

< 논문 >

## 단일루프 단일벡터 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계

방 승 현\* · 민 승 재†

(2005년 9월 1일 접수, 2006년 5월 25일 심사완료)

### Reliability-Based Topology Optimization Using Single-Loop Single-Vector Approach

Seunghyun Bang and Seungjae Min

**Key Words :** Topology Optimization(위상최적설계), Reliability-Based Topology Optimization(신뢰성기반 위상최적설계), Single-Loop Single-Vector Approach(단일루프 단일벡터 방법), Double-Loops Single-Vector Approach(이중루프 단일벡터 방법), Reliability Index(신뢰성지수)

#### Abstract

The concept of reliability has been applied to the topology optimization based on a reliability index approach or a performance measure approach. Since these approaches, called double-loop single vector approach, require the nested optimization problem to obtain the most probable point in the probabilistic design domain, the time for the entire process makes the practical use infeasible. In this work, new reliability-based topology optimization method is proposed by utilizing single-loop single-vector approach, which approximates searching the most probable point analytically, to reduce the time cost. The results of design examples show that the proposed method provides efficiency curtailing the time for the optimization process and accuracy satisfying the specified reliability.

#### 1. 서 론

구조물의 설계에 있어서 설계변수나 시스템 파라미터에는 불확실성(uncertainty)이 존재한다. 이러한 불확실한 요소들은 재료의 탄성계수, 작용하중, 치수공차 등의 형태로 나타난다. 기존의 최적설계 기법은 설계변수나 시스템 파라미터의 불확실성을 고려하지 않고 시스템이 만족해야 할 제한조건하에서 목적함수를 최적화하는 과정으로 진행되었으며 이를 결정론적 최적설계(Deterministic Design Optimization)라고 한다. 이는 설계변수의 가변성을 고려하지 않으므로 설계자가 요구하는 신뢰성의 확보 여부를 판단하기 어렵다.

신뢰성 기반 최적설계(Reliability-Based Design Optimization; RBDO)는 설계상의 불확실성을 고려하여

목표하는 시스템의 파괴확률을 만족하는 동시에 목적함수를 최적화하는데 그 목적이 있다. 기존 신뢰성기반 최적설계의 수행은 신뢰성지수방법(Reliability Index Approach; RIA) 또는 목표성능값 방법(Performance Measure Approach; PMA)등을 사용하였다. 그러나 이러한 방법들은 외부최적화 과정과는 별도로 최대 파괴 가능점(Most Probable Point; MPP)을 찾는 내부 최적화 과정이 포함되므로, 결정론적 최적설계에 비하여 상대적으로 많은 시간이 소요되었다. 이와 같이 외부 최적화 과정과 내부 최적화 과정이 필요한 기법을 이중루프 단일벡터 방법(Double-Loops Single-Vector; DLSV)이라고 한다. 이중루프 단일벡터 방법의 단점을 보완하기 위하여 많은 연구들이 진행되었고, Chen 등<sup>(1)</sup>은 최대 파괴 가능점을 내부 최적화 과정이 아닌 해석적인 방법으로 도출할 수 있는 방법을 고안하였다. 이는 하나의 최적화 문제와 결정론적 설계변수만으로 신뢰성기반 최적설계를 수행하므로 단일루프 단일벡터 방법(Single-Loop Single-Vector; SLSV)이라고 한다. 따라서 단일루프 단일벡터 방법은 최적화 과정 중의 신뢰성 해석 시간을 줄일 수 있다.

\* 한양대학교 대학원 기계설계학과

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : seungjae@hanyang.ac.kr

TEL : (02)2220-0457 FAX : (02)2298-4634

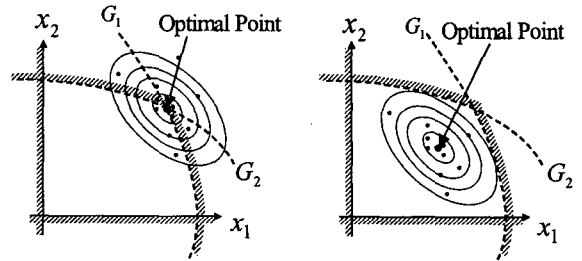
과거의 위상최적설계는 재료의 탄성계수나 작용하중의 불확실성에도 불구하고 이 값들을 고정시켜 수행되어 왔으며, 이를 결정론적 위상최적설계(Deterministic Topology Optimization; DTO)<sup>(2,3)</sup>라고 한다. 이후 설계변수나 시스템 파라미터의 불확실성을 고려하여 위상최적설계를 수행하려는 연구가 진행되어 왔는데, 이를 신뢰성기반 위상최적설계(Reliability-Based Topology Optimization; RBTO)라고 한다. Marti 와 Stöckle<sup>(4)</sup>은 봉요소를 사용하여 신뢰성기반 위상최적설계를 수행되었고, Bae 와 Wang<sup>(5,6)</sup>은 신뢰성지수방법과 목표성능값방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계의 정적 문제와 고유값 문제에 관한 연구를 발표하였다. 또한 Maute 와 Frangopol<sup>(7)</sup>에 의해 MEMS 구조물에 대한 신뢰성기반 위상최적설계가 수행되었으며, Jeung<sup>(8)</sup>에 의하여 기하학적 비선형성을 고려한 구조물의 신뢰성기반 위상최적설계에 대한 연구가 있었다.

본 연구에서는 과거 이중루프 단일벡터 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계의 문제점인 시간비용의 비효율성을 개선하기 위하여 해석적인 방법으로 최대 파괴 가능점을 찾아내는 단일루프 단일벡터 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계를 제안하고, 이를 이중루프 단일벡터 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계의 결과와 비교하여 그 효율성과 정확성을 입증하고자 한다. 확률변수는 재료의 탄성계수와 작용하중을 사용하였으며, 한계상태 방정식은 변위 제한조건으로 하였다. 수치적인 예제로는 MBB beam, 자전거 휠 설계를 수행하였으며, 목표신뢰성은 성공확률 99.87%(3 시그마)와 성공확률 99.999999%(6 시그마)에 대하여 수행해 보았고 각 경우의 최적 형상과 수행시간을 비교하여 보았다. 최적화 알고리즘으로 목적함수와 제한조건의 일차 민감도만으로 수행할 수 있는 순차적 선형계획법(Sequential Linear Programming; SLP)을 사용하였다.

## 2. 신뢰성기반 최적설계

신뢰성기반 최적설계는 요구되는 제한조건 하에서 목적함수를 최소화시키는 동시에 목표로 하는 신뢰성을 획득하는데 그 목적이 있다.

Fig. 1 과 같이 설계변수들은 확률적인 분포로 표현할 수 있다. Fig. 1(a)의 결정론적 최적설계의 경우 설계 파라미터의 가변성을 무시하고 평균점에서 최적설계를 수행하지만, 그림과 같이 유용영역을 벗어날 수 있는 확률을 내포하고 있음을 알 수 있다.



(a) Deterministic design optimization

(b) Reliability-based design optimization

Fig. 1 Concept of deterministic and stochastic design optimization

반면 Fig. 1(b)의 신뢰성기반 최적설계의 경우는 설계변수들의 확률적인 분포를 고려하여 원하는 신뢰성의 수준으로 최적설계를 수행하는 것을 알 수 있다. 신뢰성기반 최적설계의 일반적인 정식화는 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(\mathbf{Y}) \\ & \text{subject to } P_f(\mathbf{Y}) = P[g_j(\mathbf{Y}) < 0] \leq P_i \quad (j=1, \dots, n) \quad (1) \\ & \mathbf{Y}^L \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{Y}^U \end{aligned}$$

여기서  $P_f$ 는  $g_j(\mathbf{Y}) < 0$ 인 파괴 확률,  $P_i$ 는 만족해야 할 파괴확률의 한계값,  $\mathbf{Y}$ 는 확률변수,  $\mathbf{Y}^L$ 와  $\mathbf{Y}^U$ 는 각각 확률변수의 하한값과 상한값을 나타낸다.

신뢰성기반 최적설계는 내부최적화 과정의 유무에 따라 이중루프 단일벡터 방법과 단일루프 단일벡터 방법으로 구분할 수 있다.

### 2.1 이중루프 단일벡터 방법

확률론적 제한조건은 신뢰성지수와 성능값의 형태로 표현할 수 있는데, 신뢰성지수로 표현되는 확률론적 제한조건을 이용하면 신뢰성지수 접근방법이라고 하고, 성능값으로 표현되는 확률론적 제한조건을 이용하면 목표성능값 접근방법이라고 한다. 이상의 두 가지 방법은 각각 최대 파괴가능점을 찾는 내부 최적화 과정을 포함하므로 이중루프 단일벡터 방법이라고 한다.

목표 신뢰성지수  $\beta_i$ 를 만족하는 최적값을 구하는 신뢰성지수 접근방법의 정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(\mathbf{Y}) \\ & \text{subject to } \beta(\mathbf{Y}) \geq \beta_i \quad (2) \\ & \mathbf{Y}^L \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{Y}^U \end{aligned}$$

여기서 신뢰성지수  $\beta$ 를 찾기 위해서 별도의 최

적화 과정이 필요한데, 확률변수를 표준 정규 분포상으로 변환시킨 후 원점부터 한계상태면까지의 최소 거리의 점인 최대 파괴 가능점을 찾는 과정을 수행한다. 그 과정은 다음과 같은 내부 최적화 문제로 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sqrt{\mathbf{U}^T \mathbf{U}} \\ & \text{subject to} && G(\mathbf{U}) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{U}$  는 확률변수  $\mathbf{Y}$  를 표준정규분포 상으로 변환시킨 형태이다.

목표성능값을 만족하는 최적값을 구하는 목표성능값 접근방법의 정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(\mathbf{Y}) \\ & \text{subject to} && G^*(\mathbf{Y}) \geq 0 \\ & && \mathbf{Y}^L \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{Y}^U \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 목표성능값인  $G^*$  을 찾아야 하며 이는 최대 파괴 가능점의 확률변수  $\mathbf{Y}$  를 찾음으로써 구할 수 있다. 이 과정을 역 신뢰성 해석(inverse reliability analysis)이라고 한다. 최대 파괴 가능점을 구하는 내부 최적화 문제의 정식화를 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && G_U(\mathbf{U}) \\ & \text{subject to} && \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \beta_i \end{aligned} \quad (5)$$

Fig. 2 는 신뢰성지수방법과 목표성능값방법의 개념을 도식화한 것으로 정규분포인 확률변수공간을 표준정규분포인 확률공간으로 사상(mapping)하여 신뢰성지수  $\beta$  를 정의한다. Fig. 2(a)의 신뢰성지수 방법은 한계상태 방정식을 일차 또는 이차로 근사화함으로써 FORM 또는 SORM 이 결정되며, 최대 파괴 가능점(MPP)은 원점과 일차 또는 이차로 근사화된 한계상태 방정식과 최소거리를 찾음으로써 구한다.<sup>(9,10)</sup> FORM 은 파괴표면에서의 최대 파괴 가능점을 구하는 과정과 최대 파괴 가능점에서 파괴함수의 선형화 개념이 포함되어 있고, SORM 은 이차항까지 근사화하는 개념이다. 일반적으로 FORM 보다 SORM 이 정확하다고 알려져 있으나, 한계상태방정식의 2 차 미분값까지 구해야 하는 수치적인 부담이 증가된다는 단점을 안고 있다. Fig. 2(b)의 목표성능값방법은 목표신뢰성지수  $\beta_i$  만큼의 거리를 고정시키고 한계상태 방정식을 최소화시킴으로써 최대 파괴 가능점을 찾는다. 목표성능값 접근방법의 특징은 목표 신뢰성지수를 만족하면서 최적화를 수행한다는데 있다.

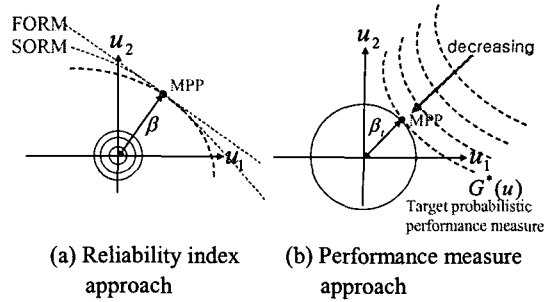


Fig. 2 Concept of the reliability index approach method and the performance measure approach method

### 2.2 단일루프 단일벡터 방법

단일루프 단일벡터 방법의 과정을 살펴 보면, 확률변수  $\mathbf{Y}$  를 다음과 같이 변환시킨다.

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{Y}}{\sigma_{\mathbf{Y}}} \quad (6)$$

여기서  $\mathbf{S}$  는 매개변수이며,  $\sigma_{\mathbf{Y}}$  는 확률변수  $\mathbf{Y}$  의 표준편차이다.  $j$  번째 한계상태 방정식을  $G_j$  라고 하면 최대 파괴 가능점은 다음 식을 만족해야 한다.

$$G_j(\mathbf{Y}) = G_j(\sigma_{\mathbf{Y}} \mathbf{S}) = 0 \quad (7)$$

여기서 한계상태 방정식을 만족하는 최대 파괴 가능점  $\mathbf{S}^*$  는 확률변수  $\mathbf{S}$  와 평균점  $\mu_{\mathbf{S}}$  간의 최소거리로 정의되며, 이는 거리  $D$  를 최소화시키는 문제로 다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && D(\mathbf{S}) \\ & \text{subject to} && G_j(\mathbf{S}) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

그러나, 최대 파괴 가능점을 찾는 과정에서 별도의 최적화라는 노력이 필요하므로, 평균점으로부터 한계상태 방정식까지의 벡터를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{S}^* - \mu_{\mathbf{S}} = \pm \beta_i \boldsymbol{\alpha}^* \quad (9)$$

여기서  $\boldsymbol{\alpha}^*$  는 최대 파괴 가능점에서의 단위법선 벡터로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \frac{\nabla_{\mathbf{S}} G(\mathbf{S})}{\|\nabla_{\mathbf{S}} G(\mathbf{S})\|} \quad (10)$$

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial s_i}\right)^*}{\left[\sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial s_i}\right)^{*2}\right]^{1/2}} = \frac{\sigma_{y_i} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)^*}{\left[\sum_i \sigma_{y_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)^{*2}\right]^{1/2}} \quad (11)$$

$\alpha^*$ 는  $S^* - \mu_S$ 와 동일직선상에 있으며 최대 파괴 가능점  $S^*$ 부터 평균점  $\mu_S$ 의 거리는  $\beta_i$ 이 된다.  $\alpha^*$ 는 한계상태 방정식 상의 최대 파괴 가능점에서의 단위법선 벡터이므로  $S^* - \mu_S$ 와 동일한 방향이면 양수, 반대방향이면 음수를 갖게 된다. 여기서  $G(S)$ 의 안전 영역이 음수라면,  $G(S) < 0$ 의 형태로 한계상태 방정식이 주어지고, 다음과 같이 최대 파괴 가능점  $S^*$ 를 계산할 수 있다.

$$S^* = \mu_S + \beta_i \alpha^* \quad (12)$$

반대로  $G(S)$ 의 안전 영역이 양수라면,  $G(S) > 0$ 의 형태로 한계상태 방정식이 주어지고, 다음과 같이 최대 파괴 가능점  $S^*$ 를 계산할 수 있다.

$$S^* = \mu_S - \beta_i \alpha^* \quad (13)$$

Fig. 3은  $G(S)$ 의 안전영역이 음수인 경우에 최대 파괴 가능점을 찾는 과정을 표현한 것이다. 이를 고려하여 최적화 문제를 정식화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } f(\mu_S^{(k)}) \\ &\text{subject to } G_j(S^{(k)}) \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \\ &S^L \leq S \leq S^U \end{aligned} \quad (14)$$

단일루프 단일벡터 방법은 최대 파괴 가능점이 해석적으로 계산되므로 기존의 이중루프 단일벡터 방법과 같이 내부 최적화의 수행으로 인한 추가적인 시간비용을 효과적으로 감소시킬 수 있다. 그러나 최대 파괴 가능점에서의 단위 법선 벡터를 찾는 과정에서 전 단계의 한계상태 방정식의 민감도를 사용하므로 외부 최적화 과정에서 설계변화가 비교적 클 경우에는 현 단계에서 찾은 최대 파괴 가능점이 불확실할 수 있다는 단점이 있다.

### 3. 단일루프 단일벡터 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계

본 장에서는 해석적인 방법으로 최대 파괴 가능점을 찾아내는 단일루프 단일벡터 방법을 신뢰성기반 위상최적설계에 적용함으로써 이중루프 단일벡터 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계 보다 효율적으로 신뢰성기반 위상최적설계를 수행하고자 한다.

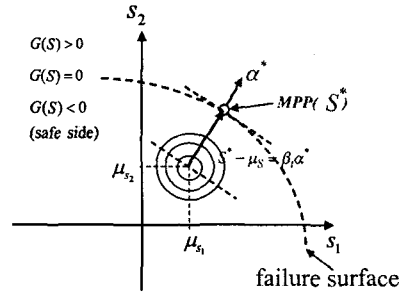


Fig. 3 Concept of the Single-loop Single-vector method

#### 3.1 정식화

단일루프 단일벡터 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계의 최적화 과정은 다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } V(\rho_i) = \sum_{i=1}^n \rho_i \\ &\text{subject to } G_j^*(\rho_i, y_{E_j}^{*(k)}, y_{F_j}^{*(k)}) \\ &= z_j^*(\rho_i, y_{E_j}^{*(k)}, y_{F_j}^{*(k)}) - \delta_{allow,j} \leq 0 \quad (j=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  $V$ 는 부피,  $\rho_i$ 는 요소의 밀도,  $z_j$ 는 변위,  $y_{E_j}$ 는 재료의 탄성계수,  $y_{F_j}$ 는 작용하중을 의미한다. 최대 파괴 가능점의 확률변수는 다음과 같이 해석적인 방법으로 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} y_{E_j}^{*(k)} &= \mu_E + \sigma_E \beta_i \alpha_{E_j}^{*(k-1)} \\ y_{F_j}^{*(k)} &= \mu_F + \sigma_F \beta_i \alpha_{F_j}^{*(k-1)} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{where } \alpha_{E_j}^{*(k-1)} &= \frac{\sigma_E \left( \frac{\partial G}{\partial y_{E_j}} \right)^{(k-1)}}{\sqrt{\sigma_E^2 \left( \frac{\partial G}{\partial y_{E_j}} \right)^{(k-1)2} + \sigma_F^2 \left( \frac{\partial G}{\partial y_{F_j}} \right)^{(k-1)2}}} \\ \alpha_{F_j}^{*(k-1)} &= \frac{\sigma_F \left( \frac{\partial G}{\partial y_{F_j}} \right)^{(k-1)}}{\sqrt{\sigma_E^2 \left( \frac{\partial G}{\partial y_{E_j}} \right)^{(k-1)2} + \sigma_F^2 \left( \frac{\partial G}{\partial y_{F_j}} \right)^{(k-1)2}}} \end{aligned}$$

#### 3.2 민감도 해석

설계변수인 요소의 밀도( $\rho$ ), 확률변수인 탄성계수( $y_E = E_0$ )와 작용하중( $y_F = f$ )에 대한 목적함수의 민감도와 한계상태 방정식의 민감도를 다음과 같이 계산할 수 있다.

식 (15)에서 목적함수는 구조물의 전체 부피이며, 대한 설계변수의 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial V(\rho_i)}{\partial \rho_i} = 1 \quad (i=1, \dots, n) \quad (17)$$

가상하중법(dummy load method)을 적용하여 Fig. 4 와 같이 하중  $f$  가 점 A 에 가해진 상태에서의 점 B 의 변위  $z$  을 구하고자 할 때 점 B 에 가상하중  $\bar{f}$  를 추가한다. 주어진 응력상태에서의 변형률을  $\varepsilon(z)$  라고 하고 같은 경계조건에서 가상하중  $\bar{f}$  만 주어진 경우의 변형률을  $\varepsilon(\bar{z})$  라고 할 때, 점 B 의 변위  $z$  는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$z = \frac{\int_{\Omega} \varepsilon(z)^T E \varepsilon(\bar{z}) d\Omega}{\bar{f}} \quad (18)$$

가상하중  $\bar{f}$  를 단위하중이라 하면, 다음과 같이 표현된다.

$$z = a(z, \bar{z}) = \int_{\Omega} \varepsilon(z)^T E \varepsilon(\bar{z}) d\Omega \quad (19)$$

여기서 재료밀도로 구성된 탄성계수  $E = \rho^p E_0$  를 대입하면 다음과 같이 표현된다.

$$z = \int_{\Omega} \varepsilon(z)^T \rho^p E_0 \varepsilon(\bar{z}) d\Omega \quad (20)$$

따라서 설계변수인 요소의 밀도  $\rho$  와 확률변수인 재료의 탄성계수  $E_0$  는 명시적으로 표현되고, 확률변수인 작용하중  $f$  는 평형상태식을 이용하여 식 (15)의 한계상태 방정식의 민감도를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \rho} &= \frac{\partial z}{\partial \rho} = \int_{\Omega} \varepsilon(z)^T \frac{\partial \rho^p}{\partial \rho} E_0 \varepsilon(\bar{z}) d\Omega \\ &= \frac{p}{\rho} \int_{\Omega} \varepsilon(z)^T \rho^p E_0 \varepsilon(\bar{z}) d\Omega = \frac{p}{\rho} \int_{\Omega} \varepsilon(z)^T E \varepsilon(\bar{z}) d\Omega \end{aligned} \quad (21)$$

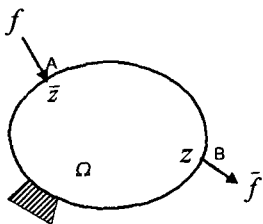


Fig. 4 A dummy load added to an elastic body

$$\frac{\partial G}{\partial E_0} = \frac{\partial z}{\partial E_0} = \int_{\Omega} \varepsilon(z)^T \rho^p \frac{\partial E}{\partial E_0} \varepsilon(\bar{z}) d\Omega \quad (22)$$

$$= \frac{1}{E_0} \int_{\Omega} \varepsilon(z)^T \rho^p E_0 \varepsilon(\bar{z}) d\Omega = \frac{1}{E_0} \int_{\Omega} \varepsilon(z)^T E \varepsilon(\bar{z}) d\Omega$$

$$\frac{\partial G}{\partial f} = \frac{\partial z}{\partial f} = \frac{\int_{\Omega} \bar{f} z d\Omega}{\partial f} = \bar{z} \quad (23)$$

#### 4. 설계 예

본 연구에서 제안한 단일루프 단일벡터 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계와 기존의 이중루프 단일벡터 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계를 수행시간과 구조물의 최적위상 관점에서 비교함으로써 그 효율성을 입증하고자 한다. 그 예제로는 이미 결정론적 위상최적설계 결과가 알려져 있는 MBB beam 과 자전거 휠 설계에 3 시그마(99.87%)와 6 시그마(99.999999%)의 신뢰도를 적용하였고 결정론적 위상최적설계 결과와 비교해 보았다. 설계에 사용한 재료는 Steel Carbon ( $E = \mu_E = 206.8 \text{ GPa}, \nu = 0.28$ )이며, 4 결점 유한요소를 사용하여 해석하였다. 재료의 탄성계수와 작용하중을 확률변수로 사용하였고 한계상태 방정식은 변위 제한조건을 고려하였다. 또한 한계상태 방정식을 고려하지 않고 단순히 확률변수만을 3 시그마 또는 6 시그마 만큼 악화시키는 최악상태방법 (Worst Case Approach)<sup>(11)</sup>과도 비교하여 신뢰성을 고려한 설계의 중요성을 확인하였다.

##### 4.1 MBB beam 설계

MBB beam<sup>(12)</sup>은 Fig. 5 와 같이 항공기 동체 중앙 부분에 승객과 화물 등 하중을 지지하는 구조물이다. 과거에는 6 개의 구멍을 가진 구조로 설계되었으나 동일한 부피제한조건상에서 위상최적설계의 결과는 7 개의 구멍으로 설계한 구조물이 강성관점에서 약 40%의 향상되었음을 보여주고 있다.

설계영역, 구속조건 그리고 작용하중은 Fig. 6 과 같고, 허용 변위가 9.3mm 이하로 되게 하였다. 설계영역은 1200 (60×20) 개로 나누었고, 각 확률변수의 표준편차는 평균값의 3%로 설정하였다.

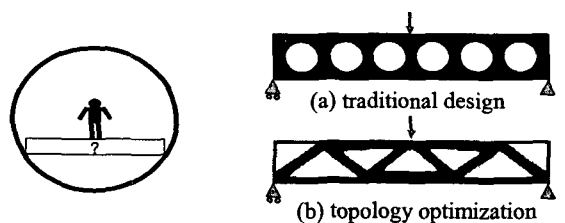


Fig. 5 MBB beam design

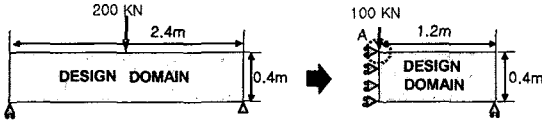


Fig. 6 Design domain and loading/boundary conditions

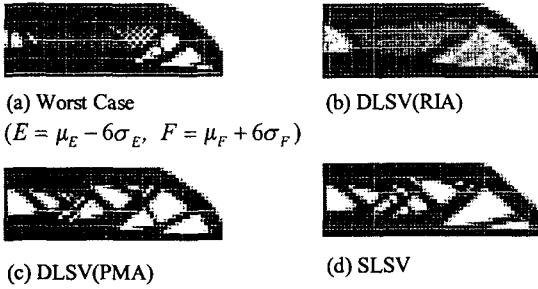


Fig. 7 Optimal topology ( $\beta_t = 3$ )

Table 1 Comparison of numerical results ( $\beta_t = 3$ )

	iteration		objective (volume)	reliability index	cpu-time index
	outer loop	inner loop			
DTO	92	0	50.72%	0	100
WC	81	0	63.37%	4.239	87.76
RBTO(RIA)	95	151	58.47%	2.986	165.73
RBTO(PMA)	91	273	58.88%	3	192.31
RBTO(SLSV)	87	0	59.13%	3	116.08

4.1.1 3 시그마

Fig. 7 은 목표 신뢰성지수 3 을 만족하는 신뢰성 기반 위상최적설계의 결과인 구조물의 최적형상을 나타내고, 수치 결과는 Table 1 에 정리하였다.

목적함수인 부피를 살펴보면 결정론적 위상최적설계에 비하여 신뢰성기반 위상최적설계는 목표 신뢰성지수 3 만큼의 신뢰성을 확보하기 위하여 대략 8~9% 의 재료를 추가적으로 사용한 것을 알 수 있다. 신뢰성기반 위상최적설계의 수행시간을 결정론적 위상최적설계의 수행시간과 비교해 보면, 기존의 이중루프 단일벡터 방법인 신뢰성지수방법과 목표성능값방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계는 각각 65.7%와 92.3%의 수행시간이 증가되었으나, 단일루프 단일벡터 방법을 이용한 위상최적설계는 약 16%의 수행시간이 증가된 것으로 미루어 보아 본 연구에서 제안한 단일루프 단일벡터 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계가 시간비용의 관점에서 좀더 효율적이라는 것을 알 수 있다. 최악상태 접근법은 63.3%의 재료를 사용하여 목표신뢰성지수 3 을 초과한 4.239 의 신뢰성지수를 달성하였다. 이는 목표로 했던 신뢰성지수를 초과하였지만, 재료를 그만큼 많이 사용하였으므로 설계목표보다 과도한 설계가 되었다고 말할 수 있다.

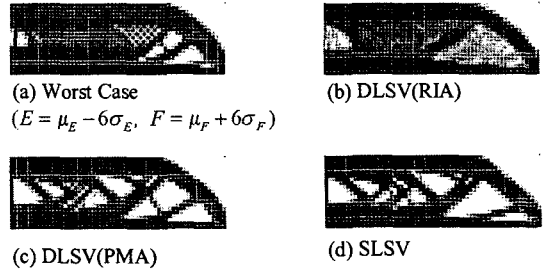


Fig. 8 Optimal topology ( $\beta_t = 6$ )

Table 2 Comparison of numerical results ( $\beta_t = 6$ )

	iteration		objective (volume)	reliability index $\beta_t = 6$	cpu-time index
	outer loop	inner loop			
DTO	92	0	50.72%	0	100
WC	57	0	83.84%	8.456	90.56
RBTO(RIA)	17	45	76.46%	5.996	238.38
RBTO(PMA)	75	300	70.18%	6	322.03
RBTO(SLSV)	95	0	70.20%	6	116.88

4.1.2 6 시그마

Fig. 8 은 목표신뢰성지수 6 을 만족하는 신뢰성 기반 위상최적설계의 결과인 구조물의 최적형상을 나타내고, 수치적 결과는 Table 2 에 정리하였다.

목적함수인 부피를 살펴보면 신뢰성기반 위상최적설계는 목표 신뢰성지수 6 만큼의 신뢰성을 확보하기 위하여 대략 20~27% 의 재료를 추가적으로 사용한 것을 볼 수 있다. 이는 목표 신뢰성지수가 3 인 앞의 경우와 비교했을 때 더욱 많은 재료를 사용함을 알 수 있고, 이는 더욱 많은 신뢰성을 확보하기 위한 현상으로 설명할 수 있다. 본 연구에서 제안한 단일루프 단일변수 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계의 수행시간이 이중루프 단일변수 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계에 비하여 적은 시간을 소모 함으로써 제안된 방법이 좀더 효율적이라는 것을 알 수 있다. 마지막으로 최악상태 접근법은 83.8% 의 재료를 사용함으로써 목표로 했던 신뢰성지수 6 을 초과하여 8.456 의 신뢰성지수를 달성하였다. 이는 3 시그마의 경우와 같이 과도한 설계가 되었다고 말할 수 있다.

4.2 자전거 휠 설계

자전거 휠 설계<sup>(13)</sup>를 위한 설계영역, 구속조건, 작용하중은 Fig. 9(a)와 같이 표현할 수 있다. 허용변위는 3.5E-03 mm 로 하였으며, 설계영역은 3200 (80×40) 개의 4 절점 유한요소로 모델링하였다. 이때 허용변위를 만족하는 최소부피를 구하는 결정론적 위상최적설계의 결과는 Fig. 9(b)와 같다. 각 확률변수의 불확실성을 고려하기 위하여 재료

탄성계수와 작용하중의 표준편차는 각 평균값의 10%와 20%로 설정하였다.

4.2.1 3 시그마

Fig. 10 은 목표 신뢰성지수 3 을 만족하는 신뢰성기반 위상최적설계의 결과인 구조물의 최적형상을 나타내고, 수치 결과는 Table 3 에 정리하였다.

목적함수인 부피를 살펴보면 결정론적 위상최적설계에 비하여 신뢰성기반 위상최적설계는 목표 신뢰성지수 3 만큼의 신뢰성을 확보하기 위하여 대략 14~15%의 재료를 추가적으로 사용한 것을 알 수 있다. 신뢰성기반 위상최적설계의 수행시간을 결정론적 위상최적설계의 수행시간과 비교해보면, 기존의 이중루프 단일벡터 방법인 신뢰성지수방법과 목표성능값방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계는 각각 128.0%와 293.5%의 수행시간이 증가되었으나, 단일루프 단일벡터 방법을 이용한 위상최적설계는 약 141.0%의 수행시간이 증가

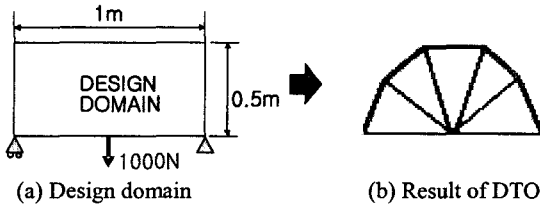


Fig. 9 Bicycle wheel design

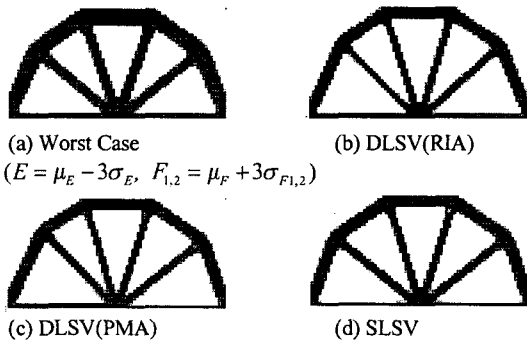


Fig. 10 Optimal topology ( $\beta_t = 3$ )

Table 3 Comparison of numerical results ( $\beta_t = 3$ )

	Iteration		objective (volume)	reliability index	cpu-time index
	outer loop	inner loop			
DTO	76	0	19.52%	0	100
WC	79	0	43.07%	4.217	98.92
RBTO(RIA)	88	132	33.29%	2.993	228.08
RBTO(PMA)	80	320	33.43%	3	393.51
RBTO(SLSV)	85	0	33.57%	3	241.07

되었다. 마지막으로 최악상태 접근법은 43.0%의 재료를 사용함으로써 목표신뢰성지수 3 을 초과하여 4.217 의 신뢰성지수를 달성하였다. 이는 목표로 했던 신뢰성지수를 초과하였지만, 재료를 그만큼 많이 사용하였으므로 설계목표보다 과도한 설계가 되었다고 말할 수 있다.

4.2.2 6 시그마

Fig. 11 은 목표 신뢰성지수 6 을 만족하는 신뢰성기반 위상최적설계의 결과인 구조물의 최적형상을 나타내고, 수치 결과는 Table 4 에 정리하였다.

목적함수인 부피를 살펴보면 신뢰성기반 위상최적설계는 목표 신뢰성지수 6 만큼의 신뢰성을 확보하기 위하여 대략 55~57%의 재료를 추가적으로 사용한 것을 볼 수 있다. 이는 목표 신뢰성지수가 3 인 앞의 경우와 비교했을 때 더욱 많은 재료를 사용함을 알 수 있고, 이는 더 큰 신뢰성을 확보하기 위한 현상으로 설명할 수 있다. 본 연구에서 제안한 단일루프 단일변수 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계의 수행시간이 이중루프 단일변수 방법을 이용한 신뢰성기반 위상최적설계에 비하여 적은 시간이 소요된 사실로 제안된 방법이 좀더 효율적이라는 것을 알 수 있다. 최악상태 접근방법의 경우 수렴을 하지 않았는데 그 원인을 분석해 보면 재료의 탄성계수와 작용하중의 6 시그마만큼의 최악상태를 자전거 휠 모델에 적용시켜보면 구조물의 요소 밀도가 모두 1 일 때 하중이 가해진 지점의 수직방향 변위는 5.235E-03 mm

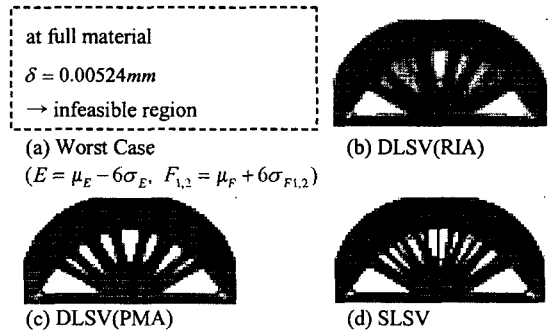


Fig. 11 Optimal topology ( $\beta_t = 6$ )

Table 4 Comparison of numerical results ( $\beta_t = 6$ )

	Iteration		objective (volume)	reliability index $\beta_t = 6$	cpu-time index
	outer loop	inner loop			
DTO	76	0	19.52%	0	100
WC	79	0	43.07%	4.217	98.92
RBTO(RIA)	24	40	76.72%	5.989	347.66
RBTO(PMA)	82	410	74.46%	6	568.50
RBTO(SLSV)	92	0	74.72%	6	224.85

이며, 이는 허용변위  $3.5E-03$  mm를 초과하여 불용 영역에 있는 것을 알 수 있었고, 이러한 원인으로 최적화가 수행되지 않는 현상이 일어남을 알 수 있었다.

## 5. 결론

본 연구에서는 단일루프 단일변수 방법을 이용하여 신뢰성기반 위상최적설계를 수행함으로써 기존의 이중루프 단일변수 방법을 이용한 신뢰성기반 위상 최적설계에 비하여 시간비용의 관점에서 최대 61.6%를 단축하여 효율적이라는 것을 입증하였으며, 목표 신뢰성을 확보함으로써 단일루프 단일변수 방법의 정확성 또한 검증하였다.

또한 확률변수로 재료의 탄성계수와 작용하중에 대해서만 고려하였지만, 추가적으로 포아송 비 등의 확률변수를 고려할 수 있을 것이며, 마지막으로 한계상태 방정식으로 응력 제한조건이나, 고유값 제한조건을 사용하는 추가적인 연구가 필요하다고 판단된다.

## 후 기

이 연구는 한국과학기술원 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Chen, X., Hasselman, T. K. and Neill, D. J., 1997, "Reliability-Based Structural Design Optimization For Practical Applications," *AIAA-97-1403*.
- (2) Song, Y. J., Min, S. and Kikuchi, N., 1999, *Finite Element Method and Structural Optimization CAE*, SungAnDang, pp. 323~358.
- (3) Bendsoe, M. P. and Sigmund, O., 1999, "Material Interpolation Schemes in Topology Optimization," *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69, pp. 635~654.
- (4) Marti, K. and Stöckle, G., 1999, "Optimal (topology) Design Under Stochastic Uncertainty," *Safety and Reliability*, Vol. 2, pp. 1597~1602.
- (5) Bae, K., Wang, S. and Choi, K., 2002, "Reliability-Based Topology Optimization," *Proc. 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, AIAA-2002-5542*.
- (6) Bae, K. and Wang, S., 2002, "Reliability-Based Topology Optimization," *Proc. KSME 2002 Fall Annual Meeting*, pp. 1013~1017.
- (7) Maute, K., Frangopol, D.M., 2003, "Reliability-Based Design of MEMS Mechanisms by Topology Optimization," *Computers & Structures*, Vol. 81, pp. 813~824.
- (8) Jeung, H., 2003, "Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization of Geometrically Nonlinear Structures," Ph.D. Dissertation, Seoul National University, Seoul, Korea.
- (9) Choi, J. H., Lee, S. J. and Choi, D. H., 1999, "Reliability Based Tolerance Optimization of Mechanisms," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 23, No. 5, pp. 751~762.
- (10) Lee, S. M., Yun, K. O., Chang, Y. S., Choi, J. B. and Kim, Y. J., 2005, "Probabilistic Damage Mechanics Assessment of Wall-Thinned Nuclear Piping Using Reliability Method and Monte-Carlo Simulation," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 29, No. 8, pp. 1102~1108.
- (11) Du, X. and Chen, W., 2000, "Towards a Better Understanding of Modeling Feasibility Robustness in Engineering Design," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, pp. 385~394.
- (12) Olhoff, N., Bendsoe, M. P. and Rasmussen, J., 1991, "On CAD-Integrated Structural Topology and Design Optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 89, pp. 259~279.
- (13) <http://www.topopt.dtu.dk/>