8)에 부과한다면, 다음과 같이 구성된다.

$$\phi_1 = \text{sgn}(U) \sqrt{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta} \quad (13)$$

$$\phi_2 = \text{sgn}(U) \text{sgn}(X^2 - U^4) \sqrt{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta} \quad (14)$$

여기서 $\text{sgn}(x)$ 는 부호 함수로써 $x > 0$ 일 경우 1과 동일하며, $x < 0$ 일 경우 -1과 동일하다. 이러한 결과물을 $U = (\phi_1 - \phi_2)$ 에 대입한 후 간략화 한다면, 다음과 같은 비선형 식을 얻게 된다.

$$|U| = \sqrt{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta} - \text{sgn}(X^2 - U^4) \sqrt{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta} \quad (15)$$

최대치 온도 θ_m 에 대하여 식 (15)로부터,

$$\text{sgn}(X^2 - U^4) \sqrt{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta} = \sqrt{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta} - |U| \quad (16)$$

이 식의 양변을 제곱한다면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$2|U| \sqrt{2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta} = U^2 + 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta \quad (17)$$

$$[\text{sgn}(x)]^2 = 1 \quad (18)$$

다시 한번 양변을 제곱한다.

$$2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta = \frac{1}{U^2} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda \rho d\theta + \frac{U^2}{2} \right]^2 \quad (19)$$

우변은 오직 θ_1, θ_2, U 에만 종속적이고 항상 양수인 반면에, 좌변은 $\theta_m = \theta_1$ 에서 0 이고 $\theta_m \rightarrow \infty$ 에 따라서 무한대로 증가하는 양의 단조 함수 형태를 보인다. 결론적으로 어떠한 수치의 θ_1, θ_2, U 이나 어떠한 물질에 대해서라도 θ_m 에 대한 해는 존재하게 된다.

2.2 온도와 전위의 공간상 분포도의 결정

Greenwood와 Williamson⁽⁴⁾에 따르면, 함수 ψ 는 다음과 같이 정의된다.

$$J = \nabla \psi \quad (20)$$

$$\nabla^2 \psi \equiv \text{div} \cdot J = 0 \quad (21)$$

함수 ψ 에 대한 구체적인 기술은 다음과 같다.

$$\psi = \text{sgn}(\phi) \int_{\theta}^{\theta_m} \left[2 \int_{\theta}^{\theta_m} \lambda \rho d\theta \right]^{-1/2} \lambda d\theta \quad (22)$$

이러한 정의로부터 등온선 $\theta = \theta_m$ 은 ψ 값이 0일 때로 정해지며, 2.1장의 과정으로부터 ψ 의 부호가 ϕ 와 일치한다는 사실이 결정됨을 알 수 있다. 특별히 S_1, S_2 의 ψ 수치들은 각각 식 (13)과 (14)로부터 다음과 같다.

$$\psi_1 = \text{sgn}(U) \int_{\theta_1}^{\theta_m} \left[2 \int_{\theta}^{\theta_m} \lambda \rho d\theta \right]^{-1/2} \lambda d\theta \quad (23)$$

$$\psi_2 = \text{sgn}(U) \text{sgn}(X^2 - U^4) \int_{\theta_2}^{\theta_m} \left[2 \int_{\theta}^{\theta_m} \lambda \rho d\theta \right]^{-1/2} \lambda d\theta \quad (24)$$

이러한 결과들은 S_1, S_2 상의 (23)과 (24)의 경계조건들과 도체의 나머지 면에서의 단열경계조건인 $\partial\psi/\partial n = 0$ 을 만족하는 조화함수 ψ 를 결정하는 문제로 귀결된다. 만약 $\psi(r)$ 가 위치 r 의 함수로써 구해지면, 온도분포 θ 는 식 (22)를 변환시킴으로써 찾아낼 수 있다. 이와 더불어 경계조건들과 단열 조건을 만족시키는 함수 ψ 를 찾아낼 수 있다면, 이러한 해석은 3차원 형상에도 적용 가능하다.

이러한 결과의 가장 큰 이점은 온도와 전위를 나타내는 열과 전기의 비선형 경계값 전도 문제가, 경계값들이 ψ 항에 의해서 표현되는 ψ 함수의 경계치 문제로 풀 수 있다는 사실이다.

2.3 무한 도체 내에서의 해의 부재

조그만 구멍이나 균열에 의한 전류나 열이 그 주위에서 크게 변화하는 전기 혹은 온도장의 문제는, 대개 무한 영역의 일정한 유속경계조건을 통해서 풀이될 수 있다.⁽⁸⁾ 그러나 이러한 문제들은 전기와 열의 전도 상태에서 해가 존재하지 않을 수 있다.

유한한 도체에 있어서, $+U/2$ 와 $-U/2$ 의 전위를 가지는 경계들에서의 전위 문제는 해를 가질 수 있다. 유한 접촉면을 통한 두개의 면들의 접촉에 있어서, 이러한 경우 또한 상기와 같은 형태의 해가 존재 하지만, 무한 도체에 있어서는 그러한 해가 존재하지 않는다. 간단히 y 가 일차원 좌표계인 선형의 전도 문제를 생각해 본다면, 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$U = -\rho J y \tag{25}$$

J 가 일정하다면, $y \rightarrow \pm\infty$ 일 때에 $U \rightarrow \pm\infty$ 이라 같이 변화한다. 유한 영역에 초점을 맞추어 전류와 전위 변화 관계를 간략히 논의한다면, 일정한 물성치를 가지는 선형 전기 전도 문제에 있어서는 이와 같은 현상은 아무런 문제가 되지 않는다. 그러나 선형의 전기/열 현상에 있어서는 이러한 점이 문제를 야기할 수 있다.

우선 $x = \pm\delta$ 측면이 절연되어 있고 $y = \delta$ 와 $y = -\delta$ 사이에서 전기를 형성하는 유한 사각판을 생각해 본다면 도움이 될 것이다. 식 (25)가 여전히 유효하며, 경계들의 전위는 $\mp \rho J \delta$ 이고 분명하게 이 식을 ∓ 1 로써 일반화 시키는 일이 가능하다.

$$g = -\frac{y}{\delta} \tag{26}$$

그러나 결과 함수가 유한 영역에서는 0이 될 것이므로, $\delta \rightarrow \infty$ 는 성립할 수 없다.

경계들에서의 온도는 모두 0이며 전류 밀도 J 는 고정되어 있다고 가정 한다. 선형의 경우에는, 열 생성률이 단위 체적당 ρJ^2 이며, 온도 분포는 다음과 같다.

$$\theta(y) = \frac{\rho J^2 (\delta^2 - y^2)}{2\lambda} \tag{27}$$

이 식에서 $y = 0$ 에서 최대 온도 $\rho J^2 \delta^2 / 2\lambda$ 를 가진다. $\delta \rightarrow \infty$ 같이 변화한다면 분명히 이 수식은 무한으로 발산한다. 물성치들이 온도에 따라 변화한다면 아마도 최고치 온도는 증가하겠지만, 전반적인 효과는 비슷할 것이다.

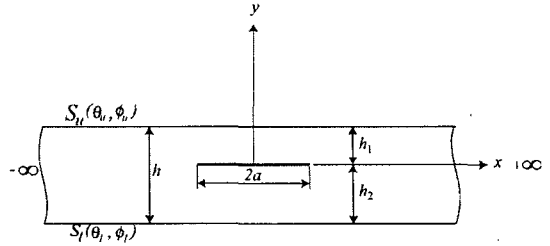


Fig. 2 Configuration of a layer containing a crack

3. 도체층 내에서의 균열의 분석

균열이나 홈과 같은 기하학적 불연속에 의하여 열이나 전류의 균일한 흐름이 방해 받을 때에, 그곳에는 전위 또는 열의 변화 기울기는 크게 된다. 온도와 전위는 균열 주위에서 비연속적일 것으로 기대되나, 균열을 따라서 이러한 양들의 미분계수를 얻는다면 이는 연속적임을 확인할 수 있다. 균열의 끝단 주위에서는 온도와 전위의 함수가 \sqrt{r} 형태의 특이점들을 갖으며, r 는 2차원 공간 상에서의 균열 끝단까지의 거리를 나타낸다. 전기와 열의 유동이 $1/\sqrt{r}$ 의 특이점을 가질 것이기에, 균열 끝단 주위의 저항열은 문제가 될 수 있으며, 이번 연구는 이러한 효과를 조사할 것이다.

Fig. 2에서 보여짐과 같이 $2a$ 길이의 선형 균열을 포함하는 층의 문제를 생각해 보자. 문제의 형상과 그 결과들은 x - y 의 2차원 평면으로 국한하며, 층의 두께 $h = h_1 + h_2$ 이다. 층 내부의 등전위 등은 면들 S_u 그리고 S_l 은 각각 (온도 θ_u , 전위 ϕ_u), (θ_l , ϕ_l)로 유지 된다. 균열의 표면은 절연되어 있는 것으로 가정 하고, 층은 온도의 함수를 가지는 열전도율 λ 와 전기 저항 ρ 의 물질로 구성되어 있다. S_u 와 S_l 사이에 전위차 $U = \phi_u - \phi_l$ 를 가하여, 온도와 전위장을 결정하는 것이 목적이다.

3.1 전기와 열의 경계 조건들

전기과 열의 전도에 있어서 경계값 문제들에 대한 특정한 해를 얻기 위해서는, 몇개의 적절한 경계 조건들이 적용 된다. 층의 경계면들인 S_u, S_l 상에서, 온도와 전위는 다음과 같이 기술 된다.

$$\theta(x, h_1) = \theta_u, \quad \theta(x, -h_2) = \theta_l, \quad |x| < \infty \tag{28}$$

$$\phi(x, h_1) = \phi_u, \quad \phi(x, -h_2) = \phi_l, \quad |x| < \infty \tag{29}$$

경계면의 가로지르는 열유동과 전류밀도에 대한 연속 조건들은 다음과 같이 부과된다.

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, +0) = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, -0), \quad |x| < \infty \quad (30)$$

$$J_y(x, +0) = J_y(x, -0), \quad |x| < \infty \quad (31)$$

앞에 붙여진 +0/-0는 층의 상위/하위 지역으로부터 접근된 균열을 포함하는 공동면을 나타내고 있으며, 균열을 포함하는 평면 상에는 열과 전기의 경계 조건들이 결합되어 다음과 같이 기술 된다.

$$\theta(x, +0) = \theta(x, -0), \quad |x| > a \quad (32)$$

$$\phi(x, +0) = \phi(x, -0), \quad |x| > a \quad (33)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, +0) - \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, -0) = 0, \quad |x| < a \quad (34)$$

$$J_y(x, +0) - J_y(x, -0) = 0, \quad |x| < a \quad (35)$$

전기와 열의 전도 문제가 식 (22)의 조화함수 ψ 를 결정하는 문제로 간략화 되므로, (28)에서 (35)에 이르는 경계 조건들이 ψ 함수의 항으로 다음과 같이 전환될 수 있다.

$$\psi(x, h_1) = \psi_u, \quad \psi(x, -h_2) = \psi_l, \quad |x| < \infty \quad (36)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, +0) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, -0), \quad |x| < \infty \quad (37)$$

$$\psi(x, +0) = \psi(x, -0), \quad |x| > a \quad (38)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, +0) - \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, -0) = 0, \quad |x| < a \quad (39)$$

$$\psi_u = \text{sgn}(U) \int_a^{\infty} \left[2 \int_b^{\infty} \lambda \rho d\theta \right]^{-1/2} \lambda d\theta \quad (40)$$

$$\psi_l = \text{sgn}(U) \text{sgn}(X^2 - U^4) \int_b^{\infty} \left[2 \int_a^{\infty} \lambda \rho d\theta \right]^{-1/2} \lambda d\theta \quad (41)$$

그러므로 $\psi(x, y)$ 가 (36)에서 (39)에 이르는 조건들로부터 x 와 y 의 위치에 관한 함수로 얻어진다면, 관련된 온도 θ 는 (22)의 식을 변환함으로써 얻어질 수 있다.

3.2 특이 적분 방정식

혼합 경계치 문제에 있어서, 식 (36)~(39)에서 제안된 바와 같이, 푸리에 적분변환 방법이 사용됨으로써 그 문제가 특이 적분 방정식의 형태로 표현될 수 있음이 보고되었다.⁽⁹⁾ 우리는 이러한 방법을 혼합 경계치 문제를 해결하기 위하여 사용할 것이다.

식 (21)에서는 ψ 함수에 관한 지배 방정식이 주어 진다. 함수 ψ 와 x 에 관한 1계 미분계수의 제한조건 하에서 $|x| \rightarrow \infty$ 이라면, $\psi(x, y)$ 에 대한 일반적인 해가 다음의 푸리에 적분 변환을 통해서 얻어질 수 있다.

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int (A_1 \cosh sy + A_2 \sinh sy) e^{-ixs} ds \quad (42)$$

s 는 푸리에 변수이며 $i = \sqrt{-1}$, $A_j = A_j(s)$, $j=1, 2$ 는 경계 조건들을 통해서 결정 할 수 있다. 혼합 경계치 문제를 공식화 하는데에 추가적인 관계를 제공하기 위하여, 유동형태의 보조함수는 다음과 같이 정의 된다.

$$\chi(x) = \frac{\partial}{\partial x} [\psi(x, +0) - \psi(x, -0)], \quad |x| < \infty \quad (43)$$

연속성과 균열 외부의 single-valuedness를 얻기위한 조건들에 의하여 다음과 같이 제한된다.

$$\chi(x) = 0, \quad |x| > a \quad (44)$$

$$\int_a^{\infty} \chi(x) dx = 0 \quad (45)$$

식 (36), (37), (43)을 적용함으로써, 미지수 A_j 는 식 (44)와 (45)의 제한에 종속된 보조함수의 항들으로써 표현될 수 있다. 그러므로 균열표면들의 혼합된 조건과 식 (39)로부터, χ 에 관한 적분 방정식은 다음과 같이 얻어지게 된다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} ds + \frac{1}{2\pi} \int H(x, t) \chi(t) dt = 0 \quad (46)$$

$H(x, t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$F(s) = s \left(\frac{\psi_u \cosh sh_2 - \psi_l \cosh sh_1}{\sinh sh_1 \cosh sh_2 + \sinh sh_2 \cosh sh_1} \right) \quad (47)$$

$$H(x, t) = i \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{is(t-x)} ds \quad (48)$$

$$h(s) = \left(\frac{-\cosh sh_1 \cosh sh_2}{\sinh sh_1 \cosh sh_2 + \sinh sh_2 \cosh sh_1} \right) \quad (49)$$

$F(s)$ 와 $h(s)$ 는 다음과 같이 큰 값의 $|s|$ 에 대하여 점근적 거동을 보임으로써, s 에 대한 연속적인 함수가 된다.

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad (50)$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} h(s) = -\frac{s}{2|s|} \quad (51)$$

앞서 언급한 내용으로부터, 핵 $H(x, t)$ 의 특이점이 $|s| \rightarrow \infty$ 함에 따른 피적분 함수의 점근적 거동에 기인하고 있음이 명백해 지며, 이러한 특이 부분을 분리한다면 핵은 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$H(x, t) = W(x, t) + \int \sin s(t-x) ds \quad (52)$$

우변을 적분하는 방법은 다음과 같이 푸리에의 일반화된 적분 표현법을 사용한다면 간략히 수행될 수 있다.

$$\int \sin s(t-x) ds = \frac{1}{t-x} \quad (53)$$

그리고 $W(x,t)$ 는 다음과 같이 정의되는 bounded Fredholm kernel 이다.

$$W(x,t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[h(s) + \frac{1}{2} \right] \sin s(t-x) ds \quad (54)$$

결과적으로 식 (52)를 (46)으로 대치한다면, 제 1 종의 특이 적분 방정식이 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(t)}{t-x} dt + \int_a^{\infty} W(x,t)\chi(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (55)$$

3.3 특이 적분 방정식의 해

단위 구간에서 정의된 특별한 함수들의 활용을 통해서 적분 방정식의 해를 얻을 수 있다는 사실에 기초하여, 독립변수 x,t 가 다음과 같이 균열 길이의 절반에 대하여 무차원화 된다.

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \tau = \frac{t}{a} \quad (56)$$

이후 특이 적분 방정식 (55)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi(a\tau)}{\tau-\xi} d\tau + a \int_1^{\infty} W(a\xi, a\tau)\chi(a\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-isa\xi} ds \end{aligned} \quad (57)$$

상기의 적분 방정식의 특이성이, Chebyshev 제 1 종 다항식 $T_n(\tau)$ 의 가중함수에 대응하는 $1/\sqrt{1-\tau^2}$ 에 의하여 특징지어짐을 알 수 있으므로, Muskhelishvili⁽¹⁰⁾ 특이 적분 방정식의 해는 다음과 같은 무한급수의 형태로 표현될 수 있다.

$$\chi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_{2n-1}(\tau) \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\xi)} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{for } n=0, & |\xi| < 1 \\ U_{n-1}(\xi), & \text{for } n \geq 1, & |\xi| < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (59)$$

여기서 $a_n, (n \geq 1)$ 은 결정되어야 할 미지의 상수들이다. 식 (58) 내에서 사용된 급수가 동등하게 식 (45) 내에서의 적합 조건들을 만족시킨다는 사실에 유념해야 한다. 이후에는 적분 방정식이 a_n 에 대한 선형 대수 방정식의 형태로 간략화 될 수 있다.

식 (58)을 (57)에 대치한 후 제 2종 Chebyshev

다항식, $U_n(\xi)$ 이 포함된 다음과 같은 $T_n(\tau)$ 공식 (57)에 대하여 적분 방정식의 특이점이 제거되어 상기와 같이 표현 된다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} U_{2n-2}(\xi) + E_n(\xi) \right\} a_n = P(\xi) \quad (60)$$

$$E_n(\xi) = \frac{a}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{W(a\xi, a\tau) T_{2n-1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \quad (61)$$

$$P(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-isa\xi} ds \quad (62)$$

다음과 같이 주어진 $U_n(\xi)$ 에 대한 직교성을 근거로 한다.

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_k(\xi)U_n(\xi)\sqrt{1-\xi^2}d\xi = \begin{cases} 1, & k=n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (63)$$

a_n 을 결정하기 위한 선형 대수 방정식들의 무한계를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\pi}{4} a_k + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{kn} a_n = g_k, \quad k=1,2,\dots \quad (64)$$

$$Y_{kn} = \int_{-1}^1 E_n(\xi)U_{2k-2}(\xi)\sqrt{1-\xi^2}d\xi \quad (65)$$

$$g_k = \int_{-1}^1 P(\xi)U_{2k-2}(\xi)\sqrt{1-\xi^2}d\xi \quad (66)$$

실제로, 식 (58)의 급수는 상수 $a_n, n=1,2,\dots,N$ 에 대한 $N \times N$ 의 선형대수 방정식들을 만들며, 이러한 수는 상당한 정도의 정확도를 가지는 해를 만들어 내기에 충분할 만큼 크다고 여겨지기 때문에, 처음 N 항까지만 고려한다. 수치 해석의 도식을 위해서, 충분한 정확도까지 해를 수렴시키기 위한 12항의 Chebyshev 다항식을 바탕으로 특정 결과들을 얻는다. 식 (61),(65),(66)과 같은 Chebyshev 형태의 적분들은 Gauss-Chebyshev 방법을 이용해 풀 수 있지만, 식 (54),(62)와 같은 이상적분 들은 Gauss-Legendre 구적법을 이용해서 풀이된다.⁽¹¹⁾

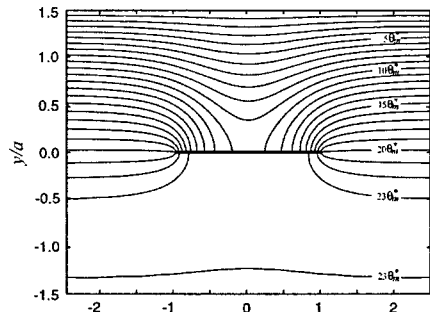


Fig. 3 Isothermal contours for $|U| = 0.05V$ where $\theta_m^* = \theta_m / 24$ and $\theta_m = 106.63^\circ C$.

식 (64)로부터 결정된 상수를 이용하여, 식 (42) 내의 미지수 $A_j(s)$, $j=1,2$ 들이, 식 (58) 내의 보조함수 $\chi(\tau)$ 에 의하여 구해질 수 있다. 결과적으로, 층 내부 ψ 의 완전한 장의 분포를 얻는 일이 가능하게 된다. $\psi(x,y)$ 가 위치의 함수로 알려진다면, 관련된 온도 θ 는 식 (22)를 변환시킴으로써 얻어질 수 있다.

4. 수치 해석의 결과

온도의 분포는 두개의 독립적인 과정을 처리함으로써 식 (22)로부터 얻어질 수 있다. 첫번째 처리는 층내의 균열 상에서 혼합 경계치 문제를 사용 함으로써 위치에 관한 ψ 함수를 찾는 것이다. 혼합 경계치 문제 내에서 만약 경계상의 온도들과 전위가 각각 $\theta_u, \theta_l, U=|\phi_u - \phi_l|$ 와 같이 주어진다면, 식 (58)의 계수 a_n 에 관해서 표현된 보조함수 $\chi(\tau)$ 에 관하여 식 (42) 내의 미지수 $A_j, (j=1,2)$ 는 풀이 될 수 있으므로, 계수 a_n 의 값들이 결정되며 ψ 의 분포는 얻어질 수 있다. 제 3장의 분석을 통해서 전반적인 계산이 수행될 수 있다. 두번째 처리는 온도에 관한 포괄적 표현으로써의 함수 ψ 를 식 (22)를 반전 시킴으로써 찾아내는 것이다. 물성치인 λ, ρ 는 함수 형태로 주어져야 한다.

방법의 사용을 도식화 하기 위하여, 재료는 알루미늄으로 선택하며 물성치는 다음과 같다.

$$\lambda = \lambda_0 = 240 W m^{-1} K^{-1}, \rho = \rho_0 (1 + \alpha \theta),$$

$$\rho_0 = 2.5 \times 10^{-8} \Omega m, \alpha = 0.004 K^{-1}$$

균열의 길이의 너비 $2a$ 는 $h/a = 1.5$ 로써 취해지고 $h_1 = h_2 = h$, 윗부분과 아랫 부분의 경계는 각각 $\theta_u = 0^\circ C, \theta_l = 100^\circ C$ 이다. 최고치 온도는 식 (15) 또는 (19)로부터 얻어질 수 있고, 함수 ψ 는 식 (22)로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\psi = \text{sgn}(\phi) \left[\frac{\lambda_0}{\alpha \rho_0} \right]^{1/2} \cos^{-1} \frac{1 + \alpha \theta}{1 + \alpha \theta_m} \quad (67)$$

여기서 $\psi(x,y)$ 은 3 장의 해석으로 위치에 관한 함수로써 알려진다면, 대응하는 온도 θ 는 식 (67)을 반전함으로써 찾을 수 있으며, 온도에 관한 등고선이 $|U| = 0.05V$ 에 대해서는 Fig. 3 에서, $|U| = 0.12V$ 에 대해서는 Fig. 4에서 나타나고 있다. 이러한 그림 결과들은 균열 끝단 주위에서의 기하학적 특이성과 전기와 열 전도상태에서 Joule heating 효과가 결합되어 나타난 것이다.

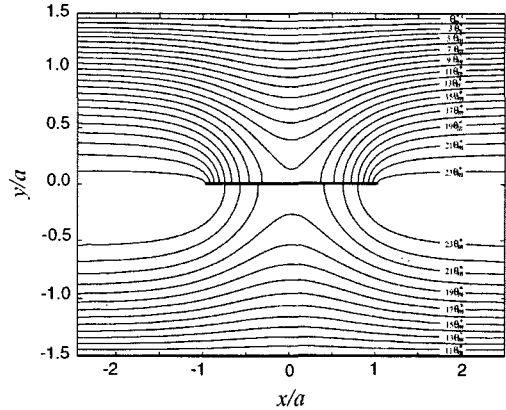


Fig. 4 Isothermal contours for $|U|=0.12V$ where $\theta_m^* = \theta_m / 24$ and $\theta_m = 243.96^\circ C$

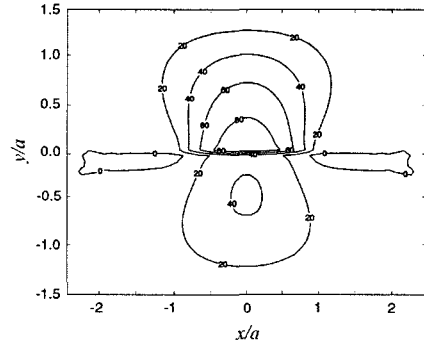


Fig. 5 Temperature difference contours for $|U|=0.12V$ between the locations nearer and farther from the crack

$|U| = 0.05V$ 이하의 작은 전위차 하에서는, 균열로부터 멀리 떨어진 위치의 온도는 물체를 통해서 단조롭게 변화 하지만, 균열의 존재로 인하여, 균열주위의 온도와 열유동이 비연속적으로 형성되며 열과 전류의 흐름이 방해 받는다. 그러나 균열에 의해서 열과 전류의 흐름은 그 주위로부터 방해받아, 온도는 불연속이며 온도의 수직 미분 항인 열유속은 연속적이어서 균열 주위에서 온도구배가 국지적으로 증대되게 된다. 이러한 온도의 불안정은 주로 기하학적 특이성의 효과로 인함이다.

$|U| = 0.05V$ 이상의 큰 전위차 하에서는, 경계들의 온도 θ_u, θ_l 보다 큰 수치의 최고치 온도가 Joule heating 효과로 인하여 물체 내에 위치하게 된다. 균열 주위에서는 온도가 불연속적이며 온도 구배의 국지적 증대 또한 균열 끝단에서 보여지고 온도는 주로 기하학적 불연속성으로 인하여 교란되며 도체 내의 모든 위치에서 Joule Heating

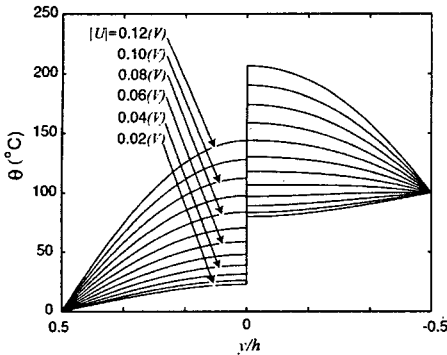


Fig. 6 Through the thickness temperature profiles at $x=0$ in a strip containing a crack at the midplane for different values of $|U|$

효과에 의해서 변화 된다.

균열로부터 가깝고 먼 곳 사이의 온도차이를 보여주기 위하여, 지역 온도차이가 Fig. 5에서 $|U| = 0.12V$ 에 대하여 보여진다. 이것은 Fig. 4에 대한 또다른 표현이다. 균열 상부에서의 온도 차이는 균열 하부와 비교해 볼때에 더욱 큰 온도 차이를 가지고 있다. 균열 끝단 근처에서는 균열과 멀리 떨어진 곳과 비교하면 온도 차이가 나타나지 않는다.

Fig. 6은 다양한 수치의 $|U|$ 에 대하여 $x=0$ 에서의 두께를 가로지르는 방향의 온도분포를 보여주고 있다. 예상했던 바와 같이, 균열 끝단에서의 국지적으로 온도가 증가하며 균열 주위 온도는 불연속적으로 변화함을 알 수 있다. 전위차가 증가함에 따라서, 균열 주위의 온도는 불연속성의 크기 또한 증가하고 있음을 알 수 있다. 이와 더불어 전위차가 $0.05V$ 이하일 때에는, 균열 지역을 제외한 나머지 층을 통해서 온도가 선형으로 변화하고 있다. 이러한 현상은 두 경계들 사이의 작은 전위차로 인하여 Joule Heating 효과가 매우 작아지기 때문이다. 그러나 $0.05V$ 의 전위차보다 큰 경우에는 최고 온도가 층 내에서 나타난다. 최고 온도의 위치는 균열 가까이로 이동하여 균열에서 높은 온도가 나타난다.

5. 결 론

우리는 온도 종속성 전기저항과 열전도율을 가지는 도체 내의 균열선단에서, 어떻게 Greenwood와 Williamson⁽⁴⁾의 정리가 정상상태 온도와 전위장을 결정하는 지를 살펴보았다.

이 비선형 문제는 물성치들과 경계값들을 포함하는 비선형 대수 방정식들의 해로 분리 된다. 그 다음, 도체층 내에서의 균열에 대한 새로운 혼합 경계치 문제는 조화함수 ψ 에 대하여 해석 된다. 또한 이 문제는 Chebyshev 다항식들과 그 가중 함수의 연속

적인 곱으로 표현되는 해를 갖는 제 1종 적분 방정식의 형태로 간략화 된다. 온도 의존성 물성치를 가지는 무한 도체에 있어서, 전기와 열의 전도에 관한 해가 존재 하지 않는다는 것을 보였다.

수치해석의 결과들로부터 전위차의 증가가 곧 균열단 주위 온도의 불연속성의 크기를 증가시킴을 알 수 있다. 이와 더불어 큰 Joule Heating 인 경우, 최고 온도가 도체 내에서 나타나며 그 위치는 균열쪽으로 이동해 간다.

후 기

이 논문은 2005년도 한국학술진흥재단의 지원(R08-2003-000-10162-0)에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- (1) Saka, M. and Abe, H., 1992, "Path-Independent Integrals for Heat Conduction Analysis in Electrothermal Crack Problems," *J. Thermal Stresses*, Vol. 15, pp. 71~83.
- (2) Olsson, J., 2001, "Self-heating Effects in SOI Bipolar Transistors," *Microelectron. Eng.*, Vol. 56, pp. 339~352.
- (3) Kohlrausch, F., 1900, "Über den Stationären Temperaturzustand Eines Elektrisch Geheizten Leiters," *Ann. Phys. Lpz.*, Vol. 1, pp. 132~158.
- (4) Greenwood, J. A. and Williamson, J. B. P., 1958, "Electrical Conduction in Solids: II. Theory of Temperature-Dependent Conductors," *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 246, pp. 13~31.
- (5) Diesselhorst, H. 1900, "Über das Problem Eines Elektrisch Erwarmten Leiters," *Ann. Phys. Lpz.*, Vol. 1, pp. 312~325.
- (6) Fournet, G., 1997, "Phenomena in Conductors Having Temperature Dependent Electrical and Thermal Conductivities," *J. Physique III*, Vol. 7, pp. 2003~2029.
- (7) Jang, Y. H. Barber, J. R. and Hu, S. J., 1998, "Electrical Conductance Between Conductors with Dissimilar Temperature-Dependent Material Properties," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 31, pp. 3197~3205.
- (8) Wang, P., Tian, Z. G. and Bai, X. Z., 2003, "Electrothermal Stress in Conductive Body with Collinear Cracks," *Theor. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 40, pp. 187~195.
- (9) Choi, H. J. and Thangitham, S., 1991 "Heat Conduction in Laminated Anisotropic Composites with a Debonding," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 29, pp. 819~829.
- (10) Muskhelishvili, N. I., 1953, "Singular Integral Equations," Noordhoff, Groningen, pp. 76~105.
- (11) Stroud, A. H. and Secrest, D. 1966, "Gaussian Quadrature Formula," Prentice Hall, Englewood Cliffs
- (12) Friedman, B., 1969, "Lectures on Application-Oriented Mathematics," Holden-Day, San Francisco, pp. 1~35.