선형 제어 시스템 설계 (II) : 고전 제어기 설계

최 한 호
동국대학교 전기공학과

1. 서론

참고문헌 [1]-[9]를 토대로 선형 제어 시스템 설계 이론의 연재물의 첫번째로 [10]에서는 궤환 시스템의 성능과 안정도 판별에 관련된 고전 선형 제어 이론과 이와 관련된 Matlab 명령어에 대하여 다루었다. 본고에서는 대표적인 고전 제어기인 진상, 지상 및 PID 제어기 설계에 대하여 다룬다.

2.진상제어기 설계

- 진상 보상기(Lead Compensator)의 형태 :
  $K(s)=K_c(s+a)/(s+b)$, $0<a<b$로 표현할 수 있고 PD제어기 $K(s)=K_P+K_Ds$를 실제 구현할 때는 저역 필터를 포함하여 진상 보상기 형태로 구현된다.
- 일반적 특성 : 위상여유를 늘려 상대안정도를 증가시킬 수 있다. 이득 통과 주파수 w_g를 증가시켜 감쇠를 줄이고 정착시간을 감소시킨다. 그러나 대역폭을 증가시켜 시간지연이 있는 시스템의 불안정성을 초래하거나 원치 않는 신호나 잡음의 증폭을 초래할 수 있다. 정상상태오차를 줄이려면 K_c를 증가시켜야 한다.

2.1. 근궤적을 이용한 설계 1 : 해석적 방법

- 제어기 형태 :

$$K(s)=K_c(s+a)/(s+b),\ \ 0<a<b$$

- 설계과정의 개념 : 사양으로부터 원하는 극점위치 p을 결정하고 보상기 제로 a를 결정한다. 근궤적이 극점위치 p를 지나야 하므로 $K_c[p+a]G(p)=-p-b$ 즉 $K(p)G(p)=-1$ 가 성립해야 한다. 이를 이용하여 극점위치 b와 K_c를 결정하고 폐루프 특성을 p가 만족시키지 않으면 새로운 p로 반복한다.
- 설계과정 예 :

1. 사양으로부터 극점위치 $p=-\alpha+j\beta(\alpha,\beta>0)$를 결정한다.
2. 보상기 제로를 $a=\alpha$로 한다.
3. $G(p)=g_1+jg_2$를 결정한다.
4. $K_c[p+a]G(p)=jK_c\beta(g_1+jg_2)$
   $=a-b-j\beta=-p-b$의 관계식에서
   $K_c=-1/g_1, b=\alpha-\beta g_2/g_1$으로 결정한다.

- matlab 프로그램 예 : 입력은 시스템 전달함수 G(s) = ng/dg, 원하는 극점 p 이고 출력은 보상기 nk/dk

```
function [ nk,dk] = rlleadcl(ng,dg,p)
ngv=polyval(ng,p); dgv=polyval(dg,p);
G=ngv/dgv; g1=real(G);g2=imag(G);
kc=-1/g1; nk=kc*[ 1 -real(p)];
dk=[ 1 -real(p)-imag(p)*g2/g1];
```

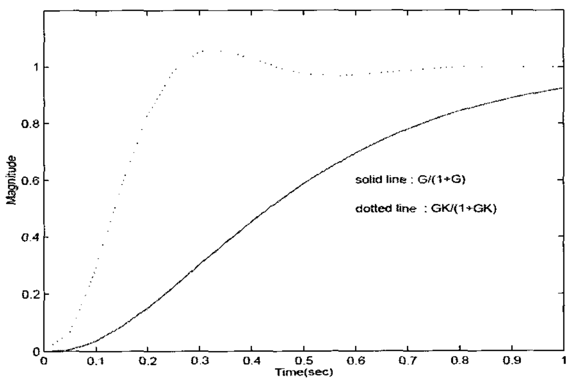

그림 1. 예제 1의 결과

예제 1 : 시스템 $G(s)=400/s^3+30s^2+200s$를 고려하자. 요구되는 설계기준은 $\zeta=0.5, w_n=13.5$라 하자. $p=-\zeta w_n+jw_n\sqrt{1-\zeta^2}=6.75+j11.69$로 주어진다. 결국 위의 프로그램을 이용하여 $K(s)=12.9\frac{(s+6.75)}{(s+24)}$을 얻을 수 있다. 아래의 프로그램은 위의 프로그램을 이용하여 제어기를 얻고 $G/(1+G)$와 $GK/(1+GK)$의 응답을

그린 그림 1을 얻기 위한 것이다.

```
ng=400;dg=[ 1 30 200 0] ; p=-6.75+11.69j;
[ nk,dk] = rlledc(ng,dg,p);
t=[ 0:0.01:1] ;
[ n1f,d1f] =feedback(ng,dg,1,1);
[ ngk,dgk] =series(ng,dg,nk,dk);
[ n2f,d2f] =feedback(ngk,dgk,1,1);
y1=step(n1f,d1f,t); y2=step(n2f,d2f,t);
plot(t,y1,'-',t,y2,':');
axis([ 0 1 0 1.2] );
text(0.6,0.6,'solid line   : G/(1+G)');
text(0.6,0.5,'dotted line  : GK/(1+GK)');
xlabel('Time(sec)');ylabel('Magnitude');
print -deps fig1.ps;
```

2.2. 근궤적을 이용한 설계 2 : 기하학적인 방법

• 제어기 형태 :

$$K(s) = K_c(s+a)/(s+b),\ \ 0 < a < b$$

• 설계과정의 개념 : 사양으로부터 원하는 극점위치 p을 결정하고 보상기 제로 a를 결정한다. 근궤적이 p를 지나므로 $K(p)G(p) = -1$ 즉, $K_c|p+a| = |p+b|/|G(p)|$, $\angle(p+a) - \angle(p+b) + \angle G(p) = \pm 180^\circ$를 이용하여 극점위치 b와 K_c를 결정하고 폐루프 특성을 p가 만족시키지 않으면 새로운 p로 반복한다.

• 설계과정 예 :

1. 사양으로부터 극점위치 $p = -\alpha + j\beta(\alpha, \beta > 0)$를 결정한다.
2. 보상기 제로를 $a = \alpha$로 한다.
3. $|G(p)|, \angle G(p)$를 결정한다.
4. $\theta = 270^\circ - \angle G(p)$으로 결정한다.
5. $|\tan\theta| = \dfrac{\beta}{b-\alpha}$ 로부터 $b = \alpha + \beta/|\tan\theta|$를 얻고 $K_c = |b-\alpha+j\beta|/\beta|G(p)|$로부터 K_c를 결정한다.
6. 사양을 p가 만족시키지 않으면 새로운 p로 반복한다.

• matlab 프로그램 예 : 입력은 시스템 전달함수 G(s) = ng/dg, 원하는 극점 p 이고 출력은 보상기 nk/dk

```
function [ nk,dk] = rlleadc2(ng,dg,p)
ngv=polyval(ng,p); dgv=polyval(dg,p);
G=ngv/dgv; aG= angle(G); theta = 3*pi/2 -aG;
b = -real(p)+imag(p)/abs(tan(theta));
kc= abs(b+p)/abs(G)/imag(p);
nk=kc*[ 1 -real(p)] ; dk=[ 1 b] ;
```

예제 2 : 시스템 $G(s) = 400/s^3 + 30s^2 + 200s$를 고려하자. 요구되는 설계기준은 $\zeta = 0.5, w_n = 13.5$라 하자. $p = -\zeta w_n + jw_n\sqrt{1-\zeta^2} = 6.75 + j11.69$로 주어진다. 결국 위의 프로그램을 이용하여 $K(s) = 12.9\dfrac{(s+6.75)}{(s+24)}$을 얻을 수 있다. 예제 1과 같은 결과임을 쉽게 알 수 있다.

2.3. 보데 선도를 이용한 설계 1

• 제어기 형태 :

$K(s) = K_c(\alpha Ts+1)/(Ts+1) = K_c K_0(s),\ \ \alpha > 1$

• 설계과정의 개념 : 일단 사양으로부터 원하는 오차범위를 만족시킬 K_c를 구하거나 K_c가 주어졌다고 가정하고 α, T를 찾는다. 그림 2와 같이

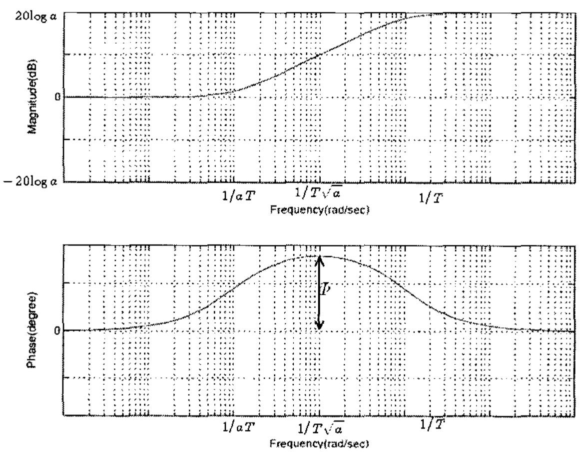

그림 2. $K_0(s) = (\alpha Ts+1)/(Ts+1)$의 보데선도 ($\alpha > 1$)

$\angle K_0(jw) = \tan^{-1}(\alpha Tw) - \tan^{-1}(Tw)$이므로 제어기를 첨가해 얻을 수 있는 가능한 최대의 위상 Φ는 $w_m = 1/T\sqrt{\alpha}$에서 $\Phi = \tan^{-1}(\sqrt{\alpha}) - \tan^{-1}(1/\sqrt{\alpha})$이다. 삼각함수의 공식을 이용하여 다음식을 얻는다.

$\sin\Phi = (\alpha-1)/(\alpha+1),\ \ \alpha = (1+\sin\Phi)/(1-\sin\Phi)$

그림 2를 참조하면 알 수 있듯이 $K_0(s)$를 통해 얻을 수 있는 부가적인 크기 M은

$M=10\log|(ja Tw_m+1)/(jTw_m+1)|=10\log\alpha$ 와 같고 부가적인 위상여유는 Φ와 같을 것이다. 결국 부가적인 위상여유 Φ를 결정하여 α를 얻고 보상기가 부가적으로 $10\log\alpha$의 크기를 증가시켰으므로 이를 줄일 수 있는 $10\log|K_cG(jw_c)|=-M=-10\log\alpha$을 만족시키는 w_c를 찾는다. 그러면 보상된 시스템의 루프이득 $K(jw)G(jw)$의 이득 통과(gain crossover) 주파수는 $w_g\approx w_c$가 되어 원하는 위상여유를 갖는 시스템을 만들게 된다.

• 설계과정 예 :

1. 사양으로부터 원하는 오차범위를 만족시키기 위한 K_c를 선정한다.
2. 보데선도로부터 $K_cG(j\omega)$의 위상여유 pm을 얻는다.
3. 원하는 사양의 위상여유 pdm과 구해진 $K_cG(j\omega)$의 위상여유 pm의 차를 추가적으로 요구되는 위상값 Φ로 결정한다.
4. Φ에 덤으로 여유를 더준다. 보통 5도의 여유를 덤으로 더해준다.
5. α를 결정식 $\alpha=(1+\sin\Phi)/(1-\sin\Phi)$를 이용하여 구한다.
6. $20\log|K_cG(jw_c)|=-10\log\alpha$를 만족시키는 w_c를 찾는다.
7. $T=1/\sqrt{\alpha}w_c$로부터 T를 결정한다. 8. 폐루프 특성이 만족스럽지 않으면 새 K_c나 Φ로 반복한다.

• matlab 프로그램 예 : 입력은 시스템 전달함수 G(s) = ng/dg, kc, 원하는 위상여유 pdm으로 각도이고 출력은 보상기 nk/dk 이다.

```
function [ nk,dk] =bodelead(ng,dg,kc,pdm)
[ gm,pm,wg,wp] =margin(kc*ng,dg);
if pdm-pm > 0,
phi = (pdm-pm+5)*pi/180;
[ mu, ph, w] =bode(kc*ng,dg);smo=length(mu);
a=(1+sin(phi))/(1-sin(phi));
mudb=20*log10(mu); mm=-10*log10(a);
wgc=spline(mudb,w,mm);
T=1/(wgc*sqrt(a)); z=a*T; p=T;
nk=kc*[ z, 1] ; dk=[ p, 1] ;
else nk=1; dk=1; end;
```

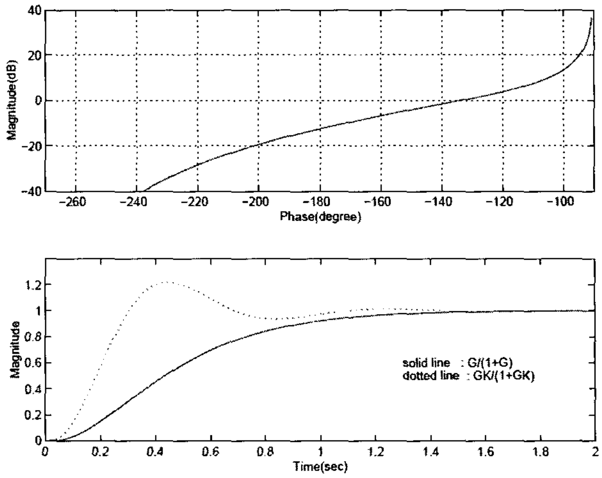

그림 3. 예제 3의 GK의 니콜스선도(위)와 응답특성비교(아래)

예제 3 : 시스템 $G(s)=400/s^3+30s^2+200s$를 고려하자. 요구되는 설계기준은 $K_c=3.5, \zeta=0.45$라 하자. $PM\approx 100\zeta$로부터 pdm=45도 할수 있다. 결국 위의 프로그램을 이용하여 $K(s)=2.5\dfrac{(0.1771s+1)}{(0.1418s+1)}$을 얻을 수 있다. 아래의 프로그램은 위의 프로그램을 이용하여 제어기를 얻고 KG의 니콜스선도와 $G/(1+G)$와 $GK/(1+GK)$의 응답을 그린 그림 3을 얻기 위한 것이다. 그림 3을 통해 위상여유 조건이 만족됨을 확인할 수 있다.

```
ng=400;dg=[ 1 30 200 0] ; pdm = 45; kc=3.5;
[ nk,dk] = bodelead(ng,dg,kc,pdm);
t=[ 0:0.01:2] ; [ n1f,d1f] =feedback(ng,dg,1,1);
[ ngk,dgk] =series(ng,dg,nk,dk);
[ n2f,d2f] =feedback(ngk,dgk,1,1);
y1=step(n1f,d1f,t); y2=step(n2f,d2f,t);
[ mu,ph] =bode(ngk,dgk); mudb=20*log10(mu);
subplot(211); plot(ph,mudb);
axis([ -270 -90 -40 40] );
xlabel('Phase(degree)');
ylabel('Magnitude(dB)'); grid;
subplot(212); plot(t,y1,'-',t,y2,':');
axis([ 0 2 0 1.4] );
text(1.3,0.6,'solid line   : G/(1+G)');
text(1.3,0.5,'dotted line  : GK/(1+GK)');
xlabel('Time(sec)');ylabel('Magnitude');
```

```
print -dps fig3.ps
```

2.4. 보데 선도를 이용한 설계 2

- 제어기 형태 : $K(s)=K_c(as+1)/(bs+1)$로 진상 또는 지상제어기가 될 수 있다.
- 설계과정의 개념 : 일단 사양으로부터 원하는 오차범위를 만족시킬 K_c가 주어졌고 원하는 이득 통과 주파수 w_g에서의 원하는 위상여유 Φ값이 주어졌다면(원하는 감쇠비 ζ와 고유진동수 w_n으로 부터 $w_g=w_n, \Phi=100\zeta$의 관계를 이용해 구할 수 있다) $K(jw_g)G(jw_g)=e^{j(\Phi-180°)}$를 만족시켜야 한다. 이 식을 이용해 a, b를 구한다. 이때 만약 $a>b$이면 진상제어기이고 $a<b$이면 지상제어기다.
- 설계과정 예 :

1. 사양으로부터 원하는 오차범위를 만족시키기 위한 K_c를 선정한다.
2. $g_1+jg_2=G(jw_g)$를 계산한다.
4. 관계식 $K(jw_g)G(jw_g)=-e^{j\Phi}$로부터

$$K_c[g_1+jg_2][1+jaw_g]=-[\cos\Phi+j\sin\Phi][1+jbw_g]$$

를 사용하여 a, b를 결정한다.

5. 폐루프 특성이 만족스럽지 않으면 새 K_c나 위상여유로 반복한다.

- matlab 프로그램 예 : 입력은 시스템 전달함수 G(s) = ng/dg, DC 이득 kc, 원하는 위상여유 pdm으로 각도이고 원하는 이득 통과 주파수는 wg이다. 출력은 보상기 nk/dk이다.

```
function [ nk,dk] =bodeleadlag(ng,dg,kc,wg,pdm)
ngv=polyval(ng,j*wg); dgv=polyval(dg,j*wg);
g1=real(ngv/dgv); g2=imag(ngv/dgv);
phi = pdm*pi/180;
a11=kc*g2*wg;a12 = wg*sin(phi); a21=kc*g1*wg;
a22=wg*cos(phi);
x1=kc*g1+cos(phi);x2=-1*(kc*g2+sin(phi));
detA = a11*a22-a12*a21;
a=(x1*a22-a12*x2)/detA;
b=(a11*x2-x1*a21)/detA;
nk=kc*[ a 1 ];dk=[ b 1];
```

예제 4 : 시스템 $G(s)=400/s^3+30s^2+200s$를 고려하자. 요구되는 설계기준은 $K_c=5, \zeta=0.45, w_n=14$라하자. 이는 $K_c=5, w_g=w_n$, $\text{pdm}\approx100\zeta=45°$을 의미한다. 결국 위의 프로그램을 이용하여 $K(s)=\dfrac{(1.1353s+5)}{(0.0381s+1)}$을 얻을 수 있다. 아래의 프로그램은 위의 프로그램을 이용하여 제어기를 얻고 KG의 니콜스선도와 $G/(1+G)$와 $GK/(1+GK)$의 응답을 그린 그림 4를 얻기 위한 것이다. 그림 4를 통해 위상여유 조건이 만족됨을 확인할 수 있다.

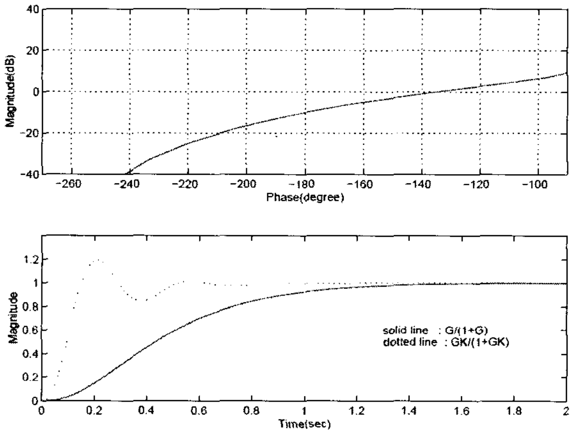

그림 4. 예제 4의 GK의 니콜스선도(위)와 응답특성비교(아래)

```
ng=400;dg=[ 1 30 200 0] ; pdm = 45; kc=5;wg=14;
[ nk,dk] = bodeleadlag(ng,dg,kc,wg,pdm);
t=[ 0:0.01:2] ; [ n1f,d1f] =feedback(ng,dg,1,1);
[ ngk,dgk] =series(ng,dg,nk,dk);
[ n2f,d2f] =feedback(ngk,dgk,1,1);
y1=step(n1f,d1f,t); y2=step(n2f,d2f,t);
[ mu,ph] =bode(ngk,dgk); mudb=20*log10(mu);
subplot(211);plot(ph,mudb);
axis([ -270 -90 -40 40]);
xlabel('Phase(degree)');
ylabel('Magnitude(dB)'); grid;
subplot(212);plot(t,y1,'-',t,y2,':');
axis([ 0 2 0 1.4]);
text(1.3,0.6,'solid line : G/(1+G)');
text(1.3,0.5,'dotted line : GK/(1+GK)');
xlabel('Time(sec)');ylabel('Magnitude');
print -dps fig4.ps
```

3. 지상제어기 설계

• 지상 보상기(Lag Compensator)의 형태 :
$K(s)=K_c(s+a)/(s+b)$, $0<b<a$로 표현할 수 있고 PI제어기 $K(s)=K_P+K_I\frac{1}{s}$를 실제 구현할 때는 지상 보상기의 특별한 형태로 생각될 수 있다.

• 일반적 특성 : 위상지연을 도입하기에 불안정하거나 그에 근접한 시스템에는 안 쓰인다. 지연 보상기는 시스템 이득을 줄여 상대안정도를 키우는데 쓰이기도 한다. 정상상태오차를 줄이고, 이득 통과 주파수를 줄인다. 응답이 늦어지고 대역폭을 줄인다.

3.1. 근궤적을 이용한 설계 1 : 해석적 방법

• 제어기 형태 :

$$K(s)=K_c(as+1)/(bs+1),\ 0<a<b$$

• 설계과정의 개념 : 일단 사양으로부터 원하는 오차범위를 만족시킬 K_c를 구하고 원하는 극점위치 p을 결정한다. 근궤적이 p를 지나야 하므로 $K(p)G(p)=-1$ 즉 $K_c[ap+1]G(p)=-bp-1$를 이용하여 a, b를 결정하고 폐루프 특성을 p가 만족시키지 않으면 새로운 p로 반복한다

• 설계과정 예 :

1. 사양으로부터 극점위치 $p=-\alpha+j\beta(\alpha,\beta>0)$를 결정한다.
2 $G(p)=g_1+jg_2$를 결정한다.
4. $K_c[ap+1]G(p)=K_c[1-a\alpha+j\beta][g_1+jg_2]$의 관계식과 $K_c[ap+1]G(p)=(b\alpha-1)-jb\beta=-bp-1$의 관계식에서 a, b를 결정한다.

• matlab 프로그램 예 : 입력은 시스템 전달함수 G(s) = ng/dg, DC 이득 kc, 원하는 극점 p 이고 출력은 보상기 nk/dk

```
function [ nk,dk] = rllagcl(ng,dg,kc, p)
ngv=polyval(ng,p); dgv=polyval(dg,p);
G=ngv/dgv; g1=real(G);g2=imag(G);
a11=-real(p)*kc*g1; a12 = -real(p);
a21 = -real(p)*kc*g2; a22= -imag(p);
x1=kc*(g1-imag(p)*g2)+1;
x2=kc*(g2+imag(p)*g1); detA=a11*a22-a12*a21;
a=(x1*a22-a12*x2)/detA;
b=(a11*x2-x1*a21)/detA;
nk=kc*[ 1 a]; dk=[ 1 b];
```

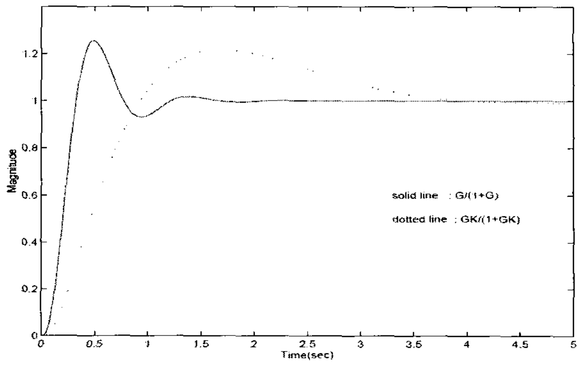

그림 5. 예제 5의 결과

예제 5 : 시스템 $G(s)=1400/(s^3+30s^2+200s)$를 고려하자. 요구되는 $K_c=1$, $p=-1+j$라 하자. 결국 위의 프로그램을 이용하여 $K(s)=\frac{(1.04s+1)}{(4.5353s+1)}$을 얻을 수 있다. 아래의 프로그램은 위의 프로그램을 이용하여 제어기를 얻고 $G/(1+G)$와 $GK/(1+GK)$의 응답을 그린 그림 5을 얻기 위한 것이다.

```
ng=1400;dg=[ 1 30 200 0] ; kc=1;p=-1+j;
[ nk,dk] =rllagcl(ng,dg,kc,p);
t=[ 0:0.01:5] ;[ n1f,d1f] =feedback(ng,dg,1,1);
[ ngk,dgk] =series(ng,dg,nk,dk);
[ n2f,d2f] =feedback(ngk,dgk,1,1);
y1=step(n1f,d1f,t); y2=step(n2f,d2f,t);
plot(t,y1,'-',t,y2,':');
axis([ 0 5 0 1.4]);
text(3.3,0.6,'solid line   : G/(1+G)');
text(3.3,0.5,'dotted line  : GK/(1+GK)');
xlabel('Time(sec)');ylabel('Magnitude');
print -dps fig5.ps
```

3.2. 근궤적을 이용한 설계 2 : 기하학적 방법

• 제어기 형태 :

$$K(s)=K_c(s+a)/(s+b),\ 0<b<a$$

• 설계과정의 개념 : 사양으로부터 원하는 극점위치 p을 결정하고 보상기극점 b를 결정한다. 근궤적이 p를 지나므로 $K(p)G(p)=-1$ 즉 $K_c|p+a|=|p+b|/|G(p)|$,

$\angle(p+a)-\angle(p+b)+\angle G(p)=\pm 180^{o}$를 이용하여 a, K_c를 결정하고 폐루프 특성을 p가 만족시키지 않으면 새로운 p로 반복한다.

• 설계과정 예 :

1. 사양으로부터 극점위치 $p=-\alpha+j\beta(\alpha, \beta>0)$를 결정한다.
2. 보상기 극점을 원점 가까이에 예로 $b=0.1$로 한다.
3. $|G(p)|, \angle G(p)$를 결정한다.
4. $\theta=180^{o}-\angle G(p)+\angle(p+b)$으로 결정한다.
5. $|\tan\theta|=\dfrac{\beta}{a-\alpha}$의 관계로부터 $a=\alpha+\beta/|\tan\theta|$를 얻고 $K_c=|b-\alpha+j\beta|/|a-\alpha+j\beta||G(p)|$로부터 K_c를 결정한다.
6. 사양을 p가 만족시키지 않으면 새로운 p로 반복한다.

• matlab 프로그램 예 : 입력은 시스템 전달함수 G(s) = ng/dg, 원하는 극점 p 이고 출력은 보상기 nk/dk

```
function [ nk,dk] = rlleadc2(ng,dg,p)
ngv=polyval(ng,p); dgv=polyval(dg,p);
G=ngv/dgv;
b=0.1; theta = pi-angle(G)+angle(p+b);
a = -real(p)+imag(p)/abs(tan(theta));
kc= abs(b+p)/abs(G)/imag(a+p);
nk=kc*[ 1 a] ; dk=[ 1 b] ;
```

예제 6 : 시스템 $G(s)=1400/(s^3+30s^2+200s)$를 고려하자. 요구되는 $p=-0.7+j$라 하자. 결국 위의 프로그램을 이용하여 $K(s)=\dfrac{(0.1838s+0.1777)}{(s+0.1)}$을 얻을 수 있다. 아래의 프로그램은 위의 프로그램을 이용하여 제어기를 얻고 $G/(1+G)$와 $GK/(1+GK)$의 응답을 그린 그림 6을 얻기 위한 것이다.

```
ng=1400;dg=[ 1 30 200 0] ; p=-0.7+j;
[ nk,dk] =rllagc2(ng,dg,p);
t=[ 0:0.01:10] ;[ n1f,d1f] =feedback(ng,dg,1,1);
[ ngk,dgk] =series(ng,dg,nk,dk);
[ n2f,d2f] =feedback(ngk,dgk,1,1);
y1=step(n1f,d1f,t);y2=step(n2f,d2f,t);
plot(t,y1,'-',t,y2,':');axis([ 0 10 0 1.4] );
text(7.3,0.6,'solid line   : G/(1+G)');
text(7.3,0.5,'dotted line  : GK/(1+GK)');
xlabel('Time(sec)');ylabel('Magnitude');
print -dps fig6.ps
```

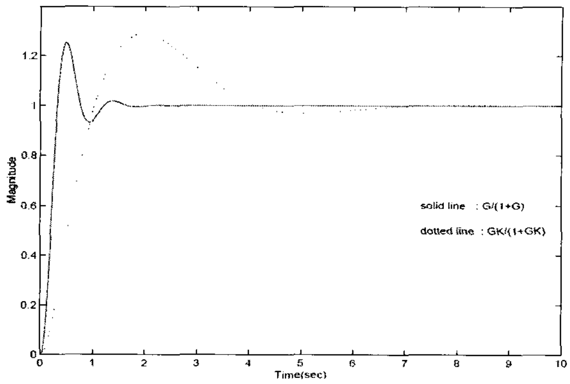

그림 6. 예제 6의 결과

3.3. 보데 선도를 이용한 설계

• 제어기 형태 :

$$K(s)=K_c(aTs+1)/(Ts+1)=K_cK_0(s),\quad a<1$$

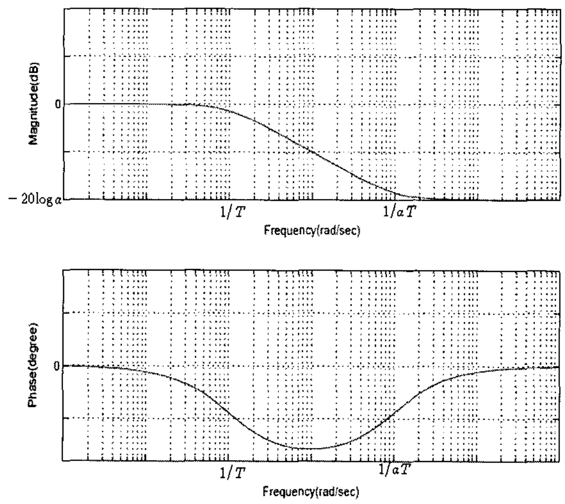

그림 7. $K_0(s)=(aTs+1)/(Ts+1)$의 보데선도($a<1$)

• 설계과정의 개념 : 일단 사양으로부터 원하는 오차범위를 만족시킬 K_c를 구하거나 K_c가 주어졌다고 가정하고 a, T를 찾는다. 그림 7을 참조하면 만약 $K_cG(jw)$에 $K_0(s)$를 첨가해도 $K(jw)G(jw)$는 $w_g=10/aT$의 주파수 이상에서의 이득감소는 $20\log a$라고 간주할

수 있다. 이를 이용하여 $K_cG(jw)$의 보데선도를 그려서 원하는 위상여유를 만족하는 즉 $\angle K_cG(jw_g) \approx PM$ 만족하는 주파수값 w_g를 찾아라(보통은 PM에 5도의 여유를 준다). 이때의 이득은 $|K(jw_g)G(jw_g)| = 1$의 관계를 만족해야 한다. 만약 K_cG에 $K_0(jw)$를 첨가하면 $w_g = 10/aT$이상의 주파수에서는 위상의 감소는 거의 없는 대신에 $GR = 20\log|K_cG(jw_g)|$만큼 $K_cG(jw)$의 보데 크기 선도를 내릴 수 있으므로 $a = 10^{GR/20}$, $T = 10/aw_g$의 관계를 갖도록 하면 원하는 모양의 $K(jw)G(jw)$의 보데선도를 얻을 수 있다.

- 설계과정 예 :

1. 사양으로부터 원하는 오차범위를 만족시키기 위한 K_c를 선정한다.
2. $K_cG(j\omega)$의 보데선도로부터 원하는 위상여유 dpm에 덤으로 5도정도를 더한 값을 얻을 수 있는 주파수 wg와 그 때의 크기 값 GR를 구한다.
3. $a = 10^{GR/10}$, $T = 10/aw_g$의 관계로 부터 a, T를 구하라.
4. 사양을 만족시키지 않으면 새로운 dpm이나 K_c로 반복한다.

- matlab 프로그램 예 : 입력은 시스템 전달함수 G(s) = ng/dg, kc, 원하는 위상여유 pdm으로 각도이고 출력은 보상기 nk/dk 이다.

```
function [nk,dk]=bodelag(ng,dg,kc,pdm)
[mg,pg,w]=bode(kc*ng,dg);
wg=spline(pg,w,pdm+5-180); mgdb=20*log10(mg);
idx=find(w>=wg);ind=idx(1);    gr=-mgdb(ind);
a=10^(gr/20); T=10/a/wg;
nk=kc*[a*T 1]; dk=[T 1];
```

예제 7 : 시스템 $G(s) = 100/(s^2+5s)$를 고려하자. 요구설계기준은 $K_c = 1, \zeta = 0.45$라 하자. $PM \approx 100\zeta$로부터 pdm=45도로 할 수 있다. 결국 위의 프로그램을 이용하여 $K(s) = \dfrac{(2.3835s+1)}{(7.8228s+1)}$을 얻을 수 있다. 아래의 프로그램은 위의 프로그램을 이용하여 제어기를 얻고 $G/(1+G)$와 $GK/(1+GK)$의 응답을 그린 그림 8을 얻기 위한 것이다. 그림 8을 통해 위상여유 조건이 만족됨을 확인할 수 있다.

```
ng=100;dg=[1 5 0]; pdm=45; kc=1;
[nk,dk]=bodelag(ng,dg,kc,pdm);
t=[0:0.01:5]; [n1f,d1f]=feedback(ng,dg,1,1);
[ngk,dgk]=series(ng,dg,nk,dk);
[n2f,d2f]=feedback(ngk,dgk,1,1);
y1=step(n1f,d1f,t); y2=step(n2f,d2f,t);
[mu,ph]=bode(ngk,dgk); mudb=20*log10(mu);
subplot(211); plot(ph,mudb);
axis([-270 -90 -40 40]);
xlabel('Phase(degree)');
ylabel('Magnitude(dB)'); grid;
subplot(212); plot(t,y1,'-',t,y2,':');
axis([0 5 0 1.5]);
text(3.3,0.8,'solid line  : G/(1+G)');
text(3.3,0.5,'dotted line  : GK/(1+GK)');
xlabel('Time(sec)');ylabel('Magnitude');
print -dps fig8.ps
```

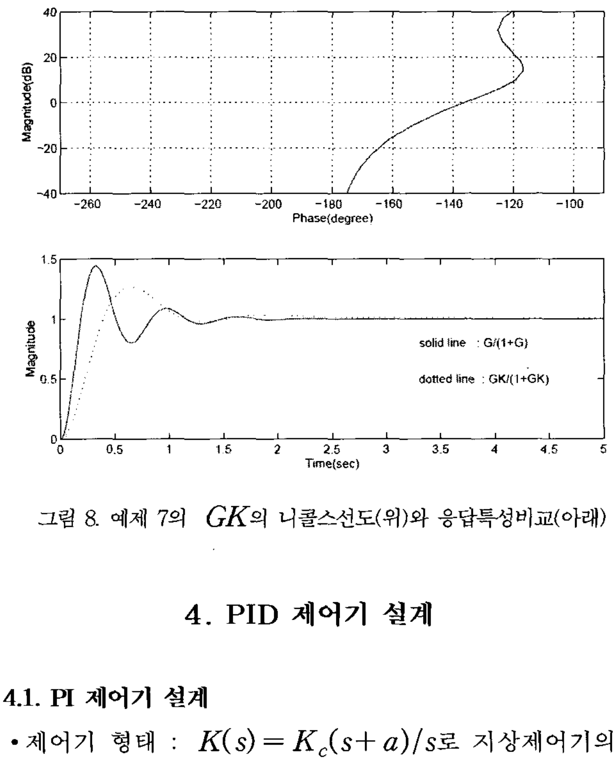

그림 8. 예제 7의 GK의 니콜스선도(위)와 응답특성비교(아래)

4. PID 제어기 설계

4.1. PI 제어기 설계

- 제어기 형태 : $K(s) = K_c(s+a)/s$로 지상제어기의 극점이 0에 있는 것과 같다.
- 설계과정의 개념 : 사양으로부터 원하는 극점위치 p을 결정한다. 근궤적이 p를 지나야 하므로 $K(p)G(p) = -1$ 즉 $\angle(p+a) - \angle(p) + \angle G(p) = \pm 180^o$ $K_c|p+a| = |p|/|G(p)|$를 이용하여 a, K_c를 결정하고

폐루프 특성을 만족시키지 않으면 새로운 p로 반복한다.

- 설계과정 예 :

1. 사양으로부터 극점위치 $p=-\alpha+j\beta(\alpha,\beta>0)$를 결정한다.
2. $|G(p)|$, $\angle G(p)$를 결정한다.
3. $\theta=180^{\circ}-\angle G(p)+\angle p$으로 결정한다.
5. $|\tan\theta|=\dfrac{\beta}{a-\alpha}$의 관계로부터 $a=\alpha+\beta/|\tan\theta|$를 얻고 $K_c=|-\alpha+j\beta|/|a-\alpha+j\beta||G(p)|$로부터 K_c를 결정한다.
6. 사양을 p가 만족시키지 않으면 새로운 p로 반복한다.

- matlab 프로그램 예 : 입력은 시스템 전달함수 G(s) = ng/dg, 원하는 극점 p 이고 출력은 보상기 nk/dk

```
function [ nk, dk] = rlPIc(ng,dg,p)
ngv=polyval(ng,p); dgv=polyval(dg,p);
G=ngv/dgv; theta = pi-angle(G)+angle(p);
a = -real(p)+imag(p)/abs(tan(theta));
kc= abs(p)/abs(G)/imag(a+p);
nk=kc*[ 1 a] ; dk=[ 1 0] ;
```

예제 8 : 시스템 $G(s)=1400/(s^3+30s^2+200s)$를 고려하자. 요구되는 $p=-0.7+j$라 하자. 결국 위의 프로그램을 이용하여 $K(s)=0.1924+0.1718\frac{1}{s}$을 얻을 수 있다. 아래의 프로그램은 위의 프로그램을 이용하여 제어기를 얻고 $G/(1+G)$와 $GK/(1+GK)$의 응답을 그린 그림 9를 얻기 위한 것이다.

```
ng=1400;dg=[ 1 30 200 0] ; p=-0.7+j;
[ nk,dk] =rlPIc(ng,dg,p);
t=[ 0:0.01:10] ;[ n1f,d1f] =feedback(ng,dg,1,1);
[ ngk,dgk] =series(ng,dg,nk,dk);
[ n2f,d2f] =feedback(ngk,dgk,1,1);
y1=step(n1f,d1f,t);y2=step(n2f,d2f,t);
plot(t,y1,'-',t,y2,':');axis([ 0 10 0 1.4] );
text(7.3,0.6,'solid line   : G/(1+G)');
text(7.3,0.5,'dotted line  : GK/(1+GK)');
xlabel('Time(sec)');ylabel('Magnitude');
print -dps fig9.ps
```

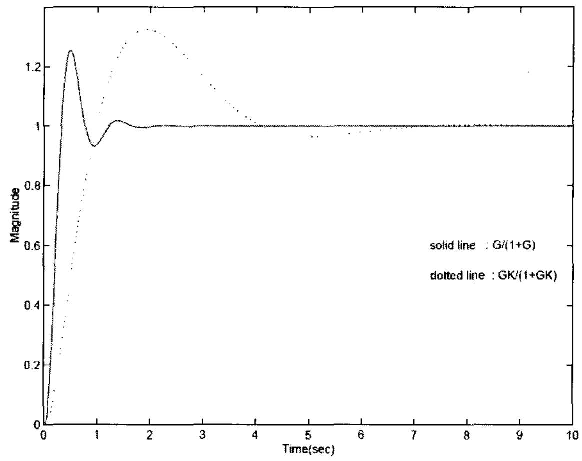

그림 9. 예제 8의 결과

4.2. Ziegler-Nichols method

- 제어기 형태 :

$$K(s)=K_P(1+T_Ds+\frac{1}{sT_I})=K_P+K_Ds+K_I\frac{1}{s}$$

- 설계과정의 개념 : Z-N 방법은 시스템 $G(s)$에 비례 궤한 $K(s)=K_P$만을 사용하여 궤환시스템이 진동할 때의 이득 k_c과 그 때의 진동주기 t_c를 찾아 PID 제어기의 경우 $K_P=0.6k_c$, $T_D=0.12t_c$, $T_I=0.5t_c$의 공식을 사용해서 이득을 결정한다. 참고적으로 PI의 경우에는 $K_P=0.4k_c$, $T_I=0.8t_c$, P의 경우에는 $K_P=0.5k_c$를 사용한다.
- 설계과정 예 :

1. $G(jw)$의 근궤적을 그린다.
2. 허수축을 교차할 때의 이득 kc와 허수축에 교차할 때의 주파수 wm을 구한다.
4. tc=2pi/wm으로 tc를 구한다.
5. PID 이득을 공식에 따라 계산한다.

- matlab 프로그램 예 : 입력은 시스템 전달함수 G(s) = ng/dg, 원하는 극점 p 이고 출력은 보상기 nk/dk

```
clf; rlocus(ng,dg); kc = rlocfind(ng,dg);
pc=rlocus(ng,dg,kc); wm=max(imag(pc));
tc=2*pi/wm; kp=0.6*kc; td=0.12*tc; ti=0.5*tc;
nk=kp*[ td 1 1/ti] ; dk=[ 1 0] ;
```

예제 9 : 시스템 $G(s)=400/(s^3+30s^2+200s)$를 고려하자. 결국 위의 프로그램을 이용하여 PID 제어기 $K(s)=8.2561+35.8691\frac{1}{s}+0.4561s$을 얻을 수 있다. 아래의 프로그램은 위의 프로그램을 이용하여 제어기를 얻고 $G/(1+G)$와 $GK/(1+GK)$의 응답을 그린 그림 10를 얻기 위한 것이다.

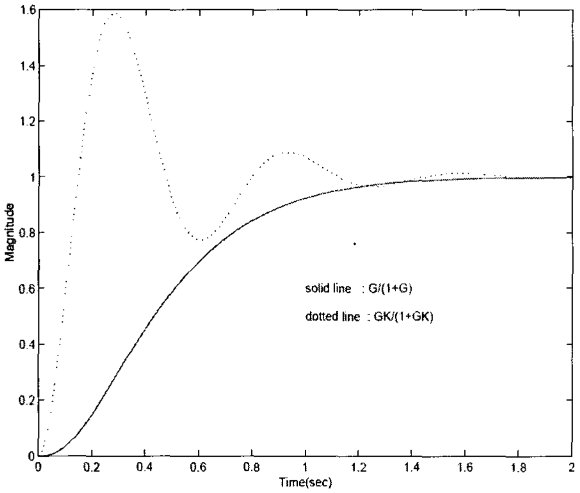

그림 10. 예제 9의 결과

```
ng=400;dg=[ 1 30 200 0] ;
clf; rlocus(ng,dg); kc = rlocfind(ng,dg);
pc=rlocus(ng,dg,kc); wm=max(imag(pc));
tc=2*pi/wm; kp=0.6*kc; td=0.12*tc; ti=0.5*tc;
nk=kp*[ td 1 1/ti] ; dk=[ 1 0] ;
t=[ 0:0.01:2] ;[ n1f,d1f] =feedback(ng,dg,1,1);
ngk=conv(ng,nk);dgk=conv(dg,dk);
[ n2f,d2f] =feedback(ngk,dgk,1,1);
y1=step(n1f,d1f,t);y2=step(n2f,d2f,t);
plot(t,y1,'-',t,y2,':');axis([ 0 2 0 1.6] );
text(1,0.6,'solid line   : G/(1+G)');
text(1,0.5,'dotted line  : GK/(1+GK)');
xlabel('Time(sec)');ylabel('Magnitude');
print -dps fig10.ps
```

4.3. PID/PD 제어기 설계

• 제어기 형태 : $K(s)=K_P+K_Ds+K_I\frac{1}{s}$로 비례-미분-적분 요소를 포함한다.

• 설계과정의 개념 : 시스템 $G(s)=N(s)/D(s)$에 대하여 PID 제어기 $K(s)$로 궤환한 경우 전달함수는 $G_f(s)=N(K_Ds^2+K_Ps+K_I)/[sD+N(K_Ds^2+K_Ps+K_I)]$로 주어지고 오차 $E(s)=Y(s)-U(s)$는 $E(s)/U(s)=sD/[sD+N(K_Ds^2+K_Ps+K_I)]$의 관계를 만족시킨다. $U(s)=LAPLACE^{-1}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$일때의 정상상태 오차 e_{ss}는 $e_{ss}=\frac{n!}{K_I}\lim_{s\to 0}\frac{D(s)}{s^{n-1}N(s)}$이다. 이식으로부터 K_I를 구한다. 원하는 이득 통과 주파수 w_g에서의 원하는 위상여유 Φ값이 주어졌다면 (원하는 감쇠비 ζ와 고유진동수 w_n으로 부터 $w_g=w_n, \Phi=100\zeta$의 관계를 이용해 구할 수 있다) $(K_P+jw_gK_D+\frac{K_I}{jw_g})G(jw_g)=-e^{j\Phi}$의 관계식으로 부터 K_P, K_D를 결정한다.

• 설계과정 예 :

1. $G(jw_g)=g_1+jg_2$를 구한다.
2. $x+jy=-(\cos\Phi+j\sin\Phi)/(g_1+jg_2)+jK_I/w_g$를 만족시키는 x, y를 구한다.
3. $K_P=x, K_D=y/w_g$로 구해진다.

• matlab 프로그램 예 : 입력은 시스템 전달함수 G(s) = ng/dg, ki, 원하는 이득 통과 주파수 wg, 원하는 위상여유 값 dpm 이고 출력은 보상기 nk/dk

```
function [ kp,kd,nk,dk] =PIDc(ng,dg,ki,dpm,wg)
ngv=polyval(ng,j*wg);    dgv=polyval(dg,j*wg);
g=ngv/dgv;       ph =dpm*pi/180;
jph =cos(ph)+j*sin(ph);
xjy =j*(ki/wg)-(jph/g);
y=imag(xjy); x=real(xjy);
kp=x; kd=y/wg;
if ki~=0, dk=[ 1 0] ; nk=[ kd kp ki] ;
else dk=1; nk=[ kd kp] ; end;
```

예제 10 : 시스템 $G(s)=400/s^3+30s^2+200s$를 고려하자. 요구되는 설계기준은 $\zeta=0.45, w_n=14$라 하자. 이는 $w_g=w_n$, pdm$\approx 100\zeta=45°$을 의미한다. PD제어기가 요구된다고 가정하자. 결국 위의 프로그램을 이용하여 $K(s)=0.7354s+10.4935$을 얻을 수 있다. 아래의 프로

그램은 위의 프로그램을 이용하여 제어기를 얻고 $G/(1+G)$와 $GK/(1+GK)$의 응답을 그린 그림 11를 얻기 위한 것이다.

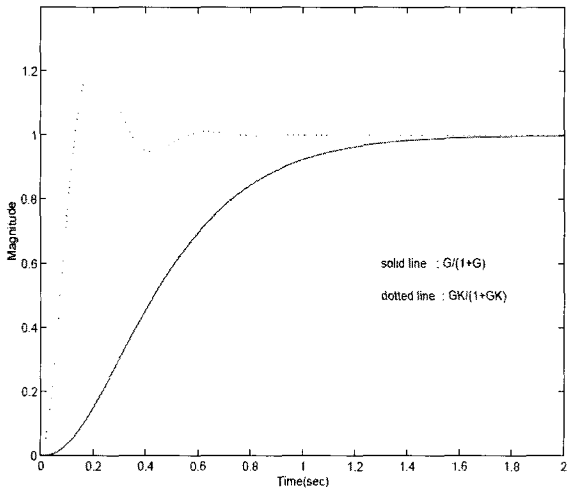

그림 11. 예제 10의 결과

```
ng=400;dg=[ 1 30 200 0] ; dpm=45; wg=14; ki=0;
[ nk,dk] =PIDc(ng,dg,ki,dpm,wg);
t=[ 0:0.01:2] ;[ n1f,d1f] =feedback(ng,dg,1,1);
ngk=conv(ng,nk);dgk=conv(dg,dk);
[ n2f,d2f] =feedback(ngk,dgk,1,1);
y1=step(n1f,d1f,t);y2=step(n2f,d2f,t);
plot(t,y1,'-',t,y2,':');axis([ 0 2 0 1.4] );
text(1.3,0.6,'solid line   : G/(1+G)');
text(1.3,0.5,'dotted line  : GK/(1+GK)');
xlabel('Time(sec)');ylabel('Magnitude');
print -dps fig11.ps
```

5. 결론

선형 제어 시스템 이론에 대한 연재물의 두 번째로 본고에서는 진상, 지상 및 PID 제어기와 같은 주파수영역에 기반한 고전 제어기 설계에 대하여 다루었다. 다음에는 상태공간상에서 설계하는 현대 제어기 설계에 대하여 다룬다.

참고문헌

[1] B. Shahina and M. Hassul, Control System DesignUsing Matlab, Prentice Hall, 1993

[2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory, SIAM, 1994, http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/

[3] W.C. Levine, The Control Handbook, CRC Press, 2000

[4] C. Scherer and S. Weiland, Linear Matrix Inequalities in Control, http://www.cs.ele.tue.nl /SWeiland

[5] A. Damen and S. Weiland, Robust Control, http://www.cs.ele.tue.nl /SWeiland

[6] 김종식, 선형 제어 시스템 공학, 청문각, 1991년

[7] G. Balas et al., Robust Control Toolbox, Mathworks, 2005

[8] Control System Toolbox for Use with Matlab : User's Guide, Mathworks, 2005

[9] 최한호, 로봇공학 강의 노트, http://home.dongguk.edu/user/hhchoi

[10] 최한호, 선형 제어 시스템 설계(I): 궤환 시스템의 성능과 안정도 판별, 제어자동화시스템공학회지, 제12권, 제1호, pp. 55-69, 2006

저자약력

《최 한 호》

- 1966년 8월 25일생.
- 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과 (공학사).
- 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학석사).
- 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학박사).
- 1994년 9월~1998년 2월 대우전자 전략기술 연구소 연구원.
- 1998년 3월~2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과 교수.
- 2003년 3월~현재 동국대학교 전기공학과 교수.
- 관심분야 : 강인제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상현실 및 로보틱스.
- E-mail : hhchoi@dongguk.edu