

중학생들이 수학 문장제 해결 과정에서 구성하는 유사성 분석

박 현 정* · 이 중 희**

본 연구의 목적은 문제 해결 과정 중 문제 이해나 계획 단계에서 학생들이 구성하는 유사성 탐구이다. 사례연구를 통하여 학생들이 수학 문장제를 해결하는 과정에서 구성하는 유사성들과 그러한 유사성들이 어떻게 구성되는지를 고찰하였다. 연구 결과, 학생들은 처음에 문맥적인 정보를 근거로 표면적 유사성을 구성하였으며, 그것은 문제 해법을 구하는 과정에 영향을 미쳤다. 특히, 스스로 구성된 다이어그램을 사용하여 문제를 이해하고, 문제들 간의 유사점과 차이점을 생각한 학생은 이전에 경험했던 식을 주어진 문제에 적합하게 변형하였다. 그러나 표면적 유사성만을 바탕으로 총체적으로 문제를 이해하는 학생은 이전에 적용하였던 식을 주어진 문제 해결에 적용할 수 있도록 변형하지 못했다.

1. 서 론

학생들은 대부분 새로운 문제를 해결할 때 관련된 이전 경험이나 지식을 생각한다. 그것은 전에 이미 풀었던 어떤 문제와 비슷하지도 않고 관련도 없는 완전한 새로운 문제란 거의 상상할 수 없기 때문이다. Clfareill(1993)와 Chinnappan(1998)는 우수한 문제 해결자는 이전에 문제를 해결한 경험을 근거로 유사한 부분을 생각해서 문제해결에 성공한다고 주장하였다. 또한 Polya(2002)와 Schoenfeld(1985)는 지금 다루어야 할 문제와 똑같은 문제를 전에 풀어본 적이 있는가, 들어본 적이 있는가, 만일 당면한 문제와 비슷한 문제를 풀어 본적이 있다면 그 가능성을 놓쳐서는 안 되며, 그러한 경험이 없다고 해도 이전에 경험한 문제와의 유사성에 관련된 지식을 동원시킬 수 있다면서 문제 해

결의 전략과 발문으로 유사성을 강조하였다.

이와 같이 지금 해결하고자 하는 문제의 해법을 구하는데 있어서 이전에 경험한 문제가 근원적이며 핵심적인 역할을 할 수 있다면, 문제 해결자가 기억하는 문제와 현 문제가 어떠한 점에서 유사하다고 보는가는 문제해결 과정에 매우 중요한 영향을 미칠 수 있다. 따라서 문제해결 과정에서 이전에 경험한 문제와의 유사성을 인식할 수 있는 문제 해결자들의 능력은 매우 중요한 것이며, 그들이 어떠한 점에서 유사하다고 보는가에 대한 분석은 의미 있는 것이라고 볼 수 있다.

지금까지 이루어진 유사성에 관련된 연구들에서는, 수학 문장제를 해결하기 위한 과정에서 문제에 서술된 용어나 문구가 이전에 경험한 문제와 관련이 되는 경우에 학생들은 현 문제를 이전문제와 유사하다고 생각한다는 결과를 얻었다. 예를 들면, Bassok(1990), Bassok &

* 이화여대대학원, hyunjp88@naver.com

** 이화여자대학교, jonghee@ewha.ac.kr

Holyoak(1993), Chi, Feltovich, & Glaser(1981), Gentner et al.(1993), Reed(1993)의 연구들이 있다. 이러한 연구들을 수행한 연구자들은 학생들이 구성한 유사성의 관점을 모두 문제 해결의 성공 여부에 따라 연구자 자신들의 관점이나 문제에서 서술된 정보에 대한 표면적이거나 구조적인 관점만을 바탕으로 해석하였다. 또한 연구자들은 양적 분석만을 바탕으로 연구결과를 해석한 것이 대부분이었다.

Wagner(2003)는 이와 같이 연구자 중심으로 유사성을 해석하는 것은 수학을 단지 문제와 문제해결을 위한 도구들, 그리고 절차의 집합체로 이해하는 것으로 제한하기 때문으로 보았으며, 학생들이 수학에 관련된 세계를 이해하는 방식, 즉 학생들이 진정으로 마음속에 새겨 넣고, 해석하고, 그리고 구조화하는 방식을 고려해야 한다고 하였다.

최근에 와서 전이에 대한 정의를 '개인적인 유사성의 구성'이라는 개념으로 재 개념화하여, 특정한 수학적 개념을 중심으로 연구대상자들이 구성하는 유사성을 탐구하기 위하여 질적인 연구들(Greeno et al., 1993; Lobato, 1997; Wagner, 2003)이 시행되었다. 그러나 이러한 연구들도 문제 해결과정에 초점을 두고 학생들이 구성하는 유사성을 심층적으로 연구한 것은 아니었다.

이러한 점에 착안하여, 본 연구는 수학 문장제를 해결하기 위하여 연구대상자들이 자신의 경험이나 이전 문제들 사이에서 떠올리는 유사성은 어떠한 것이며, 유사성을 어떻게 구성하는가를 고찰하고자 한다. 본 논문에서는 문제 해결과정에서 구성되는 유사성들 간의 관계와 그 과정을 탐구하기 위하여 문제 이해나 계획 단계를 중점적으로 탐구하였다. 그렇지만, 본 연구의 후속연구에서는 해법의 실행과정에서 유사성이 어떻게 전개되며 구체화되는가에 대

한 고찰이 이뤄질 것이다.

II. 이론적 배경

본 장에서는 사례연구에 앞서 연구문제를 분석하는데 이론적 기반이 될 수 있는 문헌연구를 하였다. 유사성의 구성과정을 이해하고자 그 유형 분석에 대한 연구와 유사성을 바탕으로 한 문제분류와 문제해결에 관련된 연구에 대하여 살펴본다.

1. 유사성의 유형과 구성

가. 유사성의 유형

사람들은 개념에 대한 주요 현상 중의 하나인 유사성을 바탕으로, 여러 대상들을 다양한 방법으로 비교한다. 여러 대상들을 유사하다거나 다르다고 판단하며, 또한 부분적으로도 유사하거나 다르다고 판단한다. 이와 같은 판단의 다양성은 분명히 지각적 유사성이 하나가 아니라 상호 관련된 여러 유형이 있음을 말하는 것이다(Smith, 1989). 이러한 유사성은 대상들의 속성이나 특징을 어떠한 관점에서 보느냐에 따라 다양하게 구분될 수 있다(신현정, 2000).

유사성의 유형을 크게 두 개의 관점으로 나누면 다음과 같다. 첫째 표면적 유사성(surface similarity)과 심층적 유사성(deep similarity)이다. 둘째 Smith(1989)에 의해 구분되는 총체적(global) 유사성과 차원적(dimensional) 유사성이다.

첫째, 표면적 유사성과 심층 유사성의 구분은 유비추리에서 유래한다. 표면적 유사성은 개념들에 대하여 접근하기 쉬운 구성 요소들을 바탕으로 사고될 수 있는 것이며, 심층적인 유

사성은 보다 중심적인 관점의 유사성이며, 개념에 대한 핵심적인 특성에 대한 것이다(Medin & Ortony, 1989). Gentner(1989)는 문제내용에서 서술된 대상의 속성과 관계에 대한 서술 부분으로 구분하였다. 공유된 대상의 속성을 바탕으로 하는 것이 표면적 유사성이라고 하였으며, 관계적인 구조의 수준에서 말하는 유사성을 구조적 유사성(structural similarity)이라고 하였다. 문제에서 서술된 정보를 바탕으로 구체적인 단어나 문구 등으로 근원문제와 표적문제들의 유사성을 언급하는 경우가 표면적 유사성의 경우이며, 공유하는 해법원리나 주요 구성요인들 사이의 인과적인 관계를 언급하는 경우를 구조적 유사성의 경우로 보는 것이다. 이와 같이 표면과 심층에 대한 구분을 연구자에 따라서 다르게 표현하기도 한다. 본 논문에서는 표면과 구조적 유사성으로 서술하였다.

둘째, 총체적인 유사성과 차원적 유사성 사이의 구분은 두 대상들이 어느 정도 전체적인 지각의 관점이나, 아니면 어떤 특정한 차원에

서 제한적으로 비교하느냐에 따른다. 차원적 유사성의 개념은 표면과 심층적인 유사성과 연결된다고 볼 수 있다. 그러나 두 대상들을 비교할 때, 단지 일반적으로 유사하다고만 한다면 그것은 무엇을 판단 기준으로 한 것인지를 알 수 없다. 이와 같이 두 대상들이 유사하다는 것만이 언급될 때, 구성되는 것이 총체적 유사성이다. 그러나 분명 그러한 총체적 유사성의 경우에도 학생들의 내면에는 무엇이 있을 수 있다.

어린 아동의 경우는 주로 총체적 유사성을 바탕으로 판단하는 경향이 있으며, 연령이 증가하면서 특정한 각각의 관점들에서 대상들을 비교하는 능력이 나타난다. 차원이 달라진다는 것은 표상의 내용을 선택하여 가중치를 변화시킨다는 것을 의미한다(신현정, 2000).

표면적인 유사성은 근원문제와 표적문제들에서 대상이나 특징과 같은 해법과는 관련이 없고 현저한 세부사항들만을 언급하는 지각적 유사성이다. 지각적 유사성이라는 것은 감각기관

<표 II-1> 유사성의 유형 구분

유형과 내용 연구자	유형 구분	개념 설명
Gentner(1989)	표면적 유사성	문제에서 서술된 정보를 바탕으로 구체적인 단어나 문구 등의 서술적 정보의 유사성
	구조적 유사성	공유하는 해법원리나 주요 구성요인들 사이의 인과적인 관계의 유사성
Smith(1989)	총체적 유사성	두 대상을 어떤 특정 차원을 바탕으로 비교하여 유사하다고 하는 것이 아니라, 전체적으로 유사하다는 경우
	차원적 유사성	보다 제한적인 방법으로 두 대상을 어떤 특정 관점에서 유사하다는 경우
Chen(2002)	절차적 유사성	일반적인 해법 원리나 아이디어를 목표 달성을 위한 구체적인 연산들로 변형하는 과정의 유사성

을 통하여 지각되는 속성들에 근거하는 것이다. Smith(1989)는 지각적 유사성을 구분하는 방식에는 발달에 따른 주된 변화가 있다고 하였다. 발달 초기에 아동들은 대상들을 단지 총체적, 혼합적 닮음(resemblance)의 관점으로만 보이는 방식으로 유사성들을 이해한다. 발달이 되면서 상관적인 유사성 체계가 뚜렷하게 차별화되면서 부분적인 동일화(part identity), 색상, 그리고 크기, 보다 크다, 보다 작다와 같은 관계성의 차원(dimension)을 바탕으로 하는 유사성의 유형들과 상호 관련된다. 유사성의 유형을 간략하게 서술한 것이 <표 II-1>이다. 이러한 표면과 구조적인 관점 외에도 문제해결과정에서 해결법의 절차적 유사성(procedure similarity)이라는 다른 종류의 유사성이 최근 연구(Chen, 2002)를 통하여 보고되었다. 절차란 목표 달성과 관련된 구체적인 과정에서 일반적인 해결 법칙이나 생각을 말하는 것이다(Chen, 2002). 따라서 절차적인 유사성은 근거문제의 절차적인 세부 사항이 표적 문제의 해결법과 일치하는 정도로 판단된다.

그러나 아직까지 유사성에 관련된 연구를 시행하는 연구자들은 근원문제와 표적문제들 사이에서 속성이나 개념, 표면이나 심층, 또는 대상이나 관계적 유사성들에 대한 다양한 구성과 복잡한 관계를 적절하게 서술하고 있지 않는 것 같다.

본 연구에서는 연구 대상자들이 문제를 이해하고 계획하는 과정에서 생각하는 유사성이 어떠한 것인가를 이해하기 위하여 기존 연구들에서 언급했던 총체적 유사성과 차원적 유사성, 그리고 표면적 유사성과 구조적 유사성의 개념을 바탕으로 유사성들 간의 관계와 구성 과정 및 방법을 연구 대상자들의 외적인 행동에 대한 개방형 코딩 방법을 적용하여 분석하였다.

또한 새로운 유사성이 발견될 경우는, 이에

대한 적합한 용어를 학생들의 언어적 표현을 이용하여 서술하였다.

나. 연구자 관점의 유사성과 개인적 구성으로서의 유사성

유사성과 관련 있는 연구는 전이와 유추에 대한 연구이다. 본 연구는 전이와 유추에 대한 연구는 아니지만, 유사성과 관련이 있다고 보이는 전이와 유추적 연구를 유사성의 관점에서 고찰한다. 여러 연구들에서 다뤄진 유사성에 대한 관점은 연구자나 문제 자체에 이미 존재하는 규범적인(regular) 개념의 유사성이었다(Wagner, 2003). Lave(1988)는 규범적인 유사성에 대한 전통적인 인지적 관점들을 비판하면서 두 가지 결함을 지적하였다. 첫째 문제 해결 활동에 대한 사회적 상황을 언급하지 않았다는 것이며, 둘째 문제해결과 다른 환경들 사이에서 전이를 유발시키는 것이 무엇인지에 대한 연구 내용이 없다는 것이다(Wagner, 2003). 특히, 맥락이나 문제 해결, 그리고 전이에 대한 많은 연구에서 연구자들은 연구대상자들이 동일한 것으로 인식하는 것을 문장제의 커버스토리나 내용으로 제한해 왔다는 것이다. Lave는 전이 연구와 문제 해결에 대한 연구에서 사용된 문제의 유사성에 대한 의미를 연구 대상자들에 의해서가 아니라 연구자들에 의해서 만들어진 것이라고 보았다. 연구자들이 연구대상자들이 나타내는 행동들을 이미 자신들이 만들어 놓은 기준틀에 끼워 넣는 식으로 연구하여왔다는 점이 문제가 되는 것이다.

유추의 관점에서 보면, 두 대상 사이의 유사성에 대하여 연구자들이 생각하는 개념은 어떤 공통된 구조를 가지고 있다는 것을 의미하는 것이다. 유추적 사고는 그 구조의 유사성을 이해하는 것을 가능하게 한다. 특히 문제 해결의 성공과 관련된 유사성이라는 것은 문제의 피상

적인 정보나 문맥에 대한 표면적인 유사성이 아니라 구조적인 것이며, 그것은 사고 주체가 가지고 있는 전문 지식과 관련성이 깊다고 보는 것이다. 관련된 연구들은 Silver(1981), 그리고 English & Halford(1995)의 연구들이 있다. 연구자들은 문제들 사이의 표면적 유사성과 구조적인 유사성이 이미 존재하는 것으로 보고, 이를 근거로 하여 문제해결의 성공과 관련된 유사성에 대하여 서술하였으며, 문제 해결의 성공을 유추나 전이의 성공으로 보았다.

Greeno et al. (1993)는 이와 같은 방법에서의 문제점을 제기하면서 상황인지의 관점에서 전이 연구와 전이의 본질을 재해석하고자 하였다. 그들은 개인의 심리적인 특성과 개인적 정신적 활동뿐만 아니라, Lave에 의해 강조되는 활동들의 본질을 다루려고 하였다. Greeno et al. (1993)은 개인이 인지적 활동에 참여한다는 것은 관련된 상황을 별개의 문제로 보지 않고 그 상황과 함께 개념을 학습하는 것이라고 하였다. 따라서 전이는 하나의 상황에서 다른 상황으로 가져오는 지식이라는 관점이 아니라, 하나의 상황에 참여함으로써 학습된 것이 다른 상황에 참여하는 능력에 어떻게 영향을 미치는가에 대한 것이다.

Lobato(1997)는 Greeno et al. (1993)의 연구를 확장하였다. Lobato(1997)의 연구에서는 전이를 '유사성에 대한 개인적인 구성'으로 간주하였으며, 실험자들은 자신들이 기대하는 바를 연구대상자들이 전이하느냐 못하느냐에 초점을 두지 않았다. Lobato는 연구대상자들이 여러 상황 사이에서 '유사성'이나 '동일성(sameness)'을 어떻게 인지하는가를 고찰하였다. Lobato는 기울기(slope) 개념을 지도하기 위해 컴퓨터를 사용하여 기울기 값을 수직적 변화량을 수평적 변화량으로 나누어서 값을 정하는 활동을 하였다. 또한 학생들은 그래프를 이용하여 직선의

기울기를 구하는 방법을 배웠다. 이러한 교육 후, 학생들은 교수 과제들을 잘 수행했지만 미끄럼틀이나 지붕의 기울기를 계산하는 전이과제에서는 낮은 성취도를 나타내었다. 이와 같은 '전이의 실패'라는 결과에 대하여, Lobato는 연구자들이 '실제적 전이(real transfer)'라고 하는 것을 단지 정확한 답을 구할 경우만을 생각하여 정의하였다는 점을 비판하였다. 그 이유는 새로운 문제들을 해결하는 방법을 그들의 이전 경험을 사용하여 어느 정도 전이할 수 있다는 것을 알아냈기 때문이다. Wagner(2003)는 그 후에, 하나의 과제로 연구를 시행한 Lobato의 연구에 대한 한계를 지적하면서 기본적인 통계와 확률 개념 이해를 여러 문제 해결 과정에서 고찰하였다. 그러므로 Lobato와 Wagner의 시도에서 중요한 것은 전이를 연구자의 관점이 아니라 '연구대상자의 관점에서 구성되는 유사성'이라는 정의를 바탕으로 하였다는 것이다.

이와 같이 유사성의 개념은 어떠한 가르침 없이도 구성되는 개념이며, 유사하거나 동형의 상황들을 연결할 수 있는 개념이다. 그렇다면 학생들이 어려워하는 수학 문장제 해결에서 학생들이 구성하는 유사성은 구체적으로 어떠한 것이며, 어떠한 사고를 거치는가에 대한 탐구는 수학교육의 교수학적인 기본 연구로써 가치가 있다고 볼 수 있다.

2. 수학 문장제 해결과 유사성

가. 문장제 유형과 유사성

문제의 서술 내용에 대한 유사성과 해법 절차에 대한 유사성의 관계를 바탕으로 문제 유형을 구분 지을 수 있다. 즉, 동치(equivalent)와 유사(similar), 동형(isomorphic), 그리고 관련되지 않은(unrelated) 문제로 나뉜다(Reed, 1993). 동치 문제는 근원문제와 이야기 내용과 해법 절차가

같고, 유사 문제는 이야기 내용이 같지만, 해법이 다르다. 그리고 동형 문제는 근원문제와 이야기 내용이 다르지만, 문제를 해결하기 위한 해법이 같은 문제를 말한다. 그리고 마지막으로 관련되지 않은 문제는 근원문제와 해법도 다르고 문제 내용도 다른 경우이다. 문제 유형의 구분에 대한 예를 들면, “12명의 학생들이 한 자동차에 3명씩 탄다면 몇 대의 자동차가 필요한가?”라는 근원 문제가 주어진다면, 이야기 맥락과 해결과정이 근원 문제와 유사한 동치문제는 “20명의 학생들이 한 자동차에 5명씩 탄다면 몇 대의 자동차가 필요한가?”가 될 수 있고, 해결과정만 유사한 동형문제는 “18개의 초콜릿을 한 상자에 2개씩 포장한다면 몇 개의 상자가 필요한가?”가 될 수 있으며, 해결 과정에 수정이 필요한 유사문제는 “4명의 학생들이 한 자동차에 타서 8대의 자동차가 필요하다면, 모두 몇 명의 학생들이 있었는가?”가 될 수 있을 것이다.

Reed, Dempster, & Ettinger(1985)는 근원문제와 유사하거나 동형인 문제들을 검사도구로 사용하였다. 학생들은 동형 문제의 경우에는 문제 해결에서 성공하였지만, 유사한 문제들에서는 거의 성공하지 못하였다. 학생들은 대개 근원 문제들로 제시된 예제들의 풀이를 표적 문제들에 적용할 수 없었으며, 근원 문제에 적용하였던 공식을 변형하지 않고 그대로 표적문제들에 적용하였다. 이종희, 김진화, 김선희(2003)는 근원 문제와 이야기 맥락의 구조와 해결 절차 구조의 유사성이 사상되도록 동치와 동형, 유사문제를 구성하여 중학교 1학년 학생들이 대수 문장제를 해결하는데 어떤 유추적 전이의 요인이 영향을 미치는가에 대한 실험 연구를 시행하였다. 연구 결과, 근원 문제와 검사 문제의 유사성에 따른 유추적 전이 수행에 있어서 대부분의 학생들은 동형문제와 유사문제 해결

에서 어려움을 보였다.

이러한 연구 결과들을 검토한 결과, 본 연구자는 동형문제나 유사문제에서의 학생들의 사고과정에 대한 심도 있는 연구가 필요하다고 판단되었다. 따라서 학생들이 문제를 해결하는데 어려움을 나타내는 동형문제와 유사문제를 본 연구를 위한 검사도구로 선정하였다.

나. 문제해결과 유사성

문제 해결자는 근원문제와 다른 구조를 가진 유사 문제를 해결하기 위해서는 근원문제의 해법을 유사문제의 구조에 맞는 해법으로 변형할 수 있어야 하며, 표면적인 정보가 다른 동형 문제를 해결하기 위해서는 근원문제와 같은 해법을 적용할 수 있어야 한다(Reed, 1993). 동형 문제는 근원문제와 같은 구조를 가지고 있기 때문에, 문제 해결자들이 동형문제를 해결하기 위해서는 근원 문제의 해법을 동형문제에 적용할 수 있어야 한다. 개념의 대응이라는 것은 대부분의 유추에 대한 이론들이 말하는 정보의 대응이다(Holyoak & Thagard, 1989). 학생들이 어떻게 유사한 해법을 사용하는가에 대한 영향력 있는 이론들 가운데 하나가 Gentner(1983)의 구조 사상 이론이다. 그 이론은 주로 하나의 근원 영역에서 표적 영역에 대한 대응을 설명하는 방식이다.

Reed(1987)는 학생들에게 혼합 문제와 일 문제에 대한 해법을 제시하고 각 예제를 변형한 문제를 해결하도록 하였다. 연구 결과, 학생들은 유사 문제보다는 동형 문제에서 문제 해결의 성공 비율이 높았으며, 혼합 문제의 경우보다는 일 문제의 경우에서 학생들은 문제해결에서 더 많이 성공하였다. 또한 학생들이 근원문제를 어떻게 이해했느냐에 따라 표적 문제의 해결에 대한 성패가 결정되었다. 그러나 그 이전에 학생들이 가지고 있었던 지식도 매우 중

요한 요인이었다. Reed(1987, 1993)는 문제해결에서의 성공을 성공적인 전이라고 보았다. 학생들이 반드시 예제를 이해하는 경우에만 전이를 성공하는 것은 아니며, 예제에 대한 진정한 이해를 하지 않고도 문제들 간의 대응을 할 수 있는 경우에는 문제해결에 성공을 하였다. 또한 학생들이 해법에 대한 일반화를 하는 경우에는 학생들이 다른 문제를 해결할 때 부정적인 영향을 미칠 수 있다.

Bassok(1990, 1997, 2001)과 Bassok & Holyoak (1993)은 수학 문장제의 내용과 구조 사이의 관계성, 즉 문제를 해결할 때, 같은 공식을 사용하는 수학 문장제들 사이의 전이에 대하여 연구하였다. Bassok(1997)의 연구에서는, 연구대상자들이 근원 문제에 대한 서술 내용에서의 연속적인 변화와 표적 문제에 대한 서술내용의 불연속적인 변화 사이에 존재하는 차이점에 민감하게 반응하였다. 따라서 연구대상자들은 그 문제들을 다른 구조의 문제들로 해석하였다. 그러한 연구 결과를 통하여, 본 연구자는 문제 내용과 맥락, 그리고 그 구조에 관계된 해법 사이에는 매우 복잡한 관계가 있다는 것을 알 수 있었다. 학생들이 어떤 문제를 해결하는 경험을 통하여 이해하고 기억하는 것은 단지 경험한 문제에 대한 서술내용들을 제외한 그 문제의 구조와 해법에 관련된 수학적 원리와 공식만을 기억하는 것이 아니라는 것이다. Bassok(1997)은 문제에 서술된 내용을 이해하는 과정에서, 학생들은 같은 구조를 가진 동형문제도 다른 구조를 가진 문제들로 해석할 수 있다고 주장하였다. 이와 같이 학생들이 문제 정보의 어떤 부분에 집중하느냐에 따라 문제를 해결하는 해법이 달라질 수 있다는 것이다.

따라서 본 연구자는 학생들이 문제 내용의 어떤 부분에 집중하느냐에 따라 그들이 구성하

는 유사성의 유형은 달라질 수 있으며, 그러한 과정은 문제 해법을 구하는 과정에 영향을 미칠 수 있다는 부분에 대한 구체적인 설명을 본 사례연구를 통하여 구체화하고자 한다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상자 및 절차

본 연구는 학생들이 유사나 동형인 문제를 해결하고자 해법을 구하기 위하여 구성하는 유사성은 무엇이며, 그러한 유사성은 어떻게 구성되는가를 심층적으로 탐구하고자 하는 것이다. 이러한 연구 목적을 달성하기 위해서는 학생들의 생각을 심층적으로 분석하는 과정이 필요하다. 이를 위해 어떠한 표준화된 질문지에 대한 체계적이며 수치화된 반응이 아니라, 학생들의 문제 해결 과정을 이해할 수 있는 보다 세부적이며, 미리 정해지지 않은 범주의 발견을 가능하게 하는 질적인 연구 방법이 필요하다. 그러므로 학생 개인들 간의 차이를 바탕으로 심층적인 정보와 체계적이며, 내포적인 정보를 이해할 수 있는 사례연구 방법(Patton, 2002)을 적용하여 본 연구를 수행하였다.

본 연구 수행을 위한 표집 방법은 목표 지향적인 표집(purposeful sampling)이며, 전략은 집중 표집(intensity sampling)이다. 목표 지향적인 표집은 연구를 위하여 깊이 있게 정보가 풍부한 사례를 선택하는 것을 핵심으로 하는 방법이다. 정보가 풍부한 사례들은 연구 목적에 대한 중점적인 논제에 대하여 다각도로 분석할 수 있는 경우이다. 목적 지향적인 표집은 연구 문제에 대하여 예를 들어 설명할 수 있는 정보가 풍부한 사례를 선택하는 것을 중시한다. 집중 표집(intensity sampling)은 극단적 사례 표집

(extreme case sampling)과 같은 논리를 포함하지만 극단적인 경우를 덜 강조한다. 집중 표집은 극단적인 경우가 아니라 관심이 집중된 현상을 분명하게 나타내는 정보가 풍부한 사례들로 구성된다. 극단적이거나 정상이 아닌 사례들은 너무나 색달라서 관심이 있는 현상을 명백하게 하는 것이 왜곡될 수 있다. 이러한 집중 표집의 논리를 사용하여 연구자들은 매우 색다른 사례가 아닌, 관심 있는 현상에 대한 풍부하고 우수한 예시들을 찾게 된다. 본 연구의 경우는 문제 해결에 대한 해법을 구하는 과정에서 학생들이 구성하는 유사성과 그 적용을 탐구하는 것이 목적이다. 따라서 성적이 너무 우수하거나 떨어지는 학생들은 해법을 구하는 과정에 대한 자료가 풍부하지 않거나 적절하지 않다고 본다. 특히, 검사 도구가 이전에 경험한 문제인 경우에 수학적성이 아주 우수한 학생의 경우는 풀이 과정에 대한 다양한 정보를 얻을 수 없을 것이며, 성적이 하위권의 학생은 문제 해결이 어렵기 때문이다. 따라서 수학 성적이 중상위권인 학생들의 경우는 해법 과정에 대한 보다 풍부한 정보를 찾을 수 있을 것이라고 판단되어, 본 연구에서는 목표 지향적 표집 방법인 집중 표집 방법을 적용하여 수학적성이 중상위권인 학생을 연구 대상자로 선정하였다. 그리고 표본 크기는 연구자가 알고자 하는 것, 연구 목적, 문제가 되는 것, 유용하게 될 것, 신뢰성을 가지게 될 것, 그리고 유용한 시간과 자료들에 의존한다(Patton, 2002). 적은 수의 사람들로부터 수집한 심층적인 정보(in-depth information)는 매우 가치가 있을 수 있으므로 본 연구에서는 연구 대상자로 2명을 선정하였다.

Patton(2002)은 질적 표집 설계는 연구 목적과 관심에 대한 부분의 예정된 합리적인 범위를 바탕으로 한 최소 표본을 조건으로 지정할 것을 권하였다.

그러한 연구 방법을 따라 본 연구의 면담은 학교 교실에서 방과 후에 2005년 11월 중순에 실시하였다. 학생 A는 첫 면담에서 근원문제와 다른 표적 문제들을 모두 해결하였는데, 근원문제에 대한 해결과정을 보지 않고 자신의 기억을 이용하여 다른 문제들을 해결하였다. 학생 B도 근원문제를 해결하고 그 풀이를 보지 않고 기억을 통하여 다른 표적문제들을 해결하였다. 그러나 시간이 많이 필요하였기에 그 다음날 시행된 두 번째 면담에서 나머지 문제들을 해결하였다. 본 연구는 단지 <근원문제>와 <표적문제> 사이의 유사성만 분석하고자 하는 것이 아니라, 그 이전의 경험도 포함하였다. 학생들은 완전한 새로운 문제가 아니라, 이전에 경험하였던 문제를 해결할 경우에는 관련된 다른 문제 해결의 경험이 관련되기도 한다. 그 이유는 본 연구에서와 같이 검사도구가 학생이 이전에 경험한 문제인 경우에는 학생들이 구성하는 유사성이 단지 근원문제와의 유사성만이 아닐 수 있다. 특히 이전에 경험한 문제의 경우에는 그 문제 정보와 관련된 다른 유형의 문제를 해결한 경험도 영향을 미칠 수 있기 때문이다.

연구자는 면담 과정에서 연구대상자들의 사고 과정을 탐구하고자 소리 내어 사고하기 방식을 사용하여 표현되는 언어적이거나 비언어적인 행동들을 추적하고 이해하고자 연구대상자들과의 면담내용을 모두 녹음하였다. 그리고 한 번의 면담은 1시간 30분정도 소요되었다.

2. 검사 도구

대부분 학생들은 현재 풀고자 하는 문제가 이미 알고 있는 문제, 즉 이전에 학습하거나 관련된 지식을 가지고 있는 경우에도 그 문제를 풀 수 없는 경우가 많다.

본 연구는 Polya(2002)와 Schoenfeld(1985)가 강조하는 전략과 발문의 바탕이 유사성 인식이라는 점에 착안하여 학생들이 유사한 문제들 사이에서 구성하는 유사성은 어떠한 것이며, 어떠한 과정을 거치는가에 대한 탐구를 통하여 교수학적인 측면에서의 질적인 자료 구성을 위한 기본 연구로 본 연구를 실시하였다. 따라서 수학적 지식 구성에 중요한 역할을 하는 수학교과서에 수록된 문제 유형을 바탕으로 검사도

구를 만들고자, 우리나라 수학교육과정과 일치되는 내용의 검사문제들을 바탕으로 실험 연구를 수행한 Reed, Dempster, & Ettinger(1985)와 Reed(1987, 1999), 그리고 Silver(1981)의 혼합문제와 일 문제, 그리고 일차방정식의 활용문제들을 수정 및 보완하여 검사 문제를 제작하였다. 그리고 문제에 대한 타당도를 확인하기 위하여 서울지역에 소재한 중학교에서 수학 성적이 중상위권에 속하는 학생 2명을 대상으로 예

<표Ⅲ-1> 검사 도구로 사용된 문항

근원	방의 페인트칠을 완성하는데 아버지는 4시간 걸리고 아들은 6시간이 걸린다고 한다. 그렇다면 만일 그들이 함께 일한다면 몇 시간 걸리겠는가?		
유사문제	아버지와 아들	형과 동생	어머니와 딸
	아들이 거실의 페인트칠을 완성하는 시간은 12시간이며, 아버지는 8시간이다. 이때 먼저 아버지가 전체 거실의 $\frac{1}{4}$ 을 먼저 페인트칠을 하시고 난후에 나머지 거실을 아버지와 아들이 함께 페인트칠을 하려고 할 때, 그 일 마치는 데 몇 시간이 걸리겠는가?	형은 그의 집 정원에 있는 문의 페인트칠을 완성하는데 9시간이 걸리고, 동생은 12시간이 걸린다. 형과 동생이 4시간 동안 함께 페인트칠을 한 뒤 동생은 쉬고, 형 혼자서 나머지를 페인트칠하였다. 형이 혼자서 페인트칠을 마치는데 걸린 시간은 얼마인가?	어머니와 딸이 대문을 페인트칠하려고 한다. 딸이 혼자서 페인트칠을 마치는데 6시간 걸리고 어머니 혼자서 하시면 4시간 걸린다. 그렇다면 쉬지 않고, 어머니와 딸이 둘이서 함께 대문을 페인트칠을 한다고 할 때, 완성하는데 걸린 시간을 얼마인가?(단, 어머니가 혼자서 1시간 먼저 페인트칠을 하신 후에, 나머지를 딸과 함께 페인트칠을 하셨다.)
동형문제	물탱크	자전거	모형 비행기
	물탱크를 가득 채우는데 작은 호스는 5시간 걸리고 큰 호스는 3시간 걸린다. 만약 두 호스를 동시에 모두 사용하면, 물탱크를 채우는데 걸리는 시간은 얼마인가?	철수는 희수네 집까지 자전거를 타고 2시간 걸린다. 희수는 철수네 집까지 가는데 자전거로 3시간 걸린다. 그렇다면 철수와 희수가 동시에 자전거를 타고 상대방의 집을 향하여 떠난다고 할 경우, 그들이 만나는 데까지 걸리는 시간은 얼마인가?	나와 친한 친구가 모형 비행기를 조립하였다. 내가 혼자서 조립하는 경우에는 3시간 걸리고, 내 친구가 혼자서 하는 경우는 4시간 걸린다. 그렇다면 그 친구와 내가 함께 그 모형 비행기를 쉬지 않고 조립한다면 몇 시간 걸리겠는가?

비 검사를 실시하였다. 그 결과, 혼합문제의 경우는 두 학생 모두에서 획일화된 방식, 즉 모두가 다이어그램을 이용하여 접근하는 것을 발견할 수 있었으며, Silver(1981)의 문제들은 중상위권 학생들에게는 너무 쉬웠기 때문에 풀이 과정에 대한 관찰이 불가능하였다. 본 연구는 문제에 대한 해법을 구하는 과정에서 개인차에 따른 유사성의 구성과 그 과정에 초점을 두기 때문에, 학생들이 모두 어떤 획일화된 풀이 과정이 나타나는 문제이거나 너무 쉽게 접근하는 문제들은 보다 풍부한 정보를 탐구를 목적으로 하는 사례연구의 검사 도구로 적합하지 않다.

예비검사에서 학생들은 모두 일 문제를 해결하는 경우에 여러 가지 풀이 방법을 나타내었다. 그러므로 본 연구자는 Reed(1987, 1993)에서 제시된 검사 도구를 바탕으로 수정된 일 문제 7개를 검사도구로 선정하였다. 검사 도구를 이루는 문제는 근원문제 1개와 동형문제 3개, 그리고 유사문제 3개로 이뤄졌으며, 이에 대한 타당성은 현직 중학교 교사 5명에게 검증 과정을 거쳐서 수정하였으며, 검사 도구 문제에 대한 내용은 <표 III-1>의 내용과 같다.

학생들이 검사도구인 7개의 문제를 해결과정에서 구성하는 유사성에 대한 연구결과가 일반화될 수 없다. 그러나 본 연구는 일반화가 목적이 아니며, 지금까지 표면이나 구조적 유사성에 대한 관계나 구성 과정들에 대한 경험적 정보를 바탕으로 한 심층적인 서술적 정보가 없었다는 점에 그 가치를 둘 수 있다.

3. 사례 연구를 위한 자료 수집 및 분석 방법

자료 수집은 두 명의 연구 대상자들에게 검사문항들을 제시하고 풀이과정을 큰 소리로 말하게 하는 “think aloud” 방법을 적용하였으며,

개별적으로 일대일 면담을 진행하였다. 이것은 각각의 연구 대상자가 유사하거나 동형인 문항들 사이에서 개인적으로 구성한 유사성을 분석하기 위한 것이다. 면담은 과제를 바탕으로 한 임상면담, 지속적인 관찰, 비형식적인 대화 등에 대한 오디오 테이프 녹음과, 연구자와 학생간의 상호작용을 모두 기록하는 등의 다양한 자료 수집 전략을 통하여 연구 대상자와 연구자의 의사소통, 비언어적, 언어적인 행동 패턴을 포착하였다.

자료 분석과정은 연구자가 연구대상자들을 면담한 모든 내용의 전사본과 그들의 기록물들, 연구자의 메모나 기록물들을 준비하고, 이러한 자료를 더 깊이 이해하도록 하는 것과 더 광범위한 의미를 해석하기 위하여 근거이론을 바탕으로 하는 개방형 코딩(open coding)을 이용하여 범주들로 나누었다. 개방형 코딩이란 것은 분리된 사건이나 결과, 현상에 대한 다른 예시들에 개념적인 호칭을 붙이는 것이다. 개념들이 다른 것들과 서로 비교하고, 유사한 현상에 관계될 때 개념에 대한 분류화가 가능하게 된다(Strauss & Corbin, 1990). 그것은 수집된 자료를 바탕으로 지속적인 반성을 하고 분석적인 질문을 하면서 연구를 진행하는 동안 메모를 계속해서 하고, 연구자 스스로에게 일반적인 질문을 계속하면서 연구대상자가 제공한 정보를 분석해가는 것을 포함한다.

IV. 사례 연구 분석과 논의

1. 사례연구 분석

가. 유사문제 : 학생 A

1) 차원적 유사성과 표면적 유사성, 그리고 구조적 유사성

학생A는 처음에는 문제 내용에서 서술된 단어나 문구를 바탕으로 각각 유사한 부분을 지적하였다. 즉 학생A는 ‘일을 하는 것’과 ‘일을 하는데 걸리는 시간’이라는 차원에서 유사하다고 하였다. 이렇게 유사한 특정 부분을 선택하는 것은 차원적 유사성이라고 볼 수 있다. 그렇게 구성된 유사성이 구조적인 관점으로 진행되는 것을 연구자는 <에피소드1>과<에피소드2>를 통해서 관찰할 수 있었다.

<아버지와 아들: 에피소드1>

학생A : 문제를 읽는다.

연구자 : 문제를 풀 때 표시를 하는 이유는 뭐지?

학생A : 제가 국어를 잘못해서 문제를 세 번 정도 읽으면 그 내용을 자주 잊어서 줄을 치면서 기억하면서 읽어요. 음.. 이 문제는 앞의 문제와 비슷해요. 같은 유형 같아요. 아까 문제가 그 일을 마치는 데 몇 시간이 걸리고 아버지도 몇 시간이 걸리고 같이 하는 데는 몇 시간이 걸리는 가인데, 이 문제는 아버지가 먼저 하지만 마치는 데 걸리는 시간을 구하니까..(그림을 그린다.)

<형과 동생: 에피소드2>

학생A : (문제를 읽으면 줄을 긋거나 다른 표시를 시험지에 한다.)

연구자 : 그리고 그렇게 행동하는 이유는 뭐죠?(학생A의 행동을 가리키면서)

학생A : 보통은 문제에 줄을 긋게 되는데..숫자가 나오면 동그라미를 치고, ‘쉬고’ 같은 말은 문제의 단서가 되기 때문에 네모 같은 것을 쳐요. 숫자에는 동그라미를 쳐서 헛갈리지 않게 해요. 그리고 동생은 12시간 걸린다는 것은 이렇게 다른 식으로 표시해야 나중에 풀다가 헛갈리면 다시 찾는데 시간을 절약하기 위해서 이렇게 표시해요?

연구자 : 이 문제는 이전에 풀었던 문제와 비교할 때 어떤 생각이 들어요?

학생A : 이 문제도 비슷한 것 같아요. 이 문제

도 일을 다 하는데 걸리는 시간이구, 같이 하면 얼마나 걸리겠는가를 묻는 것인데, 다른 점은 동생은 쉬고 나머지를 형이 혼자서 다하는 것이니까..비슷해요.

연구자 : 그런 생각을 하면서 또 다른 생각은 안하나?

학생A : 그런 생각할 때 형이 한 시간하는데 걸리는 것을 구하고 동생도 구하고 그리고 같이하는 시간을 구하고 그리고 다음에 남은 양을 형이 혼자서 하는 것이니까 형이 혼자서 하는 시간을 구해서 ..하면 되겠다는 생각을 동시에 해요

학생A는 근원문제와 비교하여 ‘같이 일하는데 걸리는 시간’과 ‘일을 하는 데 걸리는 시간’이라는 점에서 동일하다고 하면서도, <에피소드1>에서는 ‘일을 하는 순서’라는 부분에서 다르다고 했고, <에피소드2>에서는 ‘동생은 쉬고 나머지를 형이 혼자서 한다’는 부분이 근원문제의 ‘같이 한다’라는 부분과 다르다고 하였다. 이렇듯 학생A는 부분적으로 동일한 점을 지적하면서 차이점도 항상 함께 지적하였다. 연구자는 학생A가 동일하다는 부분은 근원문제에서 적용하였던 수학적 개념이나 원리가 동일한 부분이고, 다르다고 지적한 부분은 이전 문제에 적용하였던 해법 과정과 계획에 변화가 필요한 부분이었다는 것을 계획단계에서 파악할 수 있었다.

2) 해법에 대한 변형: 다이어그램의 적용
이와 같이 유사한 문제들을 바탕으로 학생A가 구성하는 유사성은 처음에는 표면적인 유사성과 차원적 유사성이었다. 그러한 유사성은 근원문제와의 차이점과 함께 구성되었다. 학생A는 각각 유사하다는 부분에 대하여 근원문제에 적용하였던 수학적 개념이나 원리를 동일하게 적용하였다. 즉, ‘일을 한다’와 ‘각각 일을

하는데 걸리는 시간'라는 부분에서 유사하다고 생각한 학생A는 표적문제인 <아버지와 아들> 문제에서도 '전체 일의 양이 1'과 '일의 속력'이라는 수학적 개념을 마찬가지로 적용하는 구조적인 유사성으로 연결되었다.

<아버지와 아들: 에피소드3>

학생A : (그림을 그린다)

연구자 : 그 그림은 무엇이지? 왜 그리는 거지?

학생A : 전체에서 4분의 1을 먼저 했다고 표시하고 나중에 4분의 3을 하면 되니까..
그림을 그리면 문제의 내용이 정리가 되요. 그리고 습관적으로 그렇게 해요. 기호 같은 것이 있다고 해도 우선은 그림을 그려서 정리를 해요. 그리고 다음에 식을 세워요.

<어머니와 딸: 에피소드4>

학생A : (그림을 그린다)

연구자 : 왜 그리는 거지?

학생A : 저는 말로 하는 것보다 그림으로 하는 것이 이해가 더 잘 되요. 이것은 보이는 것이니 까요. 그리고 이것은 남이 이해하기에도 이 방법이 더 좋아요. 내가 설명을 하면 잘못 알아듣는 경우도 있는데 이렇게 그림을 그리면 더 잘 이해하는 것 같아요. 그래서 혼자서 문제를 풀 때는 맨 처음에 그림을 그려서 어떻게 식을 세울지를 생각한 후에 식을 세워요.

특히, 학생A의 경우는 다이어그램이라는 시각적인 표현을 통하여 문제 이해와 식의 수립이 보다 명확하게 구체화되었음을 알 수 있었다. 제시된 <에피소드3>과 <에피소드4>는 그러한 내용을 나타낸다.

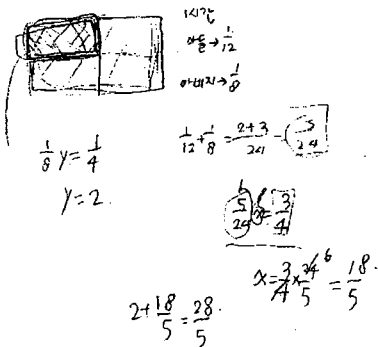
<에피소드3, 4>에서 서술된 바와 같이 문제에 대한 이해의 마지막 단계에서 학생A는 전체적인 문제 구조를 이해하고 확인하기 위한 수단으로 다이어그램을 사용하였다.

[그림 IV-1]과 [그림 IV-2]에 학생A의 풀이과정 이 나타나있다. 학생A는 문제 이해 단계에서 다이어그램을 사용하여 이전에 적용하였던 문자식에 대한 변형을 예감하였으며, 이를 바탕으로 식의 변형을 계획하였다.

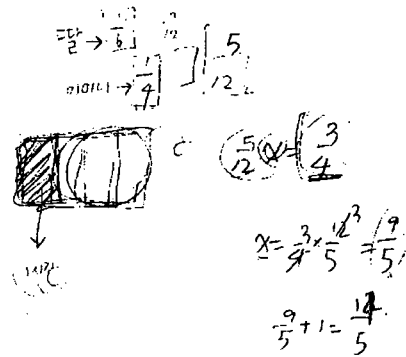
나. 유사문제 : 학생B.

1) 총제적 유사성과 표면적 유사성, 구조적 유사성

학생B는 문항에 대한 표면적인 수준에서 이전 활동과 현재의 활동을 관련짓는데 '단어나 용어가 같기 때문'이라는 조건을 항상 언급하였다. 어떻게 보면 학생B와 학생A가 구성한 유사성이 동일한 것이라고 볼 수 있지만 실제로는 다른 것이었다. 다음에 제시된 <에피소드5>가 이에 대한 예시이다.



[그림 IV-1] 학생A: '아버지와 아들' 문제 풀이



[그림 IV-2] 학생A: '어머니와 딸' 문제 풀이

<아버지와 아들: 에피소드5>

학생B : 이 문제는 앞에서 풀었던 문제와 같은 것 같아요.

연구자 : 왜?

학생B : 앞에는 그냥 간단하게 **함께** 페인트칠을 했다는 것만 있었는데, 이 문제는 아버지가 전체의 4분의 1을 **먼저** 했다고 하니까...문제가 비슷한 것 같아요.

연구자 : 단지 페인트칠을 먼저 했다고 해서?

학생B : 아니 전체적으로 보면 **먼저** 하구 **함께** 하구

위에서 제시된 <에피소드5>와 같이, 학생B는 문항의 서술 내용에서 어떤 단서가 되는 용어나 문구에 의해 유사함을 나타내었다. ‘페인트칠하기’라는 용어는 같지만 일을 수행하는 형태가 ‘함께’나 ‘먼저 한 후에 함께’와 같이 다른 표현임에도 불구하고 학생B는 <아버지와 아들>문제를 근원문제와 같은 범주로 분류하였다. 그리고 <근원문제>에서의 ‘어떤 일을 하는데 주어지는 시간’과 ‘혼자서 하는’ 과 같은 표면적인 내용을 바탕으로 같은 수학적 원리를 지금 해결하고자 하는 문제에도 동일하게 적용하였다.

<형과 동생: 에피소드6>

학생B : (문제를 읽는다) 이 문제도 비슷한 것 같아요. 그런데 4시간동안 **함께** 페인트칠을 하는데 동생은 **쉬고** 형이 **혼자서** 한다고 하니까 꼬는 것 같아서 기분이 안 좋아요.

.....(중략)

연구자 : 이전 문제와 같은 유형인가?

학생B : 네. ‘**형과 동생**’이 나오고, ‘**시간**’, 그리고 ‘**함께**’, ‘**쉬고**, **혼자서**’했다는 말이 나와서요.

<에피소드6>에서 표현되는 바와 같이, 학생A는 표면적인 정보를 바탕으로 문제들 사이에서 동일한 부분과 다른 부분을 구분하는 차원

적 유사성을 구성한데 반해, 학생B는 차이점을 구별하지 않고 전체적으로 비슷하다고 보는 총체적 유사성을 구성하였다. 학생B는 총체적 유사성과 표면적 유사성을 구성함으로써 이전 문제에서 생각하였던 풀이과정에 대한 계획을 표적문제에서도 동일하게 세웠다.

2) 변형되지 않는 해법: 문자식

다음에 제시된 <에피소드7>에서 서술하는 바와 같이, 학생B는 문제에 대한 서술정보인 단어나 문구 등을 중심으로 <근원문제>를 해결하였던 기억을 떠올렸다.

<형과 동생: 에피소드7>

연구자 : 그래? 비슷하다고 생각해? 그러면 어떻게 해야 해?

학생B : 일단은 이렇게 $(\frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta} = 1$ 이라고 쓴다) 식을 써주고, 이제부터 생각을 해야겠다는 생각을 해요.

연구자 : 그 식은 뭐야? 같은 유형이라서?

학생B: 네. 그런데 헛갈려요.

연구자 : 뭐가?

학생B : 함께 페인트칠을 하는데 동생이 쉬고 형이 혼자서 하는데, 그런데 함께 하는 것인데. 나중에는 동생이 쉬고 형이 혼자서 하니까요. 나머지가 4분의 1인데...그 4분의 1을 더해야 할지 4분의 3을 더해야 할지를 모르겠어요.

그러한 총체적 유사성을 바탕으로 학생B는 근원문제를 해결하기 위해서 사용하였던 공식을 생각해 내었다. 그 식을 그대로 이용하기 위하여 무조건 시험지 맨 위에 공란을 포함하는 공식을 적어 두고 관련된 양적인 정보인 수치를 그 공란에 대입하고자 하였다.

다음에 제시되는 [그림 IV-3]은 <형과 동생> 문항의 풀이 과정이며, [그림 IV-4]는 <어머니와 딸> 문제에 대한 풀이 과정이다. <아버지와 아

들> 문제는 이전 경험을 통하여 형성된 자신의 머릿속에 존재하는 공식에 대한 기본 틀이 그대로 적용해도 답을 구할 수 있는 문제였다.

그러나 위에서는 오류가 아닌 것 같은 이러한 방법을 <형과 동생> 문제 해결에는 그대로 적용했다. 즉, 식을 변형한 후 적용해야 되는데 학생B는 그대로 적용하였다. 이미 학생B는 근원문제와 동일하다고 생각하였기 때문이다. 따라서 '기본 공식'과 '양적 정보의 형태'는 이전 시나리오를 따라 그대로 적용한 것이다.

예를 들면, <형과 동생> 문제에서는 그 시나리오를 따라 '4시간'의 의미를 학생B는 분수 $\frac{1}{4}$ 형태로, 나머지라는 부분에서는 4분의 1의 나머지인 4분의 3을 적용했다. 하지만 문제해결에서는 성공할 수 있었다. 그렇지만 <어머니와 딸> 문제에서 학생B가 생각하는 방식을 그대로 따라서 적용하는 경우에는 해법을 구하는 과정에 문제가 생긴다. 예를 들면, 학생B는 '어머니가 1시간을 먼저 혼자서'라는 표현 때문에 1분의 1을 곱하거나, 다시 더하는 식으로

근원문제에 적용했던 공식을 그대로 적용함으로써 올바른 식을 계획할 수 없었다는 것이다.

이와 같이 학생B는 근원문제와 표적문제에서 구성한 구조적인 유사성은 절차상에서도 같은 사고를 따름으로써 잘못된 식을 계획하게 되었다. 그리고 학생B는 [그림IV]과 [그림IV-4]에서 나타나는 것과 같이 다이어그램을 그렸다. 그러나 학생B가 그린 다이어그램은 학생A의 것과는 다른 것이었다. 식을 다 쓰고 난 후에 연구자의 질문에 답을 하면서 그린 것으로 자신이 문제 이해나 식의 계획 수립 과정에서 스스로 구성한 것이 아니라 형식적인 것이라고 볼 수 있다.

다. 동형문제 : 학생A

1) <근원문제>와의 구조적 유사성

동형 문항의 경우에는 다르게 표현되는 단어나 문구에 대한 서술 내용임에도 불구하고 학생A는 '단어와 단어'나 '문장과 문장'의 일대일 대응을 통하여 유사하다고 생각하였다. <모형 비행기>나 <물탱크>의 경우에는 그런 식으

[그림IV-3] 학생B: '형과 동생' 문제 풀이

[그림IV-4] 학생B: '어머니와 딸' 문제 풀이

로 전개되었다. 다음에 제시되는 <에피소드8>은 <물탱크> 문제에 대한 것이다.

<물탱크: 에피소드8>

학생A: 문제를 읽는다.

학생A : 아까랑 비슷한 것 같아요 이 문제도 1시간 당 일을 하는 것을 전체로 하고 “같이 하면 얼마가 걸리는가”를 묻는 것이니까, 그리고 “아버지가 하시는 일”을 “호스가 물을 채운다”고 생각하면 같아요. 여기서는 “아버지”가 아니라 “호스”라고 생각을 하면 같다고 봐요.

학생A는 <근본>문제와의 유사성을 문제 내용에 대한 전체적인 맥락에서 하나의 단어나 문구에 집중하지 않고, 문제서술에서 대상이나 행동이 다르더라도 그것을 구조적인 관점에서 동일한 것이라고 생각하였다. 학생A는 자신이 구성한 유사성을 보다 자세하게 설명하기 위하여 단어나 문구를 이전 활동에서의 단어나 문구와 일대일 대응시키면서 설명하였다. 따라서 동형문제에서 학생B는 표면적인 정보에 대한 동일성을 나타내지는 않았지만, 구조적인 관점에서 유사성을 구성하였다.

2) <다른 문제 스키마>를 바탕으로 한 표면적 유사성과 구조적 유사성

학생A는 지금 해결해야 하는 문제에 대한 기억이 <근원문제>가 아닌 다른 문제에 대한 스키마가 작용하는 경우는 다르게 반응하였다. 문제에 대한 서술 정보가 자신이 이미 가지고 있는 스키마에 더 가깝다고 생각한 <자전거>문제에서는 그것에 관련된 거리와 속력에 대한 문제를 바탕으로 유사성을 구성하였다. 그러한 내용은 다음에 제시된 <에피소드9>에서 나타난다.

<자전거: 에피소드9>

학생A : (문제를 읽는다)

학생A : 조금은 비슷한데..일과 시간이 주어지니까...일을 하는데 걸리는 시간이 주어지니까..철수가 회수네 집까지 가는데 그것을 1이라고 보면 그것을 다하는 데 2시간이 걸리고 회수는 3시간이 걸리니까 유사한 것 같아요. 그러니까 “그렇게 가는 것”을 “일”이라고 보면 유사해요.

이 문제는 거리와 속력을 연관시켜서 풀면 될 것 같은데..

연구자: 유사하다고 하면서 왜 다른 식으로 생각을 하지?

학생A : 그런데 이 문제는 원래 적용하던 공식으로는 못하겠어요.

학생A는 문제서술에 대한 표면적인 정보를 바탕으로 <근원문제>가 아닌 다른 문제유형을 기억해내었다. 학생A는 지금 해결해야 하는 문제를 이해하는 과정에서 다른 문제에서의 스키마를 활성화시켰다. 그렇지만 학생A는 ‘철수와 회수가 만난다’는 의미가 ‘그들이 만나기까지만 거리의 합이 전체 거리’이며, 따라서 ‘그 거리를 가는 것’은 ‘일을 하는 것’과 같은 의미라는 것은 알고 있었지만 실제로는 그것을 반영하지는 못하였다. 즉, 문제를 이해하는 과정에서 학생A는 자신이 생각하는 유사성이 <근원문제>와의 구조적인 관점에서도 구성될 수 있다는 것을 설명하였지만, 실제로 식을 계획하는 과정에서는 이전 경험에 대한 스키마인 ‘거리와 속력, 시간에 대한 문제’에 대한 기억을 활성화하였다. 그것은 Bassok(1990)과 Bassok & Holyoak(1993)이 언급한 언어적 표현에 대한 다양한 해석의 관점과 통하는 것이라고 볼 수 있다. 따라서 그러한 학생A의 행동은 언어적 정보에 대한 다양한 해석이 문제 이해나 계획 단계에서 학생들의 사고에 중대한 영향을 미칠 수 있음을 증명하는 한 예라고 볼 수 있다.

라. 동형문제 : 학생B

1) <근원문제>와의 구조적 유사성

학생B는 서술된 내용 정보에서 ‘두 사람’이나 ‘두 사물’ 등이 무엇을 하는데 걸리는 ‘시간’이 주어지고, 그리고 ‘함께’ 또는 ‘동시에’라는 단어가 나올 경우에는 단순한 기본공식들이 적용되는 것이라고 생각했다.

<물탱크: 에피소드7>

학생B : (문제를 읽는다)..음 처음 문제와 비슷한 것 같아요.

연구자: 왜?

학생B : 몇 시간 걸린다. 두 호스가 나오고 함께 “채우는 것”과 “일을 하는 것”과 같은 의미인 것 같아요.

학생B : 식을 쓴다($1/5x + 1/3x = 1$)

연구자: 그런데 그 식은 뭐야?

학생B : 아!..이 식이요? 그냥..

<에피소드8>의 내용과 같이 학생B가 구성하는 유사성은 처음에는 문제 내용을 통하여 자신이 ‘단서’라고 생각되는 단어나 문구를 중심으로 한 차원적 유사성이었다. 그렇게 구성된 유사성은 해법을 구하는 도구로서의 머릿속에 도우미를 찍어내는 틀처럼 존재하는 ‘일하기 기본공식’과 연결되어 있었다. <에피소드9>는 학생B가 어떠한 사고과정을 거치는지를 보다 정확하게 설명을 하고 있다.

<모형비행기: 에피소드9>

학생B : 이 문제는 쉬울 것 같다는 생각이 들어요.

연구자: 왜?

학생B : 아까처럼 누가 먼저 하구 그런 것이 없으니까...엄마가 한 시간을 먼저 했다고 했는데, 여기서는 그런 것이 없으니까 더 이상 생각할 것이 없다는 생각이 들어요.

연구자: 무슨 뜻이지?

학생B: 그러니까 그 식이요. 이 식에 그냥 넣으

면 되니까...제가 나쁜 것인가요? 그냥...2시간, 7시간이 나오니까, 그리고 그 시간이라는 단위가 두 개 나오고, 나 혼자 하는 것이 아니라 나아닌 다른 사람이 나오고, 그리고 함께 한다는 말이 나오면 유형이 같은 것 같아요.

연구자: 그래요?

학생B : 네. 그냥 머릿속에 틀 같은 것이 있어요($\frac{\Delta}{\Delta}x + \frac{\Delta}{\Delta}x = 1$ 이라고 쓴다).

연구자: 그 틀에 맞는지는 어떻게 알아?

학생B : 그러니까 한 번 읽어보고, 마음속으로 “같은 유형이다” 라는 생각이 나요. 그러면 이식이 떠오르고 그 식에 그 숫자들을 대입하는 거죠.

연구자: 그러면 그 유형이란 것은 뭐지?

학생B : 그냥 읽어보면 시간이 나오고 의미적으로 ..그냥 내용만 다르지 다 똑같아요.

<에피소드9>에서 학생B는 문제의 서술 내용인 표면적인 정보를 통하여 유사성을 구성하였으며, 그것은 자신의 마음속에 존재하는 공식의 틀을 적용할 수 있는지에 대한 확인 과정이었음을 설명하였다. 이러한 유사성의 구성과정에는 문제 구조에 대한 이해의 과정이 없었으며 단지 표면적 유사성을 바탕으로 식의 적용을 위한 준비 단계만이 존재한다고 볼 수 있다.

2. 논의

본 연구에서는 유사하거나 동형인 수학 문장제에 대한 해법을 구하는 과정에서 문제 해결을 위한 문제이해나 계획수립과정에서 연구대상자들이 구성하는 유사성을 탐구를 하고자 하였다.

우선, 첫째 연구 문제인, 학생들이 구성한 유사성은 어떠한 것이며 어떠한 관계들을 갖는가에 대해 정리하면 다음과 같다.

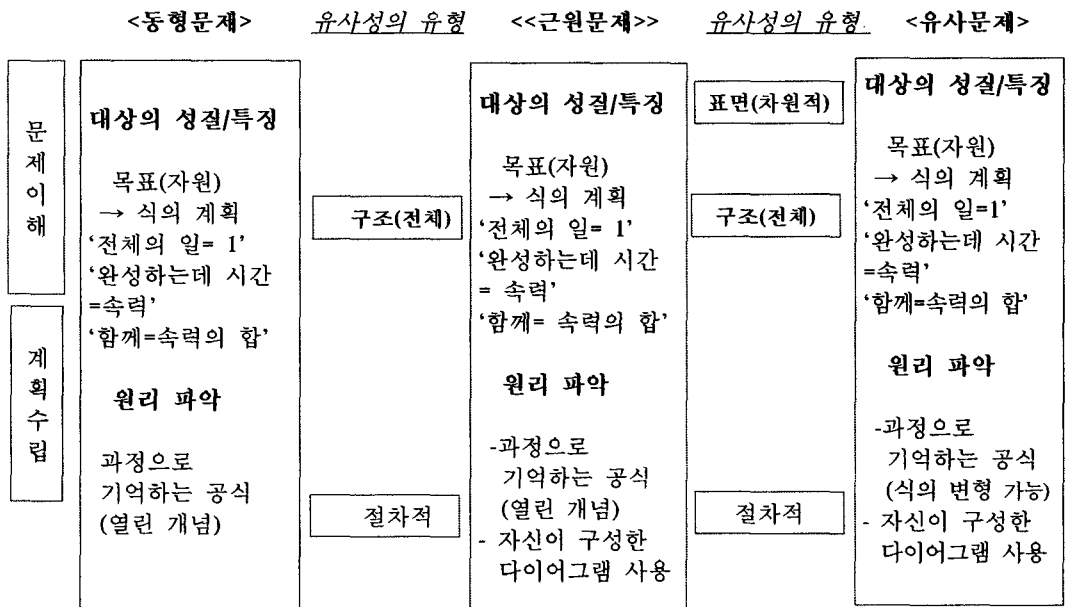
유사문제의 경우에 학생A는 표면적인 유사성과 구조적인 유사성, 그리고 해법을 구하는 그 절차에서 유사성을 찾을 수 있다. 학생A는

<근원문제>에 대한 기억을 바탕으로 부분적인 관점에서 표면적인 정보에 대한 동일성을 생각 하면서 차이점도 항상 생각하였다. 그것은 이전에 적용하였던 수학적 원리나 개념 외에 또 다른 원리를 생각하는 것이다.

[그림 IV-5]와 [그림 IV-6]은 학생A가 구성하는 유사성을 표현한 것이다. [그림 IV-5]는 근원문제를 중앙에 놓고 동형문제와의 비교를 왼쪽에 표시하였고, 유사문제와의 비교를 오른쪽에 표시하였다. 그리고 동형문제와 근원문제 사이에서 구성된 유사성의 유형을 그 사이에 표시하였고, 근원문제와 유사문제 사이에 구성된 유사성을 그 사이에 표시하였다. 학생A는 차원, 표면적, 그리고 구조적 유사성을 구성하였으며, 그러한 유사성들은 연속적이거나 상호 관련되어 구성되었다. 학생A가 생각하는 유사성은 식의 계획과정에 영향을 미쳤다. 그러나 동형문제의 경우에, 학생A는 문제내용에 대한 서술

정보 보다는 <근원문제>와의 일대일 대응을 하면서, '단어'나 '문구'의 표현에 영향을 받지 않았으며, 수학적 구조나 원리를 대입하여 동일한 식을 계획하였다.

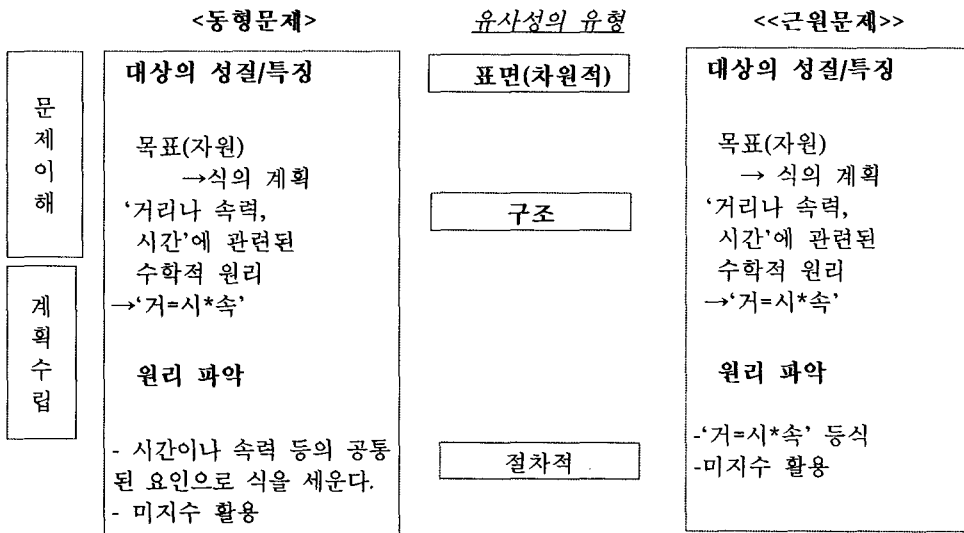
이와 다르게 <자전거>문제를 해결할 때는 학생A가 <근원문제>를 생각하지 않고 다른 것을 기억해냈다. 정리하면 [그림 IV-6]과 같다. [그림 IV-6]에서와 같이, <자전거>문제에서 서술된 '만나다', '걸리는 시간' 등의 언어적 표현은 학생A로 하여금 거리와 속력에 관련된 다른 문제를 기억하게 하였다. 따라서 학생A는 <자전거>문제를 해결하기 위하여 근원문제가 아닌 이전 기억과의 표면적 유사성과 차원적 유사성을 바탕으로 거리에 관한 공식을 생각해 서 절차와 구조적 유사성을 구성하였다. 절차적 유사성의 경우는 실행 과정에 관련된 것이므로 자세한 서술은 후속연구에서 이뤄질 것이다.



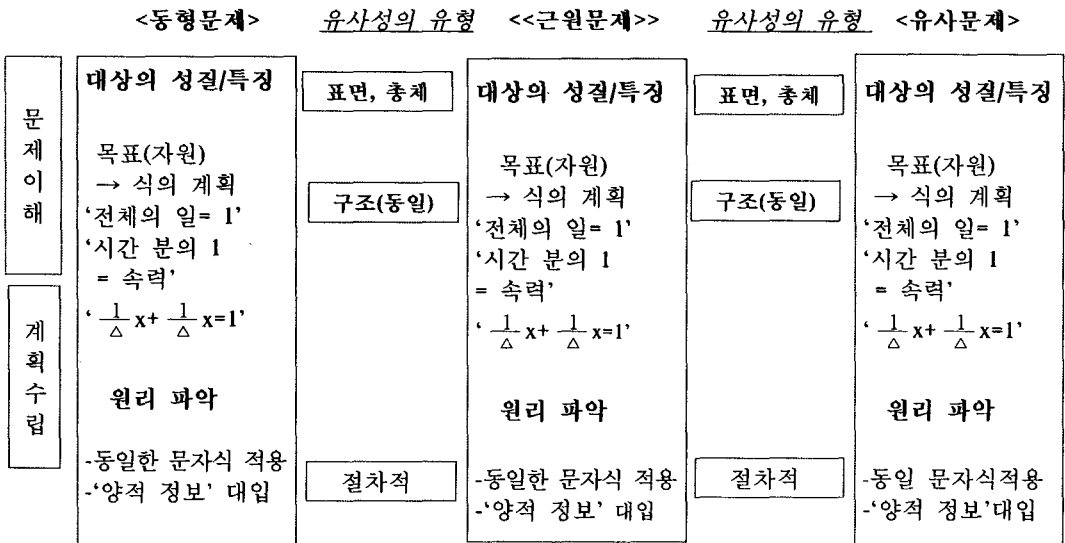
[그림 IV-5] 학생A가 구성한 <근원문제>와 <표적문제>사이의 유사성

이와는 대조적으로 학생B는 유사문제에서 문제 서술내용을 바탕으로 <근원문제>와 동일한 문제로 생각하여 같은 공식을 그대로 적용하였다. 학생B는 <근원문제>에 대한 기억을 통하여 단어나 문구를 지적하는 표면적 유사성을 구성하였지만, 학생A처럼 어떤 차원에 대한 유

사점과 차이점을 동시에 파악하지는 못하였다. 학생B는 유사성을 언급하면서도 특정한 차원에서 비교를 한 것이 아니었다. 단지 유사하다고 생각하는 총체적인 유사성을 구성하고 있다고 볼 수 있는 것이다. 그것은 동형문제에서도 마찬가지였다. 정리하면 [그림 IV-7]와 같다.



[그림 IV-6] 학생A가 구성한 <동형문제>와 <근원문제>사이의 유사성



[그림 IV-7] 학생B가 구성한 <근원문제>와 <표적문제>사이의 유사성

그 다음 두 번째 연구 문제인, 연구대상자들은 어떻게 유사성을 구성하는가에 대한 해답은 다음과 같이 정리할 수 있다.

유사문제의 경우에, 학생A는 <근원문제>에 대한 기억을 바탕으로 표면적인 정보에서 단지 동일한 부분만을 생각하지 않고 어떤 특정한 차원에 대하여 유사점과 차이점을 동시에 생각하였다. 차이점과 유사점을 동시에 생각한 학생A는 동일한 수학적 원리나 개념을 적용하면서 동시에 부분적으로 다른 해법에 대한 계획을 생각하였다. 학생A는 차이점을 생각해서 식을 변형하였다. 그러한 개인적인 학생A의 유사성 구성과정은 유사성에 대한 발달 단계의 연구들(Imai, Gentner, Uchida, 1994; Imai & Uchida, 1995; 김유정, 이현진, 1996)과 같은 맥락이라고 볼 수 있다. 아동들은 처음 3세나 5세에 단어를 습득할 때는 지각적 유사성, 특히 형태 유사성에 근거하여 반응하지만, 점차로 7세, 9세로 가면서 아동들의 관심은 보다 더 깊은 속성으로 이동되어 범주적인 관계를 고려한다. 이러한 연구들에서의 아동들의 나이가 모두 명확하게 동일한 것은 아니었지만, 연구자들은 아동들이 나이가 들어감에 따라 그들이 구성하는 유사성의 유형에 대한 변화는 동일하다고 하였다. 이와 같이 학생A도 표면적인 유사성을 바탕으로 보다 구조적인 유사성으로 구성해나갔다는 점에서 유사한 과정을 거치고 있다고 할 수 있다. 또한 그러한 구성의 과정은 연속적이며 상보적이었다.

학생A가 문제 이해의 과정에서 다이어그램이라는 표현 방법을 사용함으로써 표면적, 구조적, 그리고 절차적 유사성을 보다 명확하게 구성할 수 있었으며, 식도 올바르게 세울 수 있었다. 특히 그러한 유사성의 구성들은 연속선상에서 이뤄졌다.

Presmeg(1992, 1997)의 연구에서는 논리적인

합리성이 시각화와 상호 연관되어 있음을 강조하였다. 또한 우수한 수학자들의 연구 보고에서는 다이어그램과 다른 시각적 도구들의 가치나 그 사용에 대한 증거가 일화적인 증거로 제시된다. 예를 들면 Hadamard와 Poincaré는 학생들에게 자신들의 문제 해결 과정에서 시각적 표현들을 사용할 것을 권고하였으며, 문제 해결에서 필수적인 요소가 시각적 표현의 사용이라는 것에 대하여 논의하였다(Stylianou, 2002). 학생들이 문제를 이해하기 위하여 다이어그램을 사용한다는 것은 중요한 과정인 것이다.

학생B는 총체적 유사성과 <근원문제>와의 단어나 문구를 포함하는 표면적인 유사성을 구성하였으며, 이전 문제에 적용하였던 원리나 공식을 그대로 적용하였다. [그림 IV-7]에서와 같이 학생B가 구성하는 유사성은 문제 유형에 상관없이 모두 표면적 정보에 영향을 받았으며 이로 인해, 학생B는 동일한 “공식”을 적용하게 되었다. 학생B는 <표적문제>와 <근원문제>사이에서 유사성을 총체적으로 구성하여 문제들을 단지 비슷한 유형의 문제라고 언급하면서 그 이유를 명백하게 제시하지는 못하였다.

총체적 유사성을 구성함으로써, 학생B는 머릿속에 틀처럼 존재하는 ‘일하기 기본공식’을 사용하였다. 그리고 관련된 양적 정보인 숫자만을 찾아서 넣으려는 외적인 행동을 나타내었다. 식을 세우는 과정에서 의도적인 “끼워 맞추기식의 사고”가 나타났다고 볼 수 있다.

본 연구결과의 시사점을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 표면적 정보에 민감한 학생들의 성향을 수학교육에 적용하는 방법을 생각해 볼 수 있다. 교사가 제시하는 문제나 교과서에 제시되는 예제와 유제 및 연습 문제의 관계가 문제 내용의 유사성을 바탕으로 다양한 식의

변형이 가능한 형태로 학생들에게 제시된다면 같은 표면적 정보이기에 일어날 수 있는 오류를 통제할 수 있는 능력을 기를 수 있을 것이다. 또한 같은 구조이지만 다른 문맥을 가진 동형문제를 해결하는 과정에서 기계적으로 식에 대입하는 것을 막기 위해서는 학생들에게 다른 해법의 가능성을 생각할 수 있는 기회를 주어야 할 것이다. 예를 들면, <자전거>문제의 경우는 일하기 문제와 같은 구조를 가졌지만 <거리, 속력, 시간>에 관련된 공식을 대입하는 식으로도 해결이 가능하다. 또한 학생들에게 유사한 유형의 문제를 제시하고 비교를 할 수 있는 기회를 주고 서로 논의 할 수 있도록 해야 할 것이다.

둘째, 표면적 정보에 민감하더라도 유사점과 차이점을 함께 파악하는 학생은 자신이 생각하는 식의 변형을 할 수 있었다는 점, 그리고 그러한 과정이 학생 자신이 구성하는 다이어그램이라는 표현 방법을 통하여 이뤄졌다는 점에 대하여 생각해 볼 수 있다. 그것은 학생 스스로가 문제를 이해하고 계획 수립을 할 수 있다는 것이다. 표면적인 정보만이 우세하게 작용한 학생은 교사가 알려준 전형적인 식만을 생각하여 적용하기 때문에 문제에 적합한 식으로 수정하지 못한다. 그러나 만일 학생 스스로가 구성한 다이어그램으로 문제를 이해할 수 있다면 식을 변형할 수 있을 것이다. 학생에게 필요한 것은 자신이 문제를 이해할 수 있는 방법을 개발하는 것이다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 문제해결과정의 문제이해나 계획수립과정에서 연구대상자들이 구성하는 유사성에 초점을 두고 시행되었다. 본 사례연

구결과, 연구대상자들은 우선적으로 표면적 정보를 바탕으로 유사성을 구성하며, 문제 유형에 따라 다르게 유사성을 구성하였다. 또한 연구대상자들이 구성하는 표면적 유사성과 구조적 유사성은 상호 관련되었으며 연속적이었다. 특히 학생A의 유사성은 표면적인 것과 구조적인 유사성이 차원적 유사성과 함께 구성되었다. 특히, 동형 문항의 경우는 표면적 정보가 더 우세하게 작용하여, 근원 문제 이외의 문제 해결 경험의 스키마가 활성화되었다. 특히, 그러한 사고과정에는 학생 스스로가 구성한 다이어그램의 영향이 있었다. 그러나 학생B는 표면적 유사성을 구성하였지만 현 문제와 이전 문제를 총체적으로 유사하다고 생각하였다. 학생B가 생각하는 문제 유형에 대한 확인은 문제내용에서 서술된 단어나 문구였으며, 그것을 바탕으로 자신이 생각하는 공식의 기본 틀이 그대로 적용하였다. 그렇게 공식이 그대로 적용될 수 있었던 것은 문제들이 그냥 유사하다고 생각하는 총체적 유사성이 바탕을 이뤘기 때문이다. 또한 학생B는 다이어그램을 그렸지만, 스스로 문제 이해나 식의 계획 수립을 위해 구성한 것은 아니었으며, 형식적인 모방수준의 것이었다.

연구대상자들의 외적인 행동을 심도 있게 분석함으로써 유사성에 대한 기존 연구들의 사례적인 설명을 가능하게 하였다. 그렇지만 문제 해결 초기과정에서 구성한 유사성이 실행이나 반성단계에서 어떻게 영향을 미치며, 전개되는가에 대한 내용은 본 연구에서 다루지지 않았다. 본 연구를 기본 연구로 적용한 후속 연구에서는 그러한 문제 해결의 초기 과정에 구성된 유사성의 전개와 실행과정에서의 영향 등에 대하여 보다 심층적으로 분석함으로써 보완될 것이다.

참고문헌

- 김유정 · 이현진(1996). 아동의 단어 의미 추론에서 형태 유사성의 역할. *한국심리학회지: 발달* 9(1), 15-29.
- 이종희 · 김진화 · 김선희(2003). 중학생을 대상으로 한 대수 문장제 해결에서의 유추적 진이. *한국수학교육학회지 시리즈 A 수학교육*, 42(3), 353-368.
- 신현정 (2000). *개념과 범주화*. 서울: 아카넷출판.
- Bassok, M. (1990). Transfer of domain-specific problem-solving procedures. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 16(3), 522-533.
- Bassok, M. (1997). Two types of reliance on correlations between content and structure in reasoning about word problems. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 221-246). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Bassok, M. (2003). Analogical transfer in problem solving. In J. E. Davidson & R. J. Sternberg (Eds.), *The psychology of problem solving* (pp. 343-369). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Bassok, M., & Holyoak, K. (1993). Pragmatic knowledge and conceptual structure: Determinants of transfer between quantitative domains. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, & instruction* (pp. 68-98). Norwood, NJ: Ablex.
- Chen, Z. (2002). Analogical problem solving: A Hierarchical Analysis of procedural similarity, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 28(1), 81-98.
- Chi, M. T. H., Glaser, R., & Rees, E. (1982). Expertise in problem solving. In R. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (pp. 7-75). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Chinnappan, M. (1998). Schemas and Mental model in geometry problem solving, *Educational Studies in Mathematics* 36, 201-217.
- Cifarell, V. (1993). Representation processes in mathematical problem solving. Paper presented at Annual Meeting of the American Educational Research Association Atlanta, Georgia. ED365522.
- English, L. D., & Halford, G. S. (2003). *수학 교육론*. (고상숙, 고희경, 박만구, 이중권, 정인철, 황우형 역) 서울: 경문사. (영어원작은 1995년 출판).
- English, L. D. (1998). Reasoning by analogy in solving comparison problems, *Mathematical cognition*, 4(2), 125-146.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy, *Cognitive Science* 7, 157
- Gentner, D. (1989). The mechanisms of analogical learning. In S. Vonsniadou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 199-241). New York: Cambridge University Press.
- Gentner, D., Rattermann, M. J., & Forbus, K. D. (1993). The roles of similarity in transfer: Separating retrievability from inferential soundness. *Cognitive Psy-*

- chology, 25, 524-575.
- Greeno, J. G., Moore, J. L., & Smith, D. R. (1993). Transfer of situated learning. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 99-167). Norwood, NJ: Ablex.
- Holyoak, K. J. & Thagard, P. (1989). Analogical Mapping by Constraint satisfaction, *Cognitive Science* 13, 295-355.
- Imai, M., & Uchida, N. (1995). Examination of the taxonomic constraint and the shape in the shape bias in Japanese children, Presented at SRCD Meetings.
- Imai, M., Gentner, D., & Uchida, N. (1994). Children's theories of word meaning: The role of shape similarity in early acquisition. *Cognitive Development*, 9, 45-75.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. New York: Cambridge University Press.
- Larkin, J. H. (1983). Working towards a unified theory of how people use. Paper presented at the meeting of American Educational Research Association, Montreal.
- Lobato, J. (1997). *Transfer reconceived: How 'sameness' is produced in mathematical activity*. Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley.
- Polya, G. (2002). *어떻게 문제를 풀 것인가? - 수학적 사고 방법-*. (우정호, 역) 서울: 경문사. (영어원작은 1971년 출판).
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage publication.
- Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 595-610.
- Presmeg, N.C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematic learning. In: L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning analogies, metaphors, and images* (pp. 32-60). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Reed, S. K. (1993). A schema-based theory of transfer. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 39-67). Norwood, NJ: Ablex.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic press.
- Silver, E. A. (1981). Recall of Mathematical verbal problem, *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 54-64.
- Smith, L. B. (1989). A model of perceptual classification in children and adults. *Psychological Review*, 96, 125-144.
- Strauss, A. L. & Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Thousand Oaks, CA: Sage publication.
- Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *Journal of mathematical behavior*, 21, 303-317.
- Vonsniadou, S. (1989). Analogical reasoning as a mechanism in knowledge acquisition: a

- developmental perspective. In S. Vonsniadou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 413-437). New York: Cambridge University Press.
- Vonsniadou, S., & Andrew, O. (1989). Similarity and analogical reasoning: asynthesis. In Vonsniadou S. & Ortony, A. (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 1-17). New York: Cambridge University Press.
- Wagner, J. F. (2003). *The Construction of similarity: context sensitivity and the transfer of mathematical knowledge*. Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley.
- Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding. *Journal for research in mathematics Education*, 27(4), 435-437.

An Analysis of Similarities that Students Construct in the Process of Problem Solving

Park, Hyun Jeong (Ewha Womans University, Graduate school)

Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)

The purpose of this paper is to investigate students' constructing similarities in the understanding the problem phase and the devising a plan phase of problem solving. the relation between similarities that students construct and how students construct similarities is researched through case study.

Based on the results from the research, authors reached a conclusion as following. All of two students constructed surface similarities in the beginning of the problem solving process and responded to the context of the problem information sensitively.

Specially student who constructed the similarities and the difference in terms of a specific dimension by using diagram for herself could translate the equation which used to solve the base problem or the experienced problem into the equation of the target problem solution. However student who understood globally the target problem being based on the surface similarity could not translate the equation that she used to solve the base problem into the equation of target problem solution.

* **Key words** : similarity(유사성), understanding the problem(문제 이해), devising a plan(계획 수립), surface similarity(표면적 유사성), deep similarity(심층적 유사성), global similarity(총체적 유사성), dimensional similarity(차원적 유사성)

논문접수 : 2006. 4. 1

심사완료 : 2006. 5. 6